



Сложная вероятность

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Свойства и базовые методы: задания 1-10

Задание 1

Два независимых прибора исправны с вероятностями 0,8 и 0,9. Найдите вероятность, что исправны оба.

Обозначим исправность через A и B . Независимость дана явно, поэтому $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$. Сложение относилось бы к альтернативным случаям, а здесь нужны оба события одновременно.

Ответ. 0,72.

Задание 2

Стрелок дважды независимо попадает в цель с вероятностью 0,7 в каждом выстреле. Найдите вероятность хотя бы одного попадания.

Противоположное событие - два промаха. Вероятность каждого промаха $1 - 0,7 = 0,3$, совместная вероятность $0,3^2 = 0,09$. Поэтому $P = 1 - 0,09 = 0,91$. В ответ включены и одно, и два попадания.

Ответ. 0,91.

Задание 3

В двух независимых испытаниях вероятность успеха каждый раз равна 0,6. Найдите вероятность ровно одного успеха.

Подходят два несовместимых пути: успех-неудача и неудача-успех. Их вероятности $0,6 \cdot 0,4$ и $0,4 \cdot 0,6$. Сумма равна 0,48. Два успеха не подходят; множитель 2 возникает из двух порядков, а не из числа испытаний сам по себе.

Ответ. 0,48.

Задание 4

События A и B несовместимы; $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$. Найдите $P(A \cup B)$ и определите, независимы ли эти события.

Несовместимость означает $P(A \cap B) = 0$. Поэтому $P(A \cup B) = 0,3 + 0,4 = 0,7$. Для независимости нужно $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, но $0 \neq 0,12$. Следовательно, события зависимы: наступление одного исключает другое.

Ответ. 0,7; зависимы.

Задание 5

В двух автоматах продают чай. Вероятность отсутствия чая в каждом равна 0,2; вероятность, что чая нет сразу в обоих, равна 0,18. Найдите вероятность наличия чая в обоих автоматах.

Пусть A и B - отсутствие чая в первом и втором автомате. Тогда $P(A \cup B) = 0,2 + 0,2 - 0,18 = 0,22$. Чай есть в обоих тогда и только тогда, когда не произошло ни A , ни B . Поэтому искомая вероятность $1 - 0,22 = 0,78$.

Независимость здесь неверна: $0,18 \neq 0,2^2$.

Ответ. 0,78.

Задание 6

Из 36-карточной колоды равновероятно выбрана карта. Известно, что это пиковая карта. В каждой масти девять карт, включая одного туза. Найдите вероятность, что выбрана карта «туз пик».

После сообщения о масти остаются девять равновозможных пиковых карт.

Подходит одна, значит, вероятность $\frac{1}{9}$. По определению условной вероятности получаем то же:

$$\frac{P(\text{туз пик})}{P(\text{пики})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{1}{9}.$$

Знаменатель 36 без учёта сообщения был бы неверен.

Ответ. $\frac{1}{9}$.

Задание 7

В урне три красных и два синих шара. Два шара последовательно выбирают случайно без возвращения. Найдите вероятность двух красных.

Первый красный выбирается с вероятностью $\frac{3}{5}$. При этом в урне остаются два красных из четырёх, поэтому условная вероятность второго красного $\frac{2}{4}$.

Получаем $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$. Проверка по неупорядоченным парам: $\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$. Выборы не независимы.

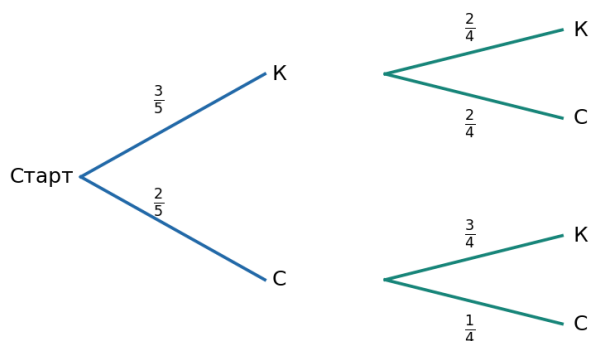
Ответ. $\frac{3}{10}$.

Задание 8

В урне три красных и два синих шара. Два шара последовательно выбирают случайно без возвращения. Найдите вероятность разных цветов.

Разные цвета дают два несовместимых пути: КС и СК. Их вероятности $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$ и $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$. Складывая, получаем $\frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{3}{5}$. Проверка: одинаковые цвета имеют вероятность $\frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$, дополнение равно $\frac{3}{5}$.

