Школа № 444

Вступительная работа в 9 класс

Задача 1. Упростите выражение

$$\left(\frac{x-y}{xy}+\frac{3x+y}{x^2-xy}+\frac{3y+x}{xy-y^2}\right):\frac{2(x+y)}{xy}+\frac{2x}{y-x};$$

Ответ: -1.

Решение.

$$\left(\frac{x-y}{xy}+\frac{3x+y}{x^2-xy}+\frac{3y+x}{xy-y^2}\right):\frac{2(x+y)}{xy}+\frac{2x}{y-x}=$$

$$=\left(\frac{x-y}{xy}+\frac{3x+y}{x(x-y)}+\frac{3y+x}{y(x-y)}\right):\frac{2(x+y)}{xy}+\frac{2x}{y-x}=$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2+3xy+y^2+3xy+x^2}{xy(x-y)}:\frac{2(x+y)}{xy}+\frac{2x}{y-x}=$$

$$=\frac{2(x+y)^2\cdot xy}{2xy(x-y)(x+y)}+\frac{2x}{y-x}=\frac{x+y}{x-y}-\frac{2x}{x-y}=\frac{y-x}{x-y}=-1$$

□

Задача 2. Решите уравнение

(a)

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4};$$

(b)

$$(x^2+5x)^2-3(x^2+5x)-18=0;$$

Ответ:

(a) $-\frac{3}{2}$; **(b)** -6; 1; $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Решение.

(a)

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}.$$

Заметим, что $x\neq\pm2$. Домножим обе части на $(x-2)(x+2)$.

$$(x-1)(x-2)+x(x+2)=8;$$

$$x^2-3x+2+x^2+2x=8;$$

$$2x^2-x-6=0;$$

Из формулы решения квадратного уравнения получаем два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{3}{2}$. Но как было сказано в самом начале решения $x \neq \pm 2$. Таким образом, нам подходит только один корень $x = -\frac{3}{2}$.

(b)

$$(x^2 + 5x)^2 - 3(x^2 + 5x) - 18 = 0.$$

Сделаем замену. Пусть $t = x^2 + 5x$. Получаем уравнение

$$t^2 - 3t - 18 = 0.$$

Из формулы решения квадратного уравнения получаем два корня: $t_1 = 6$ и $t_2 = -3$. Остаётся решить два квадратных уравнения.

Первое уравнение

$$x^2 + 5x = 6;$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -6.$$

Второе уравнение

$$x^2 + 5x = -3;$$

$$x^2 + 5x + 3 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

□

Задача 3. Вычислите

(a)

$$\frac{\sqrt{2{,}8} \cdot \sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}};$$

(b)

$$\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}}.$$

Ответ: **(a)** 7; **(b)** 2.

Решение.

(a)

$$\frac{\sqrt{2{,}8} \cdot \sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}} = \sqrt{\frac{2{,}8 \cdot 4{,}2}{0{,}24}} = \sqrt{49} = 7.$$

(b)

$$\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}=\left(\sqrt{\frac{27}{7}}-\sqrt{\frac{12}{7}}\right)\cdot\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{27}-2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=6-4=2.$$

□

Задача 4. Чтобы подковать 21 лошадь подмастерье тратит на 1 день больше, чем мастер на то, чтобы подковать 42 лошади. Сколько лошадей в день может подковать подмастерье, если известно, что за один день мастер успевает подковать на 4 лошади больше?

Ответ: 3 лошади.

Решение. Пусть подмастерье может подковать x лошадей за день, тогда мастер может подковать $x+4$ лошади за день. На то, чтобы подковать 21 лошадь, подмастерье потратит $\frac{21}{x}$ дней; а на 42 лошади мастер потратит $\frac{42}{x+4}$ дней. Но по условию вторая величина 1 меньше, чем первая. Получается уравнение

$$\frac{21}{x}=\frac{42}{x+4}+1.$$

Домножим обе части на $x(x+4)$. Тогда

$$21(x+4)=42x+x(x+4);$$

$$21x+84=42x+x^2+4x;$$

$$x^2+25x-84=0.$$

Воспользуемся формулой решения квадратного уравнения и найдём два корня: $x_1=3$ и $x_2=-\frac{84}{3}$. Отрицательный корень, очевидно, нам не подходит. □

Задача 5. Точка M — середина стороны AD четырехугольника $ABCD$. Известно, что $AC=2CM$, $\angle BCA=25°$, $\angle ACM=40°$, $\angle CDA=45°$. Докажите, что $BC||AD$.

Решение. На луче CM за точкой M отметим точку K такую, что $CM=MK$. Заметим, что $ACDK$ — параллелограмм, так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Поэтому $\angle KAD=\angle CDA=45°$.

Заметим, что $AC=2CM=CK$. Следовательно, треугольник ACK — равнобедренный, и мы можем найти угол CAK по сумме углов треугольника. Он равен $70°$.

Получаем

$$\angle BCA=25°=70°-45°=\angle CAK-\angle DAK=\angle CAD.$$

А это равносильно параллельности прямых BC и AD. □

Задача 6. На острове проживает 2019 аборигенов, каждый из которых либо всегда говорит правду (рыцарь), либо всегда обманывает (лжец), причѐм они не все лжецы. Путешественник хочет узнать количество рыцарей на этом острове. Ему разрешено один раз в день собирать на берегу любую группу островитян, каждый из которых напишет количество рыцарей среди собравшихся. За какое наименьшее число дней путешественник сможет выяснить точное число рыцарей?

Ответ: за 2 дня.

Решение. Сначала докажем, что за 1 день он не справится. Если он соберет не всех людей, то какими бы ни были ответы, он ничего не узнает о тех, кого он не собрал (они могут быть как все рыцарями, так и все лжецами).
Если же он соберет всех аборигенов, то не во всех случаях он сможет узнать число рыцарей. Допустим, путешественник увидел 1009 ответов «1009» и 1010 ответов «1010». Тогда рыцарей может быть как 1009, так и 1010.

Теперь покажем, как определить за 2 дня. В первый день нужно собрать всех людей. Они дадут несколько типов ответов (например, несколько человек скажут «1 рыцарь», несколько «4 рыцаря» и т.д.). Так как среди аборигенов есть рыцарь, то одно из этих значений правдиво. На второй день возьмем группу, в которую будут входить по 1 представителю каждого ответа. Так как среди этих ответов будет ровно 1 верный, то в такой группе будет ровно 1 рыцарь. Поэтому тот человек, который во второй день ответит «1 рыцарь» — рыцарь. А то количество, которое он написал в первый день, и есть верное. □