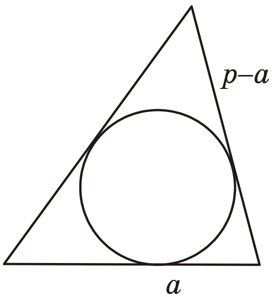
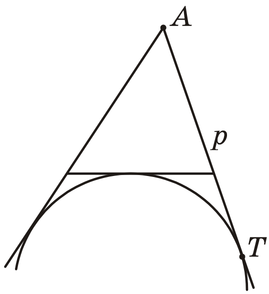
## Часть 1. Основные моменты

Знать и уметь доказывать все факты, приведенные в учебнике с доказательствами (пояснениями, решениями).
Уметь доказывать формулы из Части 2.
Уметь решать задачи из Части 3 и Части 4, владеть методами доказательства теорем, использованных при решении.

## Часть 2. Формулы

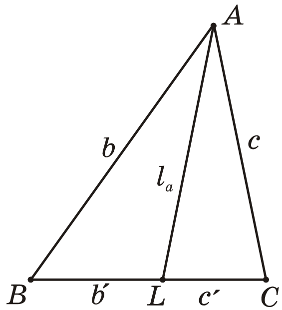
- В треугольнике $ABC$ угол между биссектрисами углов $B$ и $C$: $\varphi = 90° + \dfrac{A}{2}$.
- В треугольнике $ABC$ угол между внешними биссектрисами углов $B$ и $C$: $\varphi = 90° - \dfrac{A}{2}$.
- В треугольнике $ABC$ угол между высотами, проведенными из углов $B$ и $C$: $\varphi = 180° - A$.
- Отрезки касательных к вписанной и вневписанной окружностям.
  1) $x = p - a$; 2) $AT = p$.




- Формула параллелограмма: $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$, $e$ и $f$ — длины диагоналей, $a$ и $b$ — длины сторон.
- Формула медианы: $a^2 + 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2)$.
- Формулы биссектрисы:

$$1)\ l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}; \qquad 2)\ l_a^{\,2} = bc - b'c'.$$



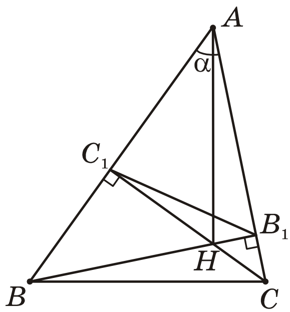

- Формулы площади:
  1. параллелограмма, трапеции;
  2. треугольника:

     $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ ; 2) $S=\frac{1}{2}ah_a$ ; 3) $S=pr$ ; 4) $S=\frac{abc}{4R}$ ;

     5) Формула Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ;
  3. четырехугольника $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, где $d_1$ и $d_2$ — длины диагоналей, $\varphi$ — угол между диагоналями;
  4. круга, сектора, сегмента;
- Подобие в треугольнике: 1) $\Delta ABC \overset{k}{\propto} \Delta AB_1C_1$ , $k=|\cos A|$;

  2) $B_1C_1=BC|\cos A|$;

  3) $AH=2R|\cos A|$.



## Часть 3. Векторы и координаты

**Вычисления, связанные с треугольником.**

1. Дано: 1) $A(-1; 2)$; $B(3; -1)$; $C(1; -2)$; 2) $A(1; 4)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -2)$; 3) $A(1; 3)$, $B(1; 5)$, $C(2; 7)$; 4) $A(0; 3)$, $B(2; 4)$, $C(8; -7)$.
   1) Определите вид треугольника $ABC$.
   2) Найдите косинус наибольшего угла треугольника.
   3) Составьте уравнение прямых, содержащих стороны треугольника.
   4) Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника $ABC$.
   5) Составьте уравнение прямой, содержащей медиану, проведенную из вершины $A$.
   6) Составьте уравнение прямой, содержащей высоту, проведенную из вершины $A$.