Ответ. $\frac{3}{5}$.



Исходно 3 красных и 2 синих. Разные цвета: пути КС и СК.

Задание 9

Система работает только при исправности обоих независимых узлов. Вероятности их исправности за рассматриваемое время равны 0,98 и 0,97. Найдите надёжность системы.



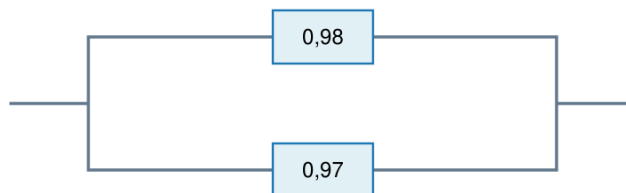
Последовательная система: требуется исправность обоих независимых узлов.

Последовательная схема означает пересечение событий исправности. Поэтому $R = 0,98 \cdot 0,97 = 0,9506$. Результат меньше надёжности каждого узла, как и должно быть: отказ любого узла останавливает систему.

Ответ. 0,9506.

Задание 10

Система работает, если исправен хотя бы один из двух независимых узлов. Вероятности исправности узлов равны 0,98 и 0,97. Найдите надёжность системы.



Параллельная система: для работы достаточно одной исправной ветви.

Параллельная система отказывает только при одновременном отказе обоих узлов. Вероятности отказа 0,02 и 0,03; их произведение 0,0006. Поэтому $R = 1 - 0,0006 = 0,9994$. Складывать 0,98 и 0,97 без вычитания пересечения нельзя.

Ответ. 0,9994.

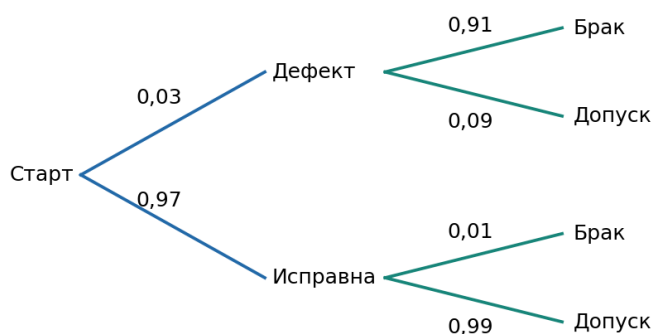
02. Полная вероятность и схема Бернулли: задания 11-16

Задание 11

Изготовленная батарейка неисправна с вероятностью 0,03. Контроль бракует неисправную батарейку с вероятностью 0,91, а исправную - с вероятностью 0,01. Найдите вероятность браковки случайной батарейки.

Разбиваем все батарейки на неисправные D и исправные $\bar{D}$. Вероятности путей к браковке B : $P(D \cap B) = 0,03 \cdot 0,91 = 0,0273$ и $P(\bar{D} \cap B) = 0,97 \cdot 0,01 = 0,0097$. Эти пути несовместимы и исчерпывают браковку. Следовательно, $P(B) = 0,0273 + 0,0097 = 0,037$.

Ответ. 0,037.



Контроль батарейки: сигнал браковки возможен и при исправной батарейке.

Задание 12

На склад поступает 60% изделий первого завода и 40% второго. Доля брака на первом заводе 2%, на втором 5%. Случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Найдите вероятность, что оно изготовлено вторым заводом.

Пусть D - брак, H_2 - второй завод. Полная вероятность брака $P(D) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,032 > 0$. Вероятность пути «второй завод и брак» равна 0,02. Среди всех бракованных доля этого пути равна

$P(H_2 | D) = \frac{0,02}{0,032} = \frac{5}{8} = 0,625$. Число 0,05 - другая условная вероятность, $P(D | H_2)$.

Ответ. 0,625.

Задание 13

Проводятся четыре независимых испытания с вероятностью успеха 0,8 в каждом. Найдите вероятность ровно трёх успехов.

В конкретном порядке три успеха и одна неудача имеют вероятность $0,8^3 \cdot 0,2$. Положение единственной неудачи выбирается четырьмя способами. Эти пути несовместимы, поэтому $P = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096$. Условия схемы Бернулли выполнены: независимость и одинаковая вероятность даны.

Ответ. 0,4096.

Задание 14

Проводятся четыре независимых испытания с вероятностью успеха 0,8 в каждом. Найдите вероятность не менее трёх успехов.

Число успехов равно 3 или 4. Случаи несовместимы, поэтому $P = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^4 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192$. Слова «не менее» включают три; случай четырёх успехов нельзя потерять.

