



Осенняя лицейская олимпиада «Физтех-лицея» имени П.Л. Капицы

11 класс

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{3(\cos x + \sin x) - 3}$$

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\log_{(x^2+y^2)}(x+y) > 1$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-1}(4^{\log_3 x} - 6x^{\log_3 2} + 10) \leq 0$$

4. Любитель коктейлей Игнат смешал 300 мл морковного сока с 200 мл сливок. Тщательно перемешав полученную смесь, Игнат попробовал её на вкус и решил, что сливок оказалось слишком много. Игнат налил в полулитровый графин 200 мл морковного сока, а оставшиеся 300 мл заполнил приготовленной смесью. Каково процентное содержание сливок в полученном напитке?

5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $2\sqrt{10}$, высота призмы равна $2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью BCM , где M - середина ребра A_1C_1 является прямоугольной трапецией.

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM , где M - середина ребра A_1C_1 .

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

7. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M . Найдите BD , если известно, что $AM = MC = 1$.