

**Математика. Задание по выбору из 8 класса в 9 класс. Школа «Интеллектуал»**

**Решения**

**Арифметика**

1. (1 б) Укажите наибольшее простое число, делимость на которое числа 2021 надо проверять, чтобы выяснить, простое ли 2021.

Ответ: **43**

*Решение:* Поскольку, если квадрат простого делителя уже больше 2021, мы бы смогли разделить на какое-то меньшее простое число, проверять надо делимость на простые числа, квадрат которых меньше 2021. Квадрат сорока меньше 2021, а квадрат 50 – больше, причем 2021 лежит почти в середине между ними. Стоит попробовать 45. Его квадрат – 2025. Отсюда, проверять надо до простого числа 43, включительно)

(Было бы неплохо, если бы поступающий умел возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 5:  
 $45^2 = (4 \cdot 5)_25 = 20_25 = 2025.$  )

Теперь если сообразить, что  $2021=45^2-4$ , получаем разность квадратов и сразу раскладываем на простые: 43 и 47.

Если же не сообразить, то надо проверять делимость на все простые от 2 до 43, чего мы требуем в третьей задаче.

(За ответ “47” – 0,5 балла.)

2. (1 б) Разложите число 2021 на простые множители. Каждый делитель запишите в отдельном поле ввода.

Ответ: 43 47

*Решение:* Если сообразить, (см. 1.) что  $2021=45^2-4$ , получаем разность квадратов и сразу раскладываем на простые: 43 и 47.

(За ответ “1, 43, 47, 2021” или “1, 43, 47” – 0,5 балла.)

3. (3 б) Чему равны остатки от деления 2021 (ответы на подсказки писать не надо):

*Решение:* Для решения всех подпунктов надо понимать, что остаток от деления суммы/разности на данное число равен остатку от деления, соответственно, суммы/разности остатков от деления на то же число. Кроме того, надо понимать, что делимое может быть и отрицательным числом, например, остаток от деления 40 на 41 такой же, как и от деления –1 на 41.

- а. (0,2 б) на 11. Подсказка: найдите остаток от деления 100 на 11.

Ответ: **8**

*Решение:* остаток от деления каждой сотни на 11 равен 1, а сотен — 20, поэтому искомый остаток будет таким же как при делении  $20 + 21 = 41$  на 11, то есть 8

- б. (0,2 б) на 7. Подсказка: найдите остаток от деления 50 на 7.

Ответ: **5**

*Решение:* Каждые 50 дают остаток 1, а пятидесяток в 2021 — 40. Остаток будет такой же, как от деления  $40 + 21 = 61$  на 7.

- в. (0,3 б) на 13

Ответ: **6**

*Решение:* Тут каждые сорок дают остаток 1, а сороков — 50. Ищем остаток от деления  $50+21$  на 13

- д. (0,2 б) на 19

Ответ: **7**

*Решение:* Тут можно сказать, что 2000 это сто двадцаток, остаток такой

же, как у числа 121, и шесть двадцаток еще раз заменить каждую на 1.  
Получим  $6 + 1 = 7$

- е. (0,3 б) на 17 Подсказка: найдите чего не хватает числу 50 до числа кратного 17.

Ответ: **15**

**Решение:** Заметим, что пятидесяти не хватает единицы до кратного 17. Тогда 2000 не хватает 40 единиц, а 2021 — 19 единиц, или, что то же, не хватает 2. Значит, остаток  $17 - 2 = 15$

- ф. (0,3 б) на 29

Ответ: 20

**Решение:** тут каждая тридцатка эквивалентна 1, а их в 2021 — 67, и еще 11 единиц. Ищем остаток от деления  $67 + 11 = 78$ , или, еще раз заменяем 2 тридцатки, и получаем  $2 + 18$ . В результате, остаток равен 20.

- г. (0,3 б) на 23

Ответ: **20**

**Решение:** Замечаем, что 70 тут эквивалентно 1. В 2100 было бы 30 семидесяток. В 2030 — 29 раз, а нам не хватает девяти до 2030. Следовательно 2021 даст тот же остаток, что  $29 - 9 = 20$

- h. (0,3 б) на 31

Ответ: **6**

**Решение:** Рассуждаем аналогично ф. Только тут каждой тридцатке не хватает единицы. Поэтому получаем  $-67 + 11 = -56$ , или  $-25$ , то есть 6

