Урок 32. Функции и градиентные методы оптимизации

9 класс · Урок 32 из 34 · 45 минут

Вся программа 9 класса

Градиентный спуск в машинном обучении. На уроке для 9 класса разбираем функции, потери и производную, затем сравниваем разные размеры шага.

Содержание урока

- 01. Цель урока
- 02. Ход урока
- 03. Этап 1. Вступление: Линия сместилась
- 04. Этап 2. Как ошибка превращается в график
- 05. Этап 3. Испытайте шаг и проверьте настройку
- 06. Этап 4. Проверяем понимание

01. Цель урока

Понять, как модель оценивает ошибку и почему направление и длина шага влияют на поиск удачных параметров.

02. Ход урока

Этап	Время
1. Вступление: Линия сместилась	5 мин
2. Как ошибка превращается в график	11 мин
3. Испытайте шаг и проверьте настройку	25 мин
4. Проверяем понимание	4 мин
Всего	45 мин

03. Этап 1. Вступление: Линия сместилась 5 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

На графическом планшете линия появляется правее пера. При проверке в двух точках смещение разное: два и шесть пикселей. Программа умеет сдвигать всю линию влево на одно и то же число пикселей. Как выбрать это число, если идеально совместить обе точки не получится?

На этом примере разберём функции, производную и градиентный спуск. Этот способ помогает подбирать параметры, когда сразу увидеть удачное значение трудно.

Для учителя

Попросите выдвинуть одно число и предложить проверку. Вернитесь к гипотезе после показа графика.

04. Этап 2. Как ошибка превращается в график 11 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

Обозначим сдвиг влево через p. Программа берёт исходную координату x и возвращает новую: $x - p$. Это функция, которая превращает вход в результат. Для выбранного сдвига мы можем отдельно посчитать, сколько пикселей ошибки осталось. Если взять $p = 3$, в первой точке уйдём на один пиксель левее нужного, а во второй останемся на три пикселя правее. Чтобы ошибки в разные стороны не погасили друг друга, возведём каждую в квадрат и возьмём среднее. Получим (1 + 9) / 2 = 5. Так мы задали функцию потерь. На входе у неё значение параметра, на выходе — число, которым оцениваем качество настройки.

График потерь показывает, что при сдвиге на четыре пикселя потери равны 4 и меньше всего для этих двух замеров. При сдвиге на два пикселя одна точка совпадёт точно, зато другая останется на четыре пикселя правее. Потери станут равны (0 + 16) / 2 = 8. Значит, совпадение в одной точке ещё не говорит, что вся линия настроена точно. В более сложной задаче весь график обычно заранее не виден. Можно начать с пробного параметра и узнать, как ведёт себя функция рядом с ним. Производная показывает местный наклон. Слева от минимума график идёт вниз вправо, наклон отрицательный. Справа он поднимается вправо, наклон положительный. Чтобы уменьшить потери, меняем параметр в сторону, противоположную знаку производной. Так устроен один шаг градиентного спуска.



Короткий шаг к минимуму уменьшает потери.

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

Размер изменения зависит от наклона и от выбранного множителя — скорости обучения. Маленькое значение даёт осторожные шаги. Слишком большое может перебросить параметр через минимум и даже увеличить ошибку. Для нескольких параметров градиент показывает наклон по каждому параметру. Например, для пера можно одновременно настраивать поправки по горизонтали и вертикали. Программа рассчитывает, как меняются потери при небольшом изменении каждой поправки, и обновляет обе.

Представьте, что увеличение поправки вправо уменьшает потери, а увеличение поправки вверх их повышает. Тогда по первой координате модель увеличит параметр, а по второй уменьшит. Если какой-то наклон почти нулевой, соответствующая поправка на этом шаге изменится мало. Поэтому можно настраивать несколько свойств сразу.

Для учителя

На графике сравните потери при сдвиге 2, 3 и 4, покажите, почему знак наклона справа другой, и пальцем проведите короткий шаг с каждой стороны. Журнал открывайте только после гипотез пар.