Ответ. 0,8192.

Задание 15

Вероятность успеха в каждом из пяти независимых испытаний равна 0,3. Найдите вероятность ровно двух успехов.

Выбираем две успешные позиции: $C_5^2 = 10$. Для каждого такого расположения вероятность равна $0,3^2 \cdot 0,7^3$. Поэтому $P = 10 \cdot 0,09 \cdot 0,343 = 0,3087$. Множитель 10 учитывает все порядки и не учитывает ни один порядок дважды.

Ответ. 0,3087.

Задание 16

Три поставщика дают 50%, 30% и 20% продукции. Вероятности брака у них соответственно 0,01; 0,02; 0,04. Найдите вероятность брака случайного изделия со склада.

Принадлежность поставщику разбивает всю продукцию на три несовместимые группы; доли суммируются в 1. По полной вероятности $P(D) = 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,04 = 0,005 + 0,006 + 0,008 = 0,019$. Обычное среднее трёх процентов неверно, потому что объёмы поставок различны.

Ответ. 0,019.

03. Повторение пройденного: задания 17-20

Задание 17

Повторение. Из урны с пятью красными и четырьмя синими шарами одновременно равновероятно выбирают три отдельных шара. Найдите вероятность ровно двух красных.

Всего троек $C_9^3 = 84$. Благоприятную тройку образуют два из пяти красных и один из четырёх синих: $C_5^2 C_4^1 = 40$. Поэтому $P = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$. В обоих подсчётах порядок не учитывается; три красных не подходят.

Ответ. $\frac{10}{21}$.

Задание 18

Повторение. К 10 кг 20%-го раствора соли добавляют 50%-й раствор той же соли. Сколько килограммов надо добавить, чтобы получить 35%-й раствор? Потерь массы и вещества нет.

Пусть добавляют $x \geq 0$ кг. Масса соли первоначально 2 кг, добавлено $0,5x$ кг, итоговая масса $10 + x > 0$. Баланс соли: $2 + 0,5x = 0,35(10 + x)$. Отсюда $0,15x = 1,5$, $x = 10$. Проверка: 7 кг соли в 20 кг раствора дают 35%. Линейное уравнение имеет единственное решение, и оно физически допустимо.

Ответ. 10 кг.

Задание 19

Повторение. Решите неравенство $\log_3(x + 1) \leq 2$.

ОДЗ: $x + 1 > 0$, то есть $x > -1$. Основание $3 > 1$, поэтому логарифм возрастает и на ОДЗ неравенство равносильно $x + 1 \leq 3^2 = 9$, то есть $x \leq 8$. Пересечение условий даёт $-1 < x \leq 8$. Левый конец исключён из-за неопределённого логарифма, правый включён по равенству.

Ответ. $(-1; 8]$.



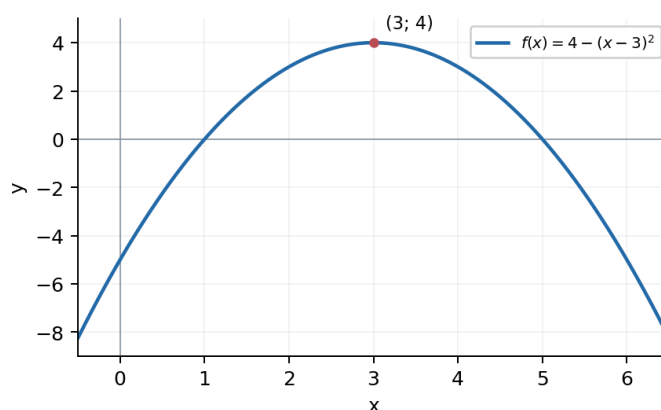
Решение логарифмического неравенства: -1 исключено, 8 включено.

Задание 20

Повторение. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ на всей числовой прямой и точку его достижения.

Выделим полный квадрат: $f(x) = 4 - (x - 3)^2$. Квадрат неотрицателен при любом действительном x , поэтому $f(x) \leq 4$. Равенство возможно тогда и только тогда, когда $x = 3$. Функция определена на всей прямой; других точек максимума нет.

Ответ. 4 при $x = 3$.



Парабола обращена вниз; единственная точка максимума (3; 4).

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Основной канал работает с вероятностью 0,9. При его отказе включают резервный; условная вероятность успешной работы резерва при отказе основного равна 0,8. Найдите вероятность успешной передачи.