- i. (0,3 б) на 41

Ответ: **12**

**Решение:** Каждым сорока не хватает единицы. У нас 50 сороков. Получаем:  $-50 + 21 = -29$  То есть остаток равен 12

- j. (0,4 б) на 37

Ответ: **23**

**Решение:** Тут надо заметить, что  $3 \cdot 37 = 111$ . То есть 999 делится на 37, а каждая тысяча дает остаток 1. Итого  $2 + 21 = 23$

- к. (0,2 б) на 43

Ответ: **0**

**Решение:** А вот тут проще всего разделить в столбик.

4. (1 б) Разложите число:  $2^{15} - 1$  на простые множители. В ответе дайте простые множители в порядке возрастания через пробел. Множители, входящие в разложение несколько раз, включите в ответ столько раз, сколько они входят. Например, для числа 12 ответ должен выглядеть как **2 2 3**.

Ответ: **7 31 151**

**Решение:** В задачах 4–6 поможет представить числа вида  $2^n - 1$  в двоичной системе счисления. Такое число будет выглядеть, как число из  $n$  единиц. Тогда, если  $k, m$  — делители  $n$ ,  $2^n - 1$  разделится на  $2^k - 1$  и на  $2^m - 1$

Значит среди делителей  $2^{15} - 1$  будут  $2^5 - 1 = 31$  и  $2^3 - 1 = 7$ . Делим на них и получаем 151. Простота числа 151 легко проверяется.

5. (2 б) Разложите число:  $2^{21} - 1$  на простые множители. В ответе дайте простые множители через пробел в порядке возрастания. Множители, входящие в разложение несколько раз, включите в ответ столько раз, сколько они входят.

Ответ: **7 7 127 337**

**Решение:** Решение тут аналогично предыдущей задаче, но вычисления сложнее. Легко находим два делителя: 7 и 127, но разделив на них получаем число 2359, которое надо

проверять дальше. Оно, очевидно, не делится на 2, 3 и 5, но, к счастью, делится на 7, что легко проверяется при подсчете пятидесяток, как в 3.b

6. (3 б) Укажите два нетривиальных множителя числа  $2^{2021} - 1$  (не 1, и не само число). Ответы дайте в виде выражений, не вычисляя их. В ответе можете использовать для умножения знак звездочки: "\*", для деления: "/", а для возведения в степень — "^".

Каждый множитель запишите в отдельном поле ввода.

Подсказка: подумайте как эти числа будут выглядеть в двоичной системе счисления.

Ответ:  $2^{43} - 1$ ;  $2^{47} - 1$

**Решение:** К этому моменту мы уже знаем, что 2021 делится на 43 и 47, а значит, двоичное число из 2021 единицы разделится на двоичные числа из 43 единиц и из 47 единиц.

## Геометрия

Полученную фигуру для каждого пункта опишите словами. Полный балл ставится за правильное и однозначное описание фигуры.

Найдите фигуру, которую образуют **середины всевозможных** отрезков, таких что:

- 1) (1 б) концы отрезков лежат на двух данных параллельных прямых  
Ответ: прямая, параллельная данным, равноудалённая от них.  
Варианты: “прямая” – 0,3 б. “Прямая, параллельная данным” – 0,6 б.
- 2) (1 б) отрезки параллельны диаметру окружности, а их концы лежат на окружности  
Ответ: диаметр окружности, перпендикулярный данному (не включая концы этого диаметра).  
Варианты: “отрезок”, “прямая”, “хорда”, “радиус” – 0,1. “Диаметр окружности” или “прямая, перпендикулярная диаметру” – 0,6.
- 3) (1 б) отрезки соединяют вершину треугольника с точками его основания  
Ответ: средняя линия треугольника, параллельная основанию.  
Варианты: “отрезок” – 0,3. “Прямая, проходящая через середины сторон” – 0,9
- 4) (1 б) отрезки соединяют боковые стороны данной трапеции и параллельны её основаниям  
Ответ: отрезок, соединяющий середины оснований трапеции.  
Варианты: “высота трапеции” – 0,1; “отрезок” – 0,3; “средняя линия” – 0,3.
- 5) (2 б) отрезки имеют одинаковую данную длину, а их концы лежат на двух сторонах данного прямого угла  
Ответ: находящаяся внутри данного угла четверть окружности, центр которой — вершина угла, диаметр имеет ту же данную длину.
- 6) (3 б) концы отрезков лежат на двух диагоналях данного выпуклого четырёхугольника  
Ответ: параллелограмм, вершины которого — середины сторон данного четырёхугольника.  
Варианты: “четырёхугольник” – 1 б, “параллелограмм” – 2 б.