Вступительная работа в 7 класс

Задача 1.

Вычислите

(a)

$$(3{,}618 : 1{,}8 - 2{,}1) \cdot \frac{5}{9} : (-0{,}02);$$

(b)

$$\left(2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} + 17\right) : \left(7\frac{2}{3} - 157\frac{4}{5} : \frac{24}{5}\right).$$

Ответ: **(a)** $2{,}5$; **(b)** $-\frac{4}{5}$.

Решение. **(a)**

$$(3{,}618 \overset{1}{:} 1{,}8 \overset{2}{-} 2{,}1) \overset{3}{\cdot} \frac{5}{9} \overset{4}{:} (-0{,}02);$$

1. $3{,}618 : 1{,}8 = 2{,}01$;
2. $2{,}01 - 2{,}1 = -0{,}09$;
3. $-0{,}09 \cdot \frac{5}{9} = -0{,}05$;
4. $-0{,}05 : (-0{,}02) = 2{,}5$.

(b)

$$\left(2\frac{3}{8} \overset{1}{:} \frac{3}{4} \overset{2}{+} 17\right) \overset{5}{:} \left(7\frac{2}{3} \overset{4}{-} 157\frac{4}{5} \overset{3}{:} \frac{24}{5}\right);$$

1. $2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$;
2. $3\frac{1}{6} + 17 = 20\frac{1}{6} = \frac{121}{6}$;
3. $157\frac{4}{5} : \frac{24}{5} = \frac{263}{8}$;
4. $7\frac{2}{3} - \frac{263}{8} = -\frac{605}{24}$
5. $\frac{121}{6} : \left(-\frac{605}{24}\right) = -\frac{4}{5}$.

$\square$

Задача 2. Решите уравнение

(a)

$$\frac{3}{8}(x-3)-\frac{1}{12}(2x-5)=2;$$

(b)

$$|1-x|=2{,}7;$$

(c)

$$\frac{x-3{,}2}{2x+1{,}4}=\frac{0{,}09}{0{,}27};$$

(d)

$$(2x+6{,}57)(|3x|+14)(x^2-121)=0.$$

Ответ: **(a)** 13; **(b)** $-1{,}7$; 3,7 **(c)** 11; **(d)** $-3{,}285$; ± 11.

Решение.

(a)

$$\frac{3}{8}(x-3)-\frac{1}{12}(2x-5)=2;$$

$$\frac{3}{8}x-\frac{9}{8}-\frac{1}{6}x+\frac{5}{12}=2;$$

$$\frac{5}{24}x=\frac{65}{24};$$

$$x=13.$$

(b)

$$|1-x|=2{,}7;$$

Если $x\leqslant 1$, то $1-x\geqslant 0$. Получается уравнение

$$1-x=2{,}7;$$

$$x=-1{,}7.$$

Если $x>1$, то $1-x<0$. Получается уравнение

$$x-1=2{,}7;$$

$$x=3{,}7.$$

(c)

$$\frac{x-3{,}2}{2x+1{,}4}=\frac{0{,}09}{0{,}27}=\frac{1}{3};$$

Заметим, что $2x+1{,}4\neq 0$, то есть $x\neq -0{,}7$.

$$3(x-3{,}2)=2x+1{,}4;$$

$$3x - 9{,}6 = 2x + 1{,}4;$$

$$x = 11.$$

(d)

$$(2x + 6{,}57)(|3x| + 14)(x^2 - 121) = 0.$$

Чтобы найти все x, при которых левая часть уравнения равна нулю, надо найти все x, при которых зануляется хотя бы одна из трёх скобок.

Первое уравнение

$$2x + 6{,}57 = 0;$$

$$x = -3{,}285.$$

Второе уравнение

$$|3x| + 14 = 0;$$

$$|3x| = -14.$$

Решений нет.

Третье уравнение

$$x^2 - 121 = 0;$$

$$x = \pm 11.$$

□

Задача 3. В комнате размерами 6×8 метров положили два квадратных ковра: 4×4 и 5×5 метров. Ковры примыкают к двум противоположным углам комнаты. Вычислите площадь пола, непокрытого коврами.

Ответ: 10 м^2.

Решение. Заметим, что ковры пересекаются: сумма их сторон больше обеих сторон комнаты: $4+5 > 8 > 6$. На рисунке 1 схематично нарисовано расположение ковров в комнате. Из рисунка следует, что непокрыты коврами два прямоугольника $c \times d$ и $a \times b$.