**Координаты на плоскости**

2. **Формула середины отрезка. Уравнение прямой.** Составьте уравнение прямой, отрезок которой, заключенный между прямыми $y = 0$ и $y = x$, делится в точке $M(5; 1)$ пополам.
3. **Формула середины отрезка.** Три вершины параллелограмма имеют координаты $(1; 1)$, $(7; 3)$, $(3; 4)$. Найдите четвертую вершину, если известно, что она имеет отрицательную абсциссу.
4. **Формула середины отрезка.** Пусть $M$ и $N$ — середины двух параллельных хорд параболы $y = x^2$. Докажите, что прямая $MN$ параллельна оси $OY$.
5. **Прямая (коллинеарность векторов).** Пусть точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ лежат на одной прямой. 1) Докажите, что $\dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \dfrac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$. 2).
6. **Прямая (коллинеарность векторов).** При каком значении $t$ точки: 1) $A(3; 8)$, $B(9; t)$, $C(-5; 0)$; 2) $M(t; -4)$, $N(2; -t)$, $K(8; 17)$ лежат на одной прямой?
7. **Уравнение прямой.** Напишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку: 1) $5x + 3y - 1 = 0$, $O(0; 0)$; 2) $y = 6x - 3$, $K(7; -11)$.

8. **Уравнение прямой.** Напишите уравнение прямой, перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку: 1) $3x - 4y + 5 = 0$, $K(-7; 8)$; 2) $5x + 3y - 1 = 0$, $M(1; 1)$.
9. **Уравнение прямой.** Докажите, что прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 k_2 = -1$.
10. **Формула расстояния между точками.** Найдите углы треугольника с вершинами $A(-2; -6)$, $B(4; 2)$, $C(-4; 8)$.
11. **Расстояние от точки до окружности.** Найдите расстояние от точки до окружности:
    1) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 11$, $M(3; -1)$; 2) $x^2 + 6x + y^2 - 10y = 2$, $O(0; 0)$.
12. **Формула расстояния между точками.** Какой геометрический смысл выражений в пунктах 1 и 2? 1) $|x-1| + |x-5|$;
    2) $\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5}$? Найдите значения переменных, при которых эти выражения принимают наименьшее значение.
13. **Окружность и прямая.** Найдите все точки окружности $x^2 + y^2 = 25$, сумма расстояний от которых до точек $A(7; 0)$ и $B(0; 7)$ — наименьшая.
14. **Уравнение окружности.** Докажите с помощью метода координат, что для любой точки окружности описанной около квадрата, сумма квадратов расстояний до четырех вершин квадрата есть величина постоянная.
15. **Уравнение окружности.** Найдите радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением:
    1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$; 2) $x^2 + y^2 - 2(x - 3y) - 15 = 0$;
    3) $x^2 + y^2 = x + y + 12$.
16. **Уравнение окружности.**
    На плоскости расположены две параболы, которые задаются уравнениями $y = x^2 + px + q$ и $x = y^2 + ry + t$. Пусть они пересекаются в четырех точках. Доказать, что все эти точки лежат на одной окружности.
17. **Уравнение окружности.** На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найдите точку: 1) ближайшую к точке $M(6; 8)$; 2) наиболее удаленную от точки $B(8; 6)$.
18. **Уравнение фигуры.** Какое множество точек задает уравнение:
    1) $x^4 + x^2 y^2 = 36x^2$;
    2) $x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - 16 = 0$;

3) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 26x^2 - 26y^2 + 25 = 0$;

4) $(x - 2y)^2 + (y + 2x)^2 = 5$.

19. **Уравнение фигуры.** Составьте уравнение фигуры, состоящей из точек:
    1) находящихся на расстоянии $\sqrt{2}$ от оси координат;
    2) равноудаленных от прямых $x = 5$ и $x = -2$.
    3) разность квадратов расстояний от которых до точек $A(1;\, 0)$ и $B(-1;\, 2)$ равна 1;
    4) сумма квадратов расстояний от которых до точек $A(-1;\, 0)$ и $B(1;\, 0)$ равна 12;
    5) прямых $x = 5$ и $x = -2$.
20. **Симметрия.** Дана точка $M(-1;\, 3)$. Найдите координаты точки, симметричной точке $M$ относительно: 1) оси $Ox$; 2) оси $Oy$; 3) начала координат; 4) точки $K(3;\, 1)$; 5) биссектрисы I и III координатных углов; 6) биссектрисы II и IV координатных углов.
21. **ГМТ.** С помощью метода координат найдите геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.
22. **ГМТ.** Даны точки $A$, $B$ и положительное число $d$. Найдите геометрическое место точек $M$, для которых $AM^2 + BM^2 = d$.