Успех достигается двумя несовместимыми путями: основной работает либо основной отказал и резерв сработал. Поэтому $P = 0,9 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,98$.

Дополнительная независимость не требуется: вероятность 0,8 уже задана при нужном условии. Вероятность полного отказа $0,1 \cdot 0,2 = 0,02$ подтверждает результат.

Ответ. 0,98.

Задание 22

В независимых попытках вероятность успеха каждый раз равна 0,4. Найдите вероятность, что первый успех произойдет именно в третьей попытке.

Первые две попытки должны быть неудачными, а третья успешной. Это один путь ННУ с вероятностью $0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$. Множитель C_3^1 не нужен: место успеха предписано. Последующие попытки не ограничены и на событие не влияют.

Ответ. 0,144.

Задание 23

В тесте пять вопросов, у каждого четыре варианта и ровно один правильный. Ученик на каждом вопросе независимо равновероятно выбирает вариант. Найдите вероятность ровно двух верных ответов.

Вероятность успеха $p = \frac{1}{4}$, неудачи $\frac{3}{4}$. Выбрать две успешные позиции можно $C_5^2 = 10$ способами. Поэтому

$$P = 10 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}.$$

Независимость относится к выборам ученика, а не к содержанию вопросов.

Ответ. $\frac{135}{512}$.

Задание 24

Три стрелка независимо делают по одному выстрелу. Вероятности попадания равны 0,8; 0,7; 0,6. Найдите вероятность ровно двух попаданий.

Промахнуться должен ровно один стрелок. Три несовместимых случая дают $P = 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,084 + 0,144 + 0,224 = 0,452$. Обычная формула Бернулли с единым p неприменима: вероятности различны.

Ответ. 0,452.

Задание 25

Игрок выигрывает каждую партию с вероятностью 0,6 независимо от остальных. Ничьих нет. Матч заканчивается, когда кто-то выиграет две партии. Найдите вероятность победы игрока в матче.

Матч длится две или три партии. Победные для игрока пути: ВВ, ВПВ, ПВВ, где В - его победа. Их вероятности $0,6^2$, $0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6$ и $0,4 \cdot 0,6^2$. Сумма $0,36 + 0,144 + 0,144 = 0,648$. Путь ВВВ не добавляем: после ВВ матч уже закончен. Других победных путей нет, так как в третьей партии счёт перед решающей победой должен быть 1:1.

Ответ. 0,648.

Задание 26

Независимая попытка успешна с вероятностью 0,2. Какое наименьшее натуральное число попыток обеспечивает вероятность хотя бы одного успеха не меньше 0,9?

Для n попыток вероятность успеха хотя бы раз равна $1 - 0,8^n$. Требование равносильно $0,8^n \leq 0,1$. Последовательность $0,8^n$ строго убывает. Проверяем соседние целые: $0,8^{10} = 0,1073741824 > 0,1$, $0,8^{11} = 0,08589934592 < 0,1$. Поэтому 10 и все меньшие числа не подходят, а 11 подходит. Логарифмическое округление без проверки границы здесь не требуется.

Ответ. 11.

Задание 27

Три независимых стрелка попадают с вероятностями 0,8; 0,7; 0,6. Известно, что попаданий не меньше двух. Найдите вероятность, что попали все трое.

Вероятность трёх попаданий $P_3 = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,336$. Вероятность ровно двух равна сумме трёх путей: $P_2 = 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,452$.

Известное событие имеет вероятность $P_2 + P_3 = 0,788 > 0$. Условная вероятность $\frac{P_3}{P_2 + P_3} = \frac{336}{788} = \frac{84}{197}$. Пересечение «все трое» и «не меньше двух» есть «все трое».

Ответ. $\frac{84}{197}$.

Задание 28

В партии 20% деталей дефектны. Сигнализатор даёт сигнал для дефектной детали с вероятностью 0,9, для исправной - с вероятностью 0,1. Случайная деталь вызвала сигнал. Найдите вероятность её дефектности.

Пусть D - дефект, S - сигнал. Вероятность совместного события $D \cap S$ равна $0,2 \cdot 0,9 = 0,18$. Полная вероятность сигнала $P(S) = 0,18 + 0,8 \cdot 0,1 = 0,26 > 0$.

Поэтому $P(D | S) = \frac{0,18}{0,26} = \frac{9}{13}$. Вероятность 0,9 характеризует сигнал при известном дефекте, а не дефект при известном сигнале.

Ответ. $\frac{9}{13}$.

