Урок 30. Матрицы и многомерные пространства в машинном обучении

9 класс · Урок 30 из 34 · 45 минут

Вся программа 9 класса

Матрицы в машинном обучении. На уроке для 9 класса сравниваем матрицы признаков, пикселей и весов, строим проекции и проводим границы решений.

Содержание урока

- 01. Цель урока
- 02. Ход урока
- 03. Этап 1. Вступление: Совпали на экране
- 04. Этап 2. Три смысла одной таблицы
- 05. Этап 3. Что потерял плоский вид
- 06. Этап 4. Граница для новых макетов
- 07. Этап 5. Проверяем понимание

01. Цель урока

Разобраться, как матрицы позволяют хранить и преобразовывать данные и почему на плоской картинке можно потерять важный признак.

02. Ход урока

Этап	Время
1. Вступление: Совпали на экране	6 мин
2. Три смысла одной таблицы	10 мин
3. Что потерял плоский вид	9 мин
4. Граница для новых макетов	15 мин
5. Проверяем понимание	5 мин
Всего	45 мин

03. Этап 1. Вступление: Совпали на экране 6 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

На выставке ученики отбирают макеты башен для проверки устойчивости. На диаграмме отмечены высота и масса. Два макета попали в одну точку, но у одного узкое основание, а у другого широкое. Как показать различие, которое исчезло на экране?

Проверим, как матрицы используют в машинном обучении и что можно узнать из многомерного представления данных.

04. Этап 2. Три смысла одной таблицы 10 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

В диаграмме два макета совпали, потому что на осях оставили только высоту и массу. Добавим ширину основания третьей координатой. Теперь каждая башня — точка в пространстве с тремя осями. Если признаков четыре или десять, координат будет четыре или десять. Рисовать все оси одновременно сложно, а хранить и сравнивать координаты по-прежнему можно.

Сложим векторы четырёх башен в матрицу. Матрица — прямоугольная таблица чисел. В матрице примеров каждая строка описывает один макет, а каждый столбец хранит один признак. Если строк четыре и признаков три, размер — четыре на три. У матрицы пикселей другие правила: строка и столбец означают место на изображении, а число в ячейке задаёт яркость. Если в ней переставить две строки, поменяется рисунок.

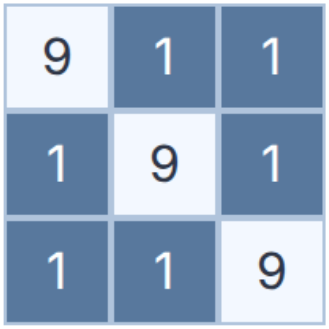
В модели матрица может хранить веса, с помощью которых из признаков получают новые числа. Допустим, из трёх входных признаков хотим получить две оценки. У каждой оценки своя тройка весов. Соберём две тройки в матрицу размером два на три. Каждый признак умножаем на вес, который стоит на том же месте, затем складываем результаты. Получаем две оценки из трёх входов. В настоящих моделях веса часто подбирают по данным.

На схеме первая строка весов даёт двойной вклад первого числа, обычный вклад второго и пропускает третье. Для учебного входа (1, 2, 3) получится 2 × 1 + 1 × 2 + 0 × 3 = 4. По второй строке выйдет 0 × 1 + 1 × 2 + 3 × 3 = 11. Если один признак измеряют в граммах, а другой в сантиметрах, их шкалы часто сначала приводят к сопоставимому виду. Здесь маленькие числа взяты, чтобы было видно саму операцию.

Данные о башнях

Высота	Масса	Основание
24	180	8
24	180	12

Яркость изображения



Веса для двух оценок

К первому	Ко второму	К третьему
2	1	0
0	1	3

Назначение таблицы определяет смысл её строк, столбцов и значений.

Для учителя

Укажите на одну ячейку в каждом изображении и спросите, что значит её положение. Затем проследите на схеме один расчёт оценки. Позже покажите границу ширины на диаграмме.