**Векторы (разное)**

23. **Векторы (расстояние между точками).** Даны точки $A(2;\, 4)$, $B(-8;\, 4)$ и $C(-8;\, 1)$. Докажите, что треугольник $ABC$ — прямоугольный.
24. В прямоугольной трапеции $ABCD : AB \parallel CD$, $\angle A$ — острый, $|\, \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\, | = |\, \overrightarrow{BC}\, |$. Найдите углы трапеции.
25. Найдите координаты всех векторов единичной длины, коллинеарных прямой $3x - 2y + 1 = 0$.
26. Дано: $\vec{a}(3;-2)$ и $\vec{b}(1;2)$. Найдите координаты вектора $\dfrac{\vec{a} - 3\vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$.

27. **Неравенство треугольника.** Дано: $|\vec{a}+\vec{b}|=7$, $|\vec{a}-\vec{b}|=15$. В каких пределах может изменяться $|\vec{b}|$?
28. **Неравенство треугольника (скалярное произведение).** Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$. В каких пределах может изменяться $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=7\vec{a}-8\vec{b}$?
29. **ГМТ.** Дан вектор $\overrightarrow{AB}\neq 0$. Где расположены все такие точки $C$, что:

1) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$; 2) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$; 3)?

**Скалярное произведение. Модуль вектора.**

30. **Перпендикулярные векторы.** Докажите, что вектор $\vec{n}(a;b)$ перпендикулярен прямой $ax+by=c$.
31. **Скалярное произведение (Середина отрезка. Расстояние между точками)** Даны точки $A(-2;0)$, $B(1;6)$, $C(5;4)$ и $D(2;-2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.
32. **Скалярное произведение.** Дано: $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+\vec{b}|=3$. Вычислите $|\vec{a}+2\vec{b}|$.
33. **Угол между векторами.** Найдите угол между прямыми 1) $3x+4y-60=0$, $3x+4y+36=0$; 2) $3x+4y-60=0$, $4x-3y+36=0$. 3) Найдите косинус угла между прямыми $3x+4y-60=0$ и $3x-4y+36=0$.
34. **Перпендикулярные векторы.** Даны векторы $\overrightarrow{AB}=4\vec{e_1}+2\vec{e_2}$ и $\overrightarrow{AC}=3\vec{e_1}+4\vec{e_2}$, где $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ — единичные векторы координатных осей. Докажите, что треугольник $ABC$ прямоугольный.
35. **Перпендикулярные векторы.** Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a}+3\vec{b}$ и $2\vec{a}+0{,}4\vec{b}$ перпендикулярны?
36. **Перпендикулярные векторы.** Даны векторы $\vec{a}(1;4)$ и $\vec{b}(-3;2)$. Найдите значение $\lambda$, при котором вектор $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$.

37. Упростите выражение: $(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — единичные векторы и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен $60^\circ$.

38. **Единичный вектор.** Найдите координаты единичного вектора, 1) коллинеарного вектору $\vec{a}(3;\,4)$; 2) сонаправленного с вектором $\vec{a}(-12;\,5)$.

39. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$. В каких пределах может изменяться $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=7\vec{a}\ -8\vec{b}$?

**Коллинеарные векторы.**

40. **Коллинеарные векторы.** При каком значении $x$ векторы $\vec{a}(3;8)$ и $\vec{b}(7;x)$ коллинеарны?

41. **Коллинеарность векторов (уравнение прямой).** Докажите, что точки $A(-1;-2)$, $B(2;-1)$ и $C(8;1)$ лежат на одной прямой.

42. **Коллинеарные векторы.** Даны точки $A(-1;7)$ и $B(5;-1)$, Найдите координаты всех единичных векторов, коллинеарных вектору $\overrightarrow{AB}$.

43. **Коллинеарные векторы.** Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ неколлинеарны. При каких значениях $x$ коллинеарны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=x\vec{m}\ -7\vec{n}$ и $\vec{b}=8\vec{m}\ +3\vec{n}$?

44. **Коллинеарные векторы.** Найдите вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(3;-4)$, если $|\vec{b}|=15$.