Задание 29

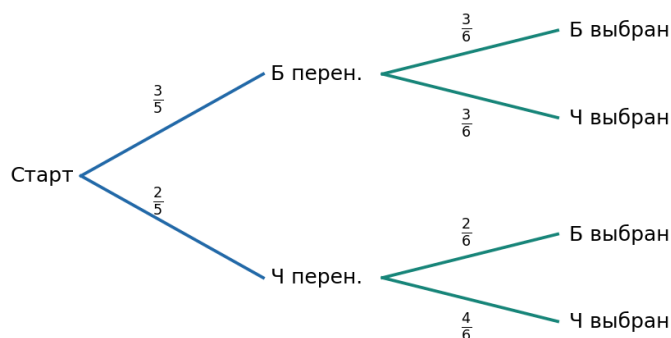
В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй 2 белых и 3 чёрных. Из первой урны случайно перекладывают один шар во вторую, перемешивают и выбирают из второй случайный шар. Он оказался белым. Найдите вероятность, что переложённый шар был белым.

Обозначим H - переложили белый, W - затем выбрали белый. $P(H) = \frac{3}{5}$, $P(W | H) = \frac{3}{6}$. Если переложили чёрный, $P(\bar{H}) = \frac{2}{5}$, $P(W | \bar{H}) = \frac{2}{6}$. Поэтому

$$P(W) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{13}{30} > 0.$$

Нужный путь имеет вероятность $\frac{9}{30}$, и $P(H | W) = \frac{\frac{9}{30}}{\frac{13}{30}} = \frac{9}{13}$. Во второй урне после перекладывания шесть шаров при любом цвете; возвращения в первую нет.

Ответ. $\frac{9}{13}$.



После перекладывания во второй урне 6 шаров; белых 3 или 2.

Задание 30

Два правильных кубика бросили независимо. Известно, что сумма очков не меньше 10. Найдите вероятность, что на первом кубике выпало 6.

Условию о сумме отвечают шесть равновозможных пар:

(4; 6), (5; 5), (6; 4), (5; 6), (6; 5), (6; 6). Из них первая координата 6 у трёх:

(6; 4), (6; 5), (6; 6). Поэтому условная вероятность $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Изначальная вероятность шестёрки $\frac{1}{6}$ не сохраняется после сообщения о большой сумме.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34

Задание 31

Два независимых испытания имеют одну и ту же вероятность успеха p . Вероятность ровно одного успеха равна $\frac{3}{8}$, а успех в отдельном испытании вероятнее неудачи. Найдите p .

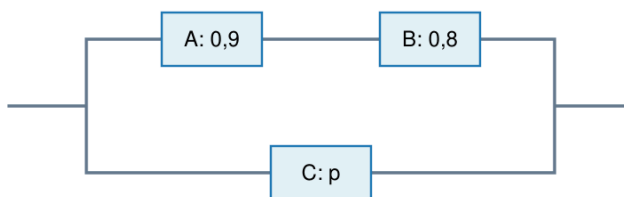
Вероятность ровно одного успеха $2p(1-p)$. Уравнение $2p(1-p) = \frac{3}{8}$ равносильно $16p^2 - 16p + 3 = 0$, откуда $p = \frac{1}{4}$ или $\frac{3}{4}$. Оба числа принадлежат $[0; 1]$, но дополнительное условие $p > 1-p$ означает $p > \frac{1}{2}$ и оставляет только $\frac{3}{4}$.

Проверка: $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. Строгость сравнения исключает равенство вероятностей.

Ответ. $\frac{3}{4}$.

Задание 32

Узлы A и B включены последовательно и исправны с вероятностями 0,9 и 0,8. Параллельно всей этой ветви включён узел C с вероятностью исправности p . Исправности всех трёх узлов независимы. При каких p надёжность системы не меньше 0,93?



Верхняя ветвь содержит A и B последовательно; C резервирует всю верхнюю ветвь.

Ветвь AB работает с вероятностью $0,9 \cdot 0,8 = 0,72$ и отказывает с вероятностью 0,28. Она независима от C , поскольку состояния всех трёх узлов совместно независимы. Система отказывает при отказе обеих ветвей: $1 - R = 0,28(1-p)$. Требование $1 - 0,28(1-p) \geq 0,93$ равносильно $p \geq 0,75$. С учётом $0 \leq p \leq 1$ получаем $[0,75; 1]$. При $p = 0,75$ надёжность ровно 0,93, при $p = 1$ - 1, поэтому обе границы допустимы.

Ответ. $p \in [0,75; 1]$.

