

УТВЕРЖДАЮ



Директор АНОО

«Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

М.Г. Машкова

2022г.

**ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ
КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

МАТЕМАТИКА

10 класс

(физико-химический, химико-биологический профили)

Алгебра

1. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}105^\circ$
2. Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) + 6 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Найдите $\operatorname{ctg} \beta$
3. Решите уравнение:
$$\frac{2 \cdot \cos 3x - \cos 5x}{|\cos 3x|} = 1$$
4. а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$
5. Решите неравенства и найдите их общее решение:
а) $\log_2^2 x + 5 \log_2 x + 6 > 0$
б) $16^{x+\frac{1}{4}} - 9 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} + 1 \geq 0$
в) $\frac{2x^2 - 2x + 1}{2x - 1} \leq 1$
6. Вычислите пределы:
а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{x}\right)^{3x}$
б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$
в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x);$
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x}$
7. Исследуйте функцию и постройте график:
$$f(x) = \frac{(x+2)^3}{x^2}$$

Укажите количество решений уравнения $f(x) = a$ при каждом значении a .

8. а) Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{-x^2+2x-2}$
 б) Найдите точку максимума функции $y=x^3+12x^2+13$
 в) Найдите критические точки функции $f(x) = x + \frac{4}{x}$ и среди них укажите точку максимума
 г) Найдите наименьшее значение функции $f(x)=(x-3)^2(x-6)-5$ на отрезке $[4; 10]$
9. Определите все такие значения параметра b , при которых касательная к графику функции $y = x^4 - bx^2 + 3x - 13$, проведенная в его точке с абсциссой 1, имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Геометрия

1. Дана треугольная пирамида $SABC$. Точка P делит ребро SB в отношении $1 : 5$, считая от вершины S , точка Q делит ребро AS в отношении $3 : 2$, считая от вершины S , точка R – середина грани ABC . Найдите в каком отношении плоскость PQR делит ребро BC .
2. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.
 а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.
 б) Найдите угол между прямыми BF_1 и CD_1 .
3. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основание которой – параллелограмм $ABCD$. Точка K – середина медианы SM грани CSD , N – середина ребра AB .
 а) Постройте точку пересечения прямой KN с плоскостью ASC .
 б) Найдите угол между прямой KN и плоскостью ASC , если пирамида правильная, а ее боковые грани образуют с плоскостью основания углы, равные $\pi/3$.
4. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 8. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .
5. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=1:2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB=1:5$, а точка T – середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB=3$, $AD=6$, $AA_1=18$
 а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1
 б) Найдите угол между плоскостями EFT и AA_1B_1
6. а) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Точка K – середина ребра BC . Найдите расстояние между прямыми AC и C_1K
 б) В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ высота PO вдвое больше стороны основания $ABCD$. Найдите расстояние между прямыми AB и PC , если сторона основания пирамиды равна 17.
7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 14, высота SH равна 24. Точка K – середина бокового ребра SD , а точка N – середина CD . Плоскость (AKB) пересекает боковое ребро SC в точке P .
 а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.
 б) Найдите расстояние от точки P до плоскости (SAB)

8. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 10, основание BC равно 2, а биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найти площадь трапеции.

9. Окружности C_1 и C_2 радиусов 4 и 9 касаются прямой m в точках A и B . Найти радиус окружности, касающейся окружностей C_1 и C_2 , а также прямой m между точками A и B , если $AB = 10$.

10. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , причем $AD = 1,6AB$. На стороне CD взята точка M . Известно, что $DM:MC = 2:5$. Докажите, что прямая BM разбивает треугольник ACD на две фигуры, площади которых относятся как 5:6. Найдите площадь четырехугольника $AFMD$, где F - точка пересечения прямой BM с диагональю AC , если высота трапеции равна 14, а отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей параллельно ее основаниям, равен 60.