**Разложение векторов**

45. **Формула медианы.** Пусть точка $M$ — середина отрезка $AB$, $O$ — произвольная точка плоскости. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

46. **Точка пересечения медиан.** Пусть $M$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$, $O$ — произвольная точка плоскости. Докажите векторное равенство:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

47. **Средняя линия четырехугольника.** Точки $M$ и $N$ являются серединами отрезков $AB$ и $CD$ соответственно. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

48. **Точка, делящая отрезок в данном отношении.** Точка $M$ лежит на отрезке $AB$ и $AM:MB=m:n$. $O$ — произвольная точка плоскости. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

49. Даны векторы $\vec{a}(3;5)$, $\vec{b}(7;-3)$ и $\vec{c}(2;1)$. Разложите каждый из данных векторов по двум другим.

50. Даны точки $A(-3;5)$, $B(7;-3)$ и $C(2;1)$. Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$.

## Часть 4. Различные методы

1. **Элементы треугольника**. Пусть в треугольнике $ABC$ известны стороны 1) $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$; 2) $AB = c$, $BC = AC = a$.

   Обозначения: $r$, $R$, $I$, $O$ — радиусы и центры вписанной и описанной окружности. $H$ — точка пересечения высот. $M$ — точка пересечения медиан треугольника, $K$ — середина $BC$.

   1) Найдите отрезки касательных, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника.
   2) Определите вид треугольника. Найдите косинусы его углов.
   3) Найдите $h_a$, $l_a$, $m_a$.
   4) Найдите $R$, $r$, $R_a$.
   5) Найдите площадь вписанного круга.
   6) Найдите длину $OK$.
   7) Найдите площадь треугольника $CH_1H_2$.
2. **Высота.** Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины наибольшего угла.
3. **Биссектриса.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = c$, $AC = b$, $\angle BAC = 120°$. Найдите биссектрису $AM$.
4. **Биссектриса.** В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при основании.
5. **Теорема Пифагора.** В окружности радиуса 13 см проведены две параллельные хорды $AB$ и $CD$. Известно, что их длины 24 см и 10 см. 1) Докажите, что равны дуги, заключенные между этими хордами. 2) Найдите расстояние между этими хордами. 3) Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180°$, где $O$ — центр окружности.
6. **Теорема Пифагора.** Две окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ радиусов $R_1$ и $R_2$ касаются внешним образом. 1) Их общая внешняя касательная (прямая $a$) имеет с ними общие точки — $M$ и $N$. Найти $MN$. 2) Окружность $\omega_3$ касается $\omega_1$, $\omega_2$ внешним образом и прямой $a$. Найдите радиус $R_3$ этой окружности.

7. **Теорема Пифагора.** Найдите расстояние от центра окружности радиуса 9 см до точки пересечения двух взаимно перпендикулярных хорд, длины которых равны 16 см и 14 см.
8. **Теорема Фалеса.** В параллелограмме $ABCD$ точки $E$ и $F$ — середины сторон $AB$ и $CD$ соответственно. Докажите, что прямые $BF$ и $DE$ делят диагональ $AC$ на три равные части.
9. **Теорема Фалеса.** Найдите косинус угла $A$ равнобедренного треугольника $ABC$ $(AB = AC)$, ортоцентр которого делит пополам высоту, проведенную к основанию.
10. **Прямоугольный треугольник.** В прямоугольном треугольнике высота и медиана, проведенные к гипотенузе, равны 24 см и 25 см. соответственно. Найдите периметр треугольника.
11. **Свойство биссектрисы.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису $CD$?
12. **Теорема синусов.** В треугольнике $ABC$ высоты пересекаются в точке $H$. 1) Докажите, что равны радиусы описанных окружностей треугольников $ABC$ и $BCH$.
13. **Теорема синусов. Неравенства.** В остроугольном треугольнике $ABC$ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Докажите, что 1) $a^2 + b^2 > c^2$; 2) $a\sin\alpha$, $b\sin\beta$, $c\sin\gamma$; 3).
14. **Теорема синусов (или угол между высотой и радиусом, и т.д.).** Около треугольника $ABC$, в котором $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $AH$ — высота, описана окружность с центром $O$. Биссектриса угла $A$ пересекает эту окружность в точке $K$. 1) Докажите, что $\angle OAB = \angle CAH$. 2) Найдите угол $OAH$. 3) Найдите $AK$.
15. **Теорема косинусов.** Дан треугольник $ABC$. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла $BAC$ пересекает сторону $BC$ в точке $K$. Прямая, проходящая через точку $B$ параллельно $AC$, пересекает продолжение биссектрисы $AK$ в точке $M$. Найдите $KM$.
16. **Формула медианы (или разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций).** Доказать, что для произвольной точки $X$ и прямоугольника $ABCD$ верно равенство $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.