Задание 33

Дефектны 2% деталей. Каждый из двух контролёров обнаруживает дефект с вероятностью 0,9 и ошибочно сигнализирует об исправной детали с вероятностью 0,1. При фиксированном состоянии детали решения контролёров независимы. Оба дали сигнал. Найдите вероятность дефекта. Можно ли считать сигналы независимыми без условия о состоянии?

Пусть D - дефект, S_1, S_2 - сигналы. Условная независимость даёт $P(S_1 \cap S_2 | D) = 0,9^2 = 0,81$ и $P(S_1 \cap S_2 | \bar{D}) = 0,1^2 = 0,01$. Значит, вероятность двух сигналов равна $0,02 \cdot 0,81 + 0,98 \cdot 0,01 = 0,026 > 0$. Доля дефектного пути:

$$\frac{0,0162}{0,026} = \frac{81}{130}.$$

Каждый отдельный сигнал имеет вероятность $0,02 \cdot 0,9 + 0,98 \cdot 0,1 = 0,116$.

Произведение $0,116^2 = 0,013456$ не равно 0,026. Следовательно, безусловной независимости нет: общая скрытая причина связывает сигналы.

Перемножение 0,116 дало бы неверный знаменатель.

Ответ. $\frac{81}{130}$; без условия сигналы зависимы.

Задание 34

Сегодня сухо. Если день сухой, следующий дождлив с вероятностью 0,3; если дождливый, следующий дождлив с вероятностью 0,6. Эти вероятности зависят только от текущего дня, а не от более ранней погоды. Найдите вероятность дождя через три дня.

Пусть q_n - вероятность дождя через n дней, $q_0 = 0$. Разбиваем по погоде в день n : $q_{n+1} = 0,6q_n + 0,3(1 - q_n) = 0,3 + 0,3q_n$. Отсюда $q_1 = 0,3$, $q_2 = 0,39$, $q_3 = 0,417$. Все значения в $[0; 1]$. Нельзя писать $0,3^3$: это вероятность одного конкретного пути при неверно выбранных переходах, а дождь в последний день возможен после разных предысторий.

Ответ. 0,417.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40

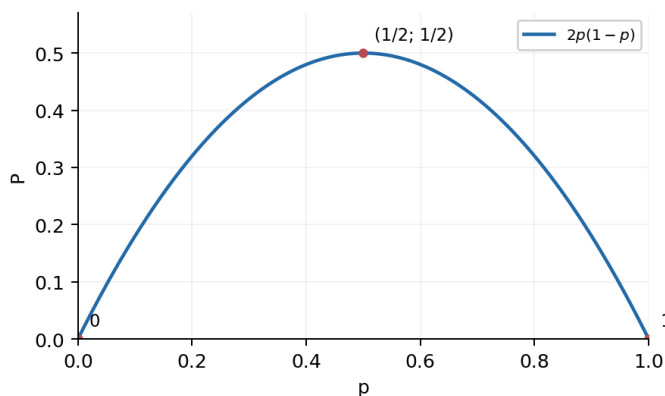
Задание 35

В двух независимых испытаниях вероятность успеха одна и та же, $p \in [0; 1]$. Для каждого действительного a определите все p , при которых вероятность ровно одного успеха равна a , и число таких значений p .

Искомая вероятность $f(p) = 2p(1-p) = \frac{1}{2} - 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2$. На $[0; 1]$ её значения составляют $\left[0; \frac{1}{2}\right]$: максимум $\frac{1}{2}$ достигается только при $p = \frac{1}{2}$, минимум 0 - при $p = 0$ и 1.

При $0 \leq a < \frac{1}{2}$ уравнение равносильно $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-2a}{4}$, поэтому $p = \frac{1 \pm \sqrt{1-2a}}{2}$. Для $0 \leq a < \frac{1}{2}$ корни различны и лежат в $[0; 1]$; при $a = 0$ получаются именно 0 и 1, оба разрешены. При $a = \frac{1}{2}$ обе формулы дают один корень. Вне указанного диапазона решений нет. Тем самым проверены и вещественность радикала, и вероятностные ограничения, и слияние ветвей.

Ответ. При $0 \leq a < \frac{1}{2}$ - два значения $\frac{1 \pm \sqrt{1-2a}}{2}$; при $a = \frac{1}{2}$ - одно $p = \frac{1}{2}$; иначе значений нет.



На допустимом отрезке $[0; 1]$ максимум $1/2$ при $p = 1/2$; концы включены.

