Школа № 444

Вступительная работа в 8 класс

Задача 1.

(a) Вычислите

$$(-0,7)^3 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^5 \cdot (-35)^3.$$

(b) Разложите на множители

$$\frac{11x^4y}{5} - \frac{21x^3}{5} + 11xy^2z - 21yz.$$

Ответ: **(a)** $-\frac{7}{8}$; **(b)** $\left(\frac{x^3}{5} + yz\right) \cdot (11xy - 21)$.

Решение.

(a)

$$(-0,7)^3 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^5 \cdot (-35)^3 = -\left(\frac{7^3}{2^3 \cdot 5^3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7^5}\right) \cdot \left(-\frac{7^3 \cdot 5^3}{1}\right) = -\frac{7}{2^3} = -\frac{7}{8}.$$

(b)

$$\frac{11x^4y}{5} - \frac{21x^3}{5} + 11xy^2z - 21yz = \frac{x^3}{5}(11xy - 21) + yz(11xy - 21) = \left(\frac{x^3}{5} + yz\right) \cdot (11xy - 21).$$

□

Задача 2. Решите уравнение

(a)

$$\frac{2x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{3x-5}{4};$$

(b)

$$(-x-7)^2 - (x+7)(7-x) = 0;$$

(c)

$$3^{2x-1} = 1;$$

(d)

$$(5x-4)^3 + 5x = 4.$$

Ответ: **(a)** $\frac{13}{5}$; **(b)** -7; 0; **(c)** $\frac{1}{2}$; **(d)** $\frac{4}{5}$.

Решение.

(a)

$$\frac{2x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{3x-5}{4} \quad | \cdot 12$$

$$8x-4x-2=9x-15;$$

$$x=\frac{13}{5}.$$

(b)

$$(x+7)^2-(x+7)(7-x)=0;$$

$$(x+7)(x+7-7+x)=0;$$

$$x=-7 \text{ или } x=0.$$

(c)

$$3^{2x-1}=1=3^0;$$

$$2x-1=0;$$

$$x=\frac{1}{2}.$$

(d)

$$(5x-4)^3+5x-4=0;$$

$$(5x-4)((5x-4)^2+1)=0.$$

Заметим, что правая скобка при всех x принимает строго положительные значения, так как она является суммой квадрата и единицы.

Приравняв левую скобку к нулю, получаем решение

$$x=\frac{4}{5}.$$

□

Задача 3. По расписанию рейсовый автобус доезжает из города А в город Б за 7 часов. Но в этот раз, проехав половину пути, он увеличил скорость на 20 км/ч, поэтому приехал на час раньше. Найдите первоначальную скорость автобуса.

Ответ: 50 км/ч.

Решение. Первую половину пути автобус проехал за 3,5 часа, так как с первоначальной скоростью весь путь он проезжал за 7 часов. Значит вторую половину пути с новой скоростью он проехал за 2,5 часа.

Пусть S км — расстояние от города А до города Б, v км/ч — первоначальная скорость автобуса, тогда новая скорость $v+20$ км/ч.

Запишем уравнения

$$v \cdot 7 = S;$$

$$(v + 20) \cdot 2{,}5 = \frac{S}{2}.$$

Подставив значение S из первого уравнения во второе, получаем

$$(v + 20) \cdot 2{,}5 = v \cdot 3{,}5;$$

откуда $v = 50$ км/ч. □

Задача 4. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых, задаваемых уравнениями $3x - y = 2$ и $2y + 3x = 5$, и параллельной графику уравнения $2(x - y - 2) = 5 - 2(x + 1)$.

Ответ: $y = 2x - 1$.

Решение. Найдем точку, через которую должна проходить наша прямая. Для этого решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 2y + 3x = 5. \end{cases}$$

Умножим уравнение $3x - y = 2$ на 2, получим $6x - 2y = 4$.

Сложим с уравнением $2y + 3x = 5$, получим $9x = 9$, откуда $x = 1$, $y = 3x - 2 = 1$. То есть прямые пересекаются в точке $(1, 1)$.

Выразим y из уравнения $2(x - y - 2) = 5 - 2(x + 1)$, получим $y = 2x - 3{,}5$. У параллельных прямых совпадают угловые коэффициенты, поэтому искомая прямая имеет вид

$$y = 2x + b.$$

Подставляем точку $(1, 1)$, откуда $b = -1$. Значит искомое уравнение

$$y = 2x - 1.$$

□

Задача 5. На стороне AD и диагонали BD квадрата $ABCD$ выбраны точки K и M соответственно. Известно, что $BM = CD$, $BMK = 90°$.
Докажите, что **(a)** $MK = MD$; **(b)** $AK = MD$.

Решение.

(a) Поскольку $ABCD$ квадрат, $\angle ABD = \angle BDA = 45°$. Рассмотрим четырехугольник $ABMK$, сумма углов четырехугольника равна 360°. Нам известно, что $\angle BAK = \angle BMK = 90°$, значит $\angle ABM + \angle AKM = 180°$. Кроме того, $\angle MKD + \angle AKM = 180°$, следовательно $\angle ABM = \angle MKD = 45°$.
$\angle MKD = \angle MDK = 45°$, значит треугольник MDK равнобедренный и $MK = MD$.

(b) Проведем отрезок BK. Заметим, что прямоугольные треугольники ABK и MBK равны по катету и гипотенузе. Отсюда получаем, что $AK = KM$. И воспользовавшись утверждением из предыдущего пункта задачи, получаем требуемое утверждение.

□

Задача 6. В каждой клетке таблицы 5×5 написана фраза: «Ровно в половине соседних клеток написана правда.» Какое наибольшее количество правдивых реплик может быть написано? (Клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону.)

Ответ: 8.

Решение. Клетки, которые находятся у края, но не в углу таблицы, имеют по 3 соседних клетки, что не делится на 2. Поэтому в них точно не может быть написана правда. Тогда и в угловых клетках, соседями которых являются крайние, тоже написана ложь (потому что во всех их соседях написана ложь).

Остаются 9 клеток в центре. Все они не могут содержать правдивую реплику, потому что тогда у центральной клетки все 4 соседа с правдивыми утверждениями. Поэтому наибольшее число правдивых реплик — 8.

8 правдивых реплик может быть, если на всех крайних, угловых и в центральной клетке утверждения ложны, а в остальных 8 — правдивы. □