17. **Площадь треугольника.** В треугольнике по двум сторонам и площади определить третью сторону: $a = 17$, $b = 28$, $S = 210$.
18. **Площадь треугольника.** Найдите высоты треугольника, если его площадь равна $S$, а углы равны $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.
19. **Площадь.** Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре треугольника (последовательно пронумерованных), площади которых равны $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.
20. **Трапеция. Площадь.** В трапеции $ABCD$ известны основания: $AD = a$, $BC = b$ и площадь $S$ треугольника $BOC$ ($O$ — точка пересечения диагоналей). 1) Докажите, что площади треугольников $AOB$ и $COD$ равны. 2) Найдите площади всех треугольников, на которые диагонали разбивают трапецию.
21. **Трапеция. Площадь.** Дана трапеция с боковыми сторонами 13 см и 20 см и основаниями 6 см и 27 см. Найдите: 1) площадь трапеции; 2).
22. **Трапеция. Площадь.** Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны $30°$ и $60°$. Найдите высоту трапеции.
23. **Трапеция.** Диагональ $BD$ трапеции $ABCD$ равна $m$, а боковая сторона $AD$ равна $n$. Найдите основание $CD$, если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины $C$, равны между собой.
24. **Формула радиуса вписанной коружности прямоугольного треугольника.** Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности?
25. **Подобие (теорема синусов).** Найдите стороны треугольника $ABC$, если известен его периметр $P$ и два угла $\alpha$ и $\beta$.
26. В треугольнике $ABC$ биссектриса $AD$ делит сторону $BC$ в отношении $BD : DC = 2 : 1$. В каком отношении медиана $CE$ делит эту биссектрису?
27. **Подобие в прямоугольном треугольнике.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ — прямой. 1) На катетах построены равносторонние треугольники площадью $S_1$ и $S_2$. Найдите площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе. 2).

28. **Вспомогательные подобные треугольники.** На боковых сторонах $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ отмечены точки $M$ и $N$ соответственно, причем $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{3}{2}$. Найдите $MN$, если $BC = a$ и $AD = b$.
29. **Вспомогательные подобные треугольники.** Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции, если основания трапеции равны $a$ и $b$.
30. **Вспомогательные подобные треугольники.** В трапеции $ABCD$ основание $AB = a$, основание $CD = b$ ($a < b$). Окружность, проходящая через вершины $A$, $B$ и $C$, касается стороны $AD$. Найдите диагональ $AC$.
31. **Вписанный четырехугольник. Подобие.** В треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$. 1) Докажите, что треугольник $ABC$ подобен треугольнику $AB_1C_1$. Укажите коэффициент подобия. 2) Найдите отношение площадей треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$, если $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.
32. **Вписанный четырехугольник. Признак и свойство.** На сторонах $BC$, $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$ взяты точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $AB_1C_1$, $A_1BC_1$ и $A_1B_1C$ пересекаются в одной точке.
33. **Подобие в окружности.** Две окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Точка $O_1$ — центр $\omega_1$, $O_2$ — центр $\omega_2$. Точка $C \in \omega_1$, $D \in \omega_2$, так что $B$ лежит на отрезке $CD$. 1) Доказать, что треугольники $CAD$ и $O_1AO_2$ подобны; 2) $O_1A = 5$, $O_2A = 12$, $AC = 9$, $\angle CAD = 90°$. Найдите $CD$.
34. **Подобие в окружности.** Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $K$. Известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите $AC$.
35. **Подобие в окружности.** В окружности с центром $O$ проведены хорды $AB$ и $CD$, пересекающиеся в точке $M$, причём $AM = 4$, $MB = 1$, $CM = 2$. Найдите угол $OMC$.
36. **Квадрат касательной и секущие к окружности.** В квадрат $ABCD$ со стороной $a$ вписана окружность, которая касает-

ся стороны $CD$ в точке $E$. Найдите хорду, соединяющую точки, в которых окружность пересекается с прямой $AE$.