Задание 36

Известно $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$, а $P(A \cap B) = t$. Найдите все допустимые t , все возможные значения $P(A | B)$ и значение t , при котором события независимы. Докажите реализуемость всех найденных значений.

Четыре несовместимые области $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ имеют вероятности t , $0,6 - t$, $0,7 - t$, $t - 0,3$. Все они должны быть неотрицательны, откуда $0,3 \leq t \leq 0,6$. Их сумма равна 1. Поэтому для любого t на этом отрезке можно взять пространство из четырёх исходов с именно такими вероятностями; нулевые вероятности на границах разрешены. Это доказывает не только необходимость, но и достаточность ограничений.

Поскольку $P(B) = 0,7 > 0$, условная вероятность $P(A | B) = \frac{t}{0,7}$ изменяется от $\frac{3}{7}$ до $\frac{6}{7}$, включая границы. Независимость равносильна $t = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$, что принадлежит допустимому отрезку.

Ответ. $t \in [0,3; 0,6]$; $P(A | B) \in \left[\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right]$; независимость при $t = 0,42$.

Задание 37

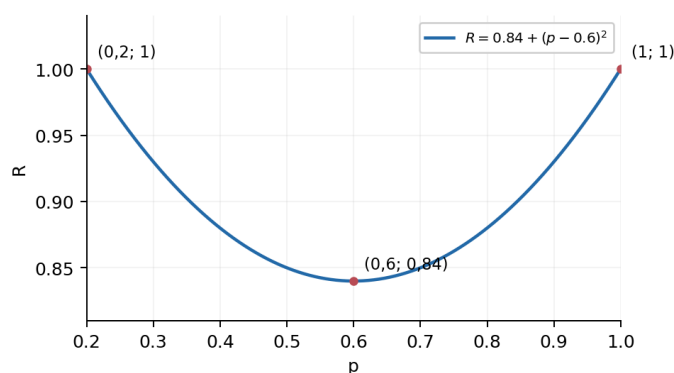
Два независимых резервирующих канала имеют надёжности $p, q \in [0; 1]$, причём $p + q = 1,2$. Система работает при исправности хотя бы одного канала. Найдите наименьшую и наибольшую надёжность системы и все пары $(p; q)$, на которых они достигаются.

Надёжность $R = 1 - (1 - p)(1 - q) = p + q - pq = 1,2 - pq$. Из $q = 1,2 - p$ и ограничений на оба числа получаем $0,2 \leq p \leq 1$. Тогда $pq = p(1,2 - p) = 0,36 - (p - 0,6)^2$, и $R = 0,84 + (p - 0,6)^2$.

Минимум 0,84 достигается только при $p = 0,6$, соответственно $q = 0,6$. На отрезке $[0,2; 1]$ расстояние от 0,6 не больше 0,4; квадрат не больше 0,16.

Максимум $R = 1$ достигается только при $p = 0,2$ или 1, то есть на парах $(0,2; 1)$ и $(1; 0,2)$. Все эти пары допустимы. Равные надёжности при фиксированной сумме здесь дают минимум, а не максимум.

Ответ. Минимум 0,84 при $(0,6; 0,6)$; максимум 1 при $(0,2; 1)$ и $(1; 0,2)$.



Допустимый отрезок $p \in [0,2; 1]$; минимум при 0,6, максимум на обоих концах.

Задание 38

В урне три белых и два чёрных шара. Первый случайно выбранный шар возвращают; затем добавляют один белый, если выбран белый, и два чёрных, если выбран чёрный. После перемешивания выбирают второй шар. Он оказался белым. Найдите вероятность, что первый шар был белым.

Пусть H - первый белый, W - второй белый. $P(H) = \frac{3}{5}$. После возвращения первого белого и добавления белого состав 4 белых и 2 чёрных, поэтому $P(W | H) = \frac{4}{6}$. После первого чёрного состав 3 белых и 4 чёрных, поэтому $P(W | \bar{H}) = \frac{3}{7}$.

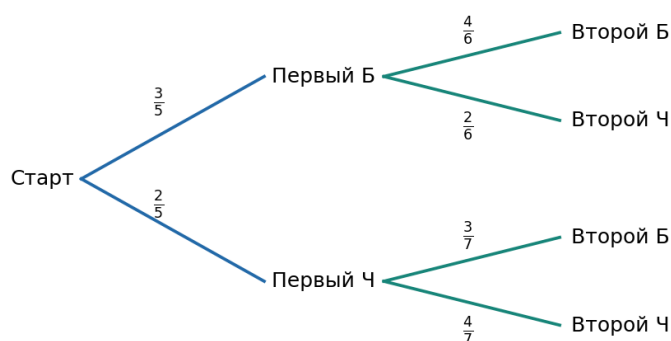
Полная вероятность второго белого

$$P(W) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{5} + \frac{6}{35} = \frac{4}{7} > 0.$$

Нужный совместный путь имеет вероятность $\frac{2}{5}$. Следовательно,

$P(H | W) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{10}$. Знаменатели 6 и 7 различны, потому что правило добавления зависит от первого цвета; независимости выборов нет.