05. Этап 3. Что потерял плоский вид 9 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

Проекция на две оси показывает, как выглядит набор точек, если оставить только два признака. Если у двух башен совпадают эти признаки, точки сольются. Поэтому выбор осей зависит от вопроса. Чтобы сравнить ширину оснований у макетов одной высоты, оставьте высоту и ширину основания.

Опыт. Одна таблица, два вида

На карточке четыре макета. Нарисуйте две диаграммы: на одной оставьте высоту и массу, на другой — высоту и ширину основания. Отметьте буквами, какие точки слились на каждом рисунке. Затем предложите, какой вид показать человеку, который проверяет макеты только на соответствие ширине полки.

Макет	Высота, см	Масса, г	Ширина основания, см
А	24	180	8
Б	24	180	12
В	24	220	8
Г	30	180	10

Для учителя

При высоте и массе совпадают А и Б. При высоте и ширине основания совпадают А и В. Для полки нужен вид, где есть ширина основания, если выступающих частей нет. Попросите назвать признак, который можно было бы добавить для макета с выступом.

06. Этап 4. Граница для новых макетов 15 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

Если решение зависит от двух признаков, границу на рисунке иногда можно провести прямой. С одной стороны модели будут проходить проверку, с другой — отправляться на доработку. В трёх измерениях такой же границей может быть плоскость. При большем числе признаков её аналог называют гиперплоскостью. Мы не увидим её целиком, зато правило сравнения можно записать и применять к новым точкам.

Например, условие «ширина = 11» задаёт плоскость. На ней высота и масса могут быть любыми, а ширина всегда одинакова. По разные стороны лежат более узкие и более широкие макеты. Если решению важны сразу высота и ширина, границу можно наклонить: тогда большей высоте соответствует другая требуемая ширина.

Задание. Придумайте правило допуска

У группы есть две цели: убрать макеты, которые не встанут на полку шириной 11 см, и отобрать модели для перевозки. Для перевозки команда согласна взять более высокий макет, если у него достаточно широкое основание. Придумайте два разных правила и примените их к макетам А–Г. Затем предложите макет, на котором эти правила дадут разные ответы. Запишите, когда стоит добавить ещё один признак.

Результат: два правила, предельный случай и объяснение, какие координаты использует каждое правило.

Для учителя

Одно правило: ширина не превышает 11 см, значит А, В и Г подходят. Для перевозки допустим пример границы «ширина не меньше половины высоты»: Б проходит по этому правилу, поскольку 12 см равны половине 24 см. А, В и Г по нему не проходят. Реальную устойчивость всех макетов определяют испытанием с учётом центра тяжести. Можно добавить массу, например если есть

ограничение тележки. Спросите, что изменится, если одновременно требовать соблюдения двух правил.

07. Этап 5. Проверяем понимание 5 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

Перед работой с числовой таблицей выясните, что обозначают её строки и столбцы. Тогда станет понятно, какую информацию она хранит и какая операция имеет смысл.

Главное за урок

- Матрица примеров собирает векторы с общим набором признаков.
- Матрица весов задаёт, как из входных признаков получают новые числа.
- Проекция показывает часть координат, поэтому отдельные точки могут совпасть.

Итоговые вопросы

1. В матрице 20 ученических работ по четырём признакам. Какого она размера?
2. Почему совпадение точек на рисунке не всегда означает, что объекты одинаковы?
3. Из пяти входов получают три линейные оценки. Сколько весов нужно каждой и какого размера будет матрица весов в принятой на уроке записи?

Для учителя

1. 20 × 4, если работы в строках. 2. Могли совпасть только показанные признаки. 3. Пять весов на оценку, три строки на пять столбцов.

Источники

- PyTorch. Как линейный слой применяет матрицу весов · Проверено 05.11.2026. «Applies an affine linear transformation to the incoming data» — слой использует матрицу весов и может прибавлять смещения.