37. **Квадрат касательной и секущие к окружности.** В треугольнике $ABC$ сторона $BC$ равна 4, а медиана, проведённая к этой стороне, равна 3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку $A$ и касается $BC$, причём одна касается $BC$ в точке $B$, а вторая — в точке $C$.

38. **Секущие к окружности.** Окружность, построенная на стороне $AC$ треугольника $ABC$ как на диаметре, проходит через середину стороны $BC$ и пересекает в точке $D$ продолжение стороны $AB$ за точку $A$, причём $AD = \frac{2}{3}AB$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $AC = 1$.

39. **Вспомогательная окружность.** На стороне $AB$ квадрата $ABCD$ построен внешним образом прямоугольный треугольник $ABP$, $\angle P = 90^\circ$, $AP = 5$, $BP = 6$. 1) Биссектриса угла $APB$ пересекает сторону $CD$ в точке $Q$. Найдите отношение $CQ : QD$. 2) Пусть $O$ — центр квадрата $ABCD$. Найдите $PO$. 3).

40. **Вспомогательная окружность.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной $C$, если $AB = c$ и $\angle C = 120^\circ$.

41. **Вспомогательная окружность.** 1) Треугольник $ABC$ — равносторонний со стороной $a$. На расстоянии $a$ от вершины $A$ взята точка $D$. Найдите величину угла $BDC$. 2) $BE$ и $CF$ — биссектрисы треугольника $ABC$, в котором $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите $\angle BEF$.

42. **Вспомогательная окружность.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы $A$, $B$ и $C$ соответственно равны $60^\circ$, $150^\circ$ и $45^\circ$. Кроме того, $AB = BC$. Докажите, что треугольник $ABD$ — равносторонний.

43. **Биссектрисы пересекаются в одной точке. Вписанный четырехугольник.** В треугольнике $ABC$: $\angle A = \alpha$, биссектрисы внешних углов при вершинах $B$ и $C$ пересекаются в точке $Q$. 1) Найдите $\angle BQC$. 2) Докажите, что $AQ$ является биссектрисой угла $A$.

44. **Вневписанные окружности.** 1) Докажите, что отрезок, соединяющий центры двух вневписанных окружностей тре-

угольника проходит через одну из его вершин. 2) Стороны треугольника равны $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Окружность касается стороны $BC$ треугольника $ABC$ и продолжений сторон $AB$ и $AC$. Найдите расстояние от вершины $A$ до точки касания окружности с прямой $AB$.

45. **Медианы. Неравенство треугольника. Площадь** 1) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник. 2) Две медианы треугольника имеют длины 8 см и 10 см. Найдите границы изменения третьей медианы треугольника. 3) Пусть третья медиана равна 6 см. Найдите площадь треугольника $ABC$.
46. **Вписанный четырехугольник. Вписанный и центральный угол.** Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается сторон $AB$, $BC$ и $CA$ соответственно в точках $K$, $L$ и $M$, $\angle BAC = \alpha$. 1) Найдите $\angle KLM$. 2) Биссектриса угла $A$ пересекает вписанную окружность в точках $P$ и $Q$. Найдите $\angle KPM$ и $\angle KQM$.
47. **Теорема Менелая.** На сторонах $AB$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ расположены точки $N$ и $M$ соответственно, причём $AN : NB = 3 : 2$, $BM : MC = 2 : 5$. Прямые $AM$ и $DN$ пересекаются в точке $O$. Найдите отношения $OM : OA$ и $ON : OD$.
48. **Теорема Менелая.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) на стороне $BC$ взята точка $D$ так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая $AD$ делит высоту $BE$ треугольника $ABC$, считая от вершины $B$?
49. **Теорема Чевы. Теорема Менелая.** 1) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противолежащих сторон и вписанной окружности, пересекаются в одной точке. 2) Точка $M$ — середина медианы $AD$ треугольника $ABC$. В каком отношении прямая $BM$ делит сторону $AC$?