Вычислим a, b, c, d:

$$a = 8 - 4 = 4;$$

$$b = 6 - 5 = 1;$$

$$c = 8 - 5 = 3;$$

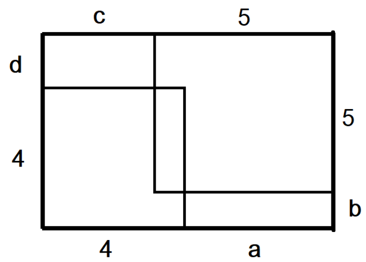

Рис. 1: высота комнаты 6, длина 8

$$d = 6 - 4 = 2.$$

Итого: непокрыто $cd + ab = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10.$ $\square$

Задача 4. В течение 45 минут катер плыл по течению реки, затем он развернулся и плыл ещё 1 час 15 минут. Всего катер проплыл 43 км. Чему равна скорость катера, если его скорость по течению на 20% больше его скорости против течения?

Ответ: 22 км/час.

Решение. Обозначим собственную скорость катера за $v_{\text{катер}}$ км/мин, а скорость течения за $v_{\text{течения}}$ км/мин. Составим уравнения из 1 и 2 условия:

$$45(v_{\text{катер}} + v_{\text{течения}}) + 75(v_{\text{катер}} - v_{\text{течения}}) = 43;$$

$$v_{\text{катер}} + v_{\text{течения}} = 1{,}2(v_{\text{катер}} - v_{\text{течения}}).$$

Приводим подобные во втором уравнении:

$$2{,}2 \cdot v_{\text{течения}} = 0{,}2 \cdot v_{\text{катер}};$$

$$11 v_{\text{течения}} = v_{\text{катер}}.$$

Подставляем в 1 уравнение скорость катера:

$$45(12 v_{\text{течения}}) + 75(10 v_{\text{течения}}) = 43;$$

$$45(12 v_{\text{течения}}) + 75(10 v_{\text{течения}}) = 43;$$

$$1290 v_{\text{течения}} = 43;$$

$$v_{\text{течения}} = \frac{1}{30}\text{ км/мин} = 2\text{ км/час.}$$

Итого, $v_{\text{катера}} = 22$ км/час.

□

Задача 5. В арифметическом примере заменили цифры на буквы. Разные цифры были заменены на разные буквы, а одинаковые цифры — на одинаковые буквы.

$$\text{Р} : \text{О} = \text{Л},\text{ЛЕР}.$$

Восстановите пример. (Необходимо найти все ответы и доказать, что других нет.)

Ответ: решений нет.

Решение. Умножим обе части на 1000 и О.

$$1000 \cdot \text{Р} = \text{О} \cdot \text{ЛЛЕР}.$$

Заметим, что Р $\neq 0$ (нулю), а значит ЛЛЕР не делится на 10. Предположим, что ЛЛЕР чётно. Тогда оно не кратно 5, тогда О кратно 125, такого быть не может при цифре О $\neq 0$.

Если ЛЛЕР нечётно, то О делится на 8 и потому равно 8. ЛЛЕР делится на 5 и нечётно, то есть заканчивается на 5, Р $= 5$. Следовательно, ЛЛЕР $= \frac{1000\cdot 5}{8} = 625$. Но ЛЛЕР $\neq 625$ по правилам ребуса. Поэтому решений нет.

□

Задача 6. В каждой клетке таблицы 5×5 написана фраза: «Ровно в половине соседних клеток написана правда.» Какое наибольшее количество правдивых реплик может быть написано? (Клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону.)

Ответ: 8.

Решение. Клетки, которые находятся у края, но не в углу таблицы, имеют по 3 соседних клетки, что не делится на 2. Поэтому в них точно не может быть написана правда. Тогда и в угловых клетках, соседями которых являются крайние, тоже написана ложь (потому что во всех их соседях написана ложь).

Остаются 9 клеток в центре. Все они не могут содержать правдивую реплику, потому что тогда у центральной клетки все 4 соседа с правдивыми утверждениями. Поэтому наибольшее число правдивых реплик — 8.

8 правдивых реплик может быть, если на всех крайних, угловых и в центральной клетке утверждения ложны, а в остальных 8 — правдивы. □