Ответ. $\frac{7}{10}$.



Первый шар возвращён. После добавления составы: 4Б + 2Ч или 3Б + 4Ч.

Задание 39

Игроки А и Б по очереди пытаются выполнить задание, начиная с А. Вероятности успеха А и Б равны соответственно 0,4 и 0,5 в каждой попытке; все попытки независимы. Игра заканчивается при первом успехе. Найдите вероятность победы А и докажите, что вероятность бесконечной игры равна нулю.

Один полный безуспешный круг состоит из неудачи А и неудачи Б; его вероятность $r = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$. Победа А возможна после $k = 0, 1, 2, \dots$ таких кругов, и вероятность соответствующего пути $0,3^k \cdot 0,4$. Пути несовместимы.

После учёта первых N кругов сумма вероятностей победы А равна $0,4 \frac{1 - 0,3^N}{1 - 0,3}$.

Вероятность, что ни один игрок не победил за N кругов, равна $0,3^N$, которая стремится к нулю. Значит, не остаётся положительной вероятности бесконечного пути, и в пределе $P(A) = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}$.

Проверка: победа Б в очередном круге имеет вероятность $0,6 \cdot 0,5 = 0,3$, поэтому $P(B) = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$ и сумма равна 1. Одно уравнение $x = 0,4 + 0,3x$ даёт тот же результат, но без предельной проверки само по себе не объясняет завершение игры.

Ответ. $\frac{4}{7}$; вероятность бесконечной игры равна 0.

Задание 40

Проводятся пять независимых испытаний с одной вероятностью успеха $p \in [0; 1]$. Известно, что успехов не меньше трёх. При каких p условная вероятность ровно трёх успехов не меньше $\frac{1}{2}$?

Отдельно найдите p , при котором она равна $\frac{5}{12}$.

Обозначим число успехов X . При $p = 0$ событие $X \geq 3$ невозможно, поэтому условная вероятность не определена: это значение сразу исключаем. При $0 < p \leq 1$ по формуле Бернулли

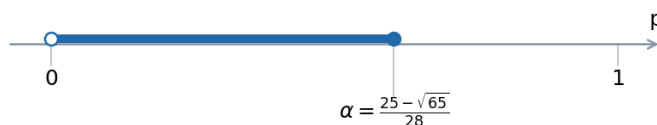
$$F(p) = \frac{10p^3(1-p)^2}{10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5} = \frac{10(1-p)^2}{10(1-p)^2 + 5p(1-p) + p^2}.$$

Сокращение на p^3 допустимо только после отбора $p > 0$. Знаменатель положителен на $(0; 1]$. Поэтому $F(p) \geq \frac{1}{2}$ равносильно $10(1-p)^2 \geq 5p(1-p) + p^2$, то есть $14p^2 - 25p + 10 \geq 0$. Корни $\alpha = \frac{25 - \sqrt{65}}{28}$ и $\beta = \frac{25 + \sqrt{65}}{28}$. Имеем $0 < \alpha < 1 < \beta$ (поскольку $8 < \sqrt{65} < 9$). Старший коэффициент положителен, так что после пересечения с $(0; 1]$ остаётся $(0; \alpha]$.

Для равенства $F(p) = \frac{5}{12}$ получаем $120(1-p)^2 = 5(10 - 15p + 6p^2)$, или $18p^2 - 33p + 14 = 0$.

Корни $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{6}$; второй не является вероятностью. При $p = \frac{2}{3}$ знаменатель исходной условной вероятности положителен, и проверка даёт $F = \frac{10}{10 + 10 + 4} = \frac{5}{12}$. При $p = 1$ величина $F = 0$, этот конец не удовлетворяет ни одному требованию.

Ответ. Неравенство: $0 < p \leq \frac{25 - \sqrt{65}}{28}$. Равенство $F = \frac{5}{12}$: $p = \frac{2}{3}$.



Условие определено лишь при $p > 0$. Ответ неравенства: от 0 до α включительно.