05. Этап 3. Испытайте шаг и проверьте настройку 25 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

В опыте старт у всех один, потери считаем по тем же двум замерам. Будем менять только скорость обучения. Так можно сравнить, какой путь быстрее улучшает настройку и какой ведёт себя устойчиво.

Лаборатория. Ставка на настройку

Пары получают одну задачу: из положения $p = 0$ за три шага попасть как можно ближе к четырём пикселям. Есть скорости 0,10, 0,35, 0,80 и 1,10. До просмотра результатов выберите две скорости и запишите, на какой из них будете полагаться. Объясните ход мысли.

1. Откройте журнал испытаний. Для каждой из двух скоростей отметьте, приближался ли сдвиг к четырём после каждого шага и переходил ли через минимум.
2. Обменяйтесь данными с парой, у которой была другая скорость. Выберите вариант для запуска. Назовите наблюдение, которое заставило вас изменить первоначальную ставку или оставить её.
3. Предложите ещё одну скорость или стартовую точку для повторного опыта. Назовите один показатель, по которому сравните результаты.

Журнал испытаний

Скорость	Старт	Шаг 1	Шаг 2	Шаг 3
0,10	0	0,80	1,44	1,95
0,35	0	2,80	3,64	3,89
0,80	0	6,40	2,56	4,86
1,10	0	8,80	−1,76	10,91

Результат: выбор скорости с обоснованием, описание движения по графику и следующий проверочный опыт. Достаточно сравнить три шага, полный ряд вручную вычислять не нужно.

Для учителя

Скорость 0,35 за три шага дала ближайшее к четырём значение. 0,80 переходит через минимум, но приближается к нему. 1,10 с каждым шагом уходит дальше. Журнал рассчитан по правилу $p_{\text{новое}} = p - \text{скорость} \times 2(p - 4)$, значения округлены только для показа. Отрицательный сдвиг в журнале означает, что программа сдвинула линию вправо. Отдельно обсудите: пересечение минимума

ещё не означает рост потерь. Рост видно по увеличению расстояния до четырёх в данном симметричном примере.

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

Мы нашли настройку для двух замеров. На других участках планшета сдвиг может отличаться. Перед тем как принять параметр, измерим его на новых точках. Если осталась закономерная ошибка, возможно, самой функции одной поправки уже не хватает.

Обсуждение. Следующий замер

На новых точках сверху линии почти совпали, а внизу ошибка больше. Предложите проверку, которая поможет понять, зависит ли ошибка от положения пера. Какой новый вход можно добавить в функцию поправки?

Для учителя

Можно проверить верх, середину и низ при одинаковой горизонтальной координате, повторить на нескольких вертикальных линиях и сравнить ошибки. Если зависимость повторяется, добавить вертикальную координату как вход для расчёта горизонтальной поправки. Подберите простую проверку, которую действительно можно повторить.

06. Этап 4. Проверяем понимание 4 мин

ГОВОРИМ УЧЕНИКАМ

Когда обучение идёт слишком медленно или ошибка растёт, полезно посмотреть на шаги. И всё же итог работы определяет то, как настройка ведёт себя на новых данных.

Главное за урок

- Функция потерь оценивает качество выбранных параметров.
- Производная задаёт местный наклон, а градиент объединяет наклоны для нескольких параметров.
- Шаг проверяют по тому, уменьшаются ли потери и насколько устойчиво это происходит.

Итоговые вопросы

1. В выбранной точке график растёт вправо. В какую сторону пойдёт один короткий шаг спуска?
2. Почему два перехода через минимум ещё не доказывают, что скорость слишком большая?

Для учителя

1. Влево. 2. Параметр может переходить через минимум и всё же приближаться к нему. Сравните потери или расстояния до минимума на последовательных шагах.

Источники

- Google. Функция потерь · Проверено 05.11.2026. В квадратичной функции разности между прогнозами и известными ответами возводят в квадрат.
- Google. Градиентный спуск · Проверено 05.11.2026. Параметры меняют с учётом градиента и скорости обучения, чтобы уменьшить потери.