

Демоверсия письменного профильного экзамена по алгебре для поступающих в 10 класс

На решение даётся 180 минут

Каждая задача оценивается в 5 баллов

1. Решите уравнение  $|x| + |x + 2| = 2$ .

2. Решите уравнение  $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ .

3. Решите неравенство  $\frac{3}{x^2+2x+4} < 1$ .

4. Решите неравенство  $\frac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}} \geq x - 1$

5. а) Постройте график функции  $y = |x^2 - 2|x||$ .

б) Исследуйте зависимость количества различных действительных корней уравнения  $|x^2 - 2|x|| = a$  от параметра  $a$ .

6. Изобразите на плоскости множество точек  $(x, y)$ , заданных неравенством  $(x - y)(x^2 + y) \geq 0$ .

7. При каких  $a$  один из корней уравнения  $ax^2 + x + 1 = 0$  больше 2, а другой – меньше 2?

8. Два туриста вышли из пункта А в пункт В одновременно, причем первый турист каждый километр пути проходит на 5 минут быстрее второго. Первый, пройдя пятую часть пути, вернулся в А за случайно забытой тушенкой и, пробыв там 10 минут, снова пошел в В. В результате в пункт В оба туриста пришли одновременно. Каково расстояние от А до В, если второй турист прошел его за 2,5 часа?

9. Докажите, что при  $n \in \mathbb{N}$   $6^n + 20n + 24$  кратно 25.

10. Найдите сумму  $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$ .

11-12. *Исследовательские задачи.* Здесь приведены только *первые пункты* задач. На экзамене они же будут предложены вместе с продолжениями.

1 – задача для физмата и инфомата.

2 – задача для физмата.

3 – задача для инфомата.

Итого каждому направлению надо решить *две* исследовательские задачи.

1. Турист вышел из своей палатки, прошел 5 км на юг, 5 км на восток и 5 км на север, после чего снова оказался у своей палатки. Где такое могло произойти?
2. В Скверной стране все колеса квадратные. Квадратное колесо катится по ровной дороге без проскальзывания. Нарисуйте траекторию оси скверного колеса. (Ось проходит через центр колеса). Из каких кривых она состоит?
3. К натуральному числу  $x$  применяется следующий алгоритм, зависящий от заранее выбранного нечетного числа  $n > 1$ , состоящий из последовательных итераций следующих действий:
  - $x$  делят на 2, пока делится нацело,
  - полученное (нечетное) число умножают на  $n$  и отнимают 1.Алгоритм заканчивается, если либо получается число 1, либо получается число, которое уже встречалось раньше.  
Найдите примеры для обоих вариантов завершения.  
Попробуйте найти такие  $x$  и  $n$ , что алгоритм никогда не завершится.