



Показательные и логарифмические уравнения

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Показательное уравнение опирается на строгую монотонность степени	3
02. Почему основание больше единицы даёт возрастание	4
03. Простейшее показательное уравнение	4
04. Разные основания можно согласовать через их степень	4
05. Вынесение наименьшей степени как общий множитель	5
06. Замена $t = a^x$ и её обязательное условие	5
07. Отрицательный корень вспомогательного уравнения отбрасывается до обратной замены	6
08. Смешанные показательные уравнения и деление на положительную степень	6
09. Показательное уравнение с модулем в показателе	6
10. Логарифмическое уравнение всегда начинается с ОДЗ	7
11. Определение логарифма превращает простейшее уравнение в степенное	7
12. Равенство логарифмов с одинаковым основанием	7
13. Сумма логарифмов: исходная ОДЗ не заменяется условием на произведение	8
14. Разность логарифмов и ненулевой знаменатель	8
15. Логарифм степени и модуль	8
16. Логарифмическая замена $t = \log a^x$	9
17. Согласование разных логарифмических оснований	9
18. Переменное основание: три условия ОДЗ	9
19. Факторизация логарифмического уравнения	10
20. Показательно-логарифмическая связь	10
21. Система показательных уравнений	10
22. Система логарифмов и переход к сумме и произведению	11

23. Функциональный метод: сумма возрастающей и убывающей частей	11
24. Оценка как метод решения	11
25. Полный разбор показательного уравнения	11
26. Полный разбор логарифмического уравнения	12
27. Уравнение с параметром в показателе	12
28. Лаборатория ошибок	12
29. Контроль восстановления доказательств	13
30. Дополнительная практика по основному банку	13
31. Карта урока	14
32. Быстрая проверка понимания	14
33. Как упростить или усложнить урок	15
34. Финальное упражнение: восстановить метод без таблицы	15
35. Разбор сложных задач ЕГЭ	15
36. Задача 1 • Взаимно обратные показательные слагаемые	15
37. Задача 2 • Логарифмическая сумма и исходная ОДЗ	16
38. Задача 3 • Переменное основание	17
39. Задача 4 • Система показательных уравнений	18
40. Задача 5 • число корней симметричной показательной суммы	19
41. Задача 6 • параметр в логарифмической сумме	20
42. Итог урока	22
43. Монотонность и показательная замена	22
44. Два корня внутри заданного интервала	24

01. Показательное уравнение опирается на строгую монотонность степени

Показательной называют функцию, в которой переменная находится в показателе степени. При $a > 0$ и $a \neq 1$ функция a^x определена для всех действительных x и строго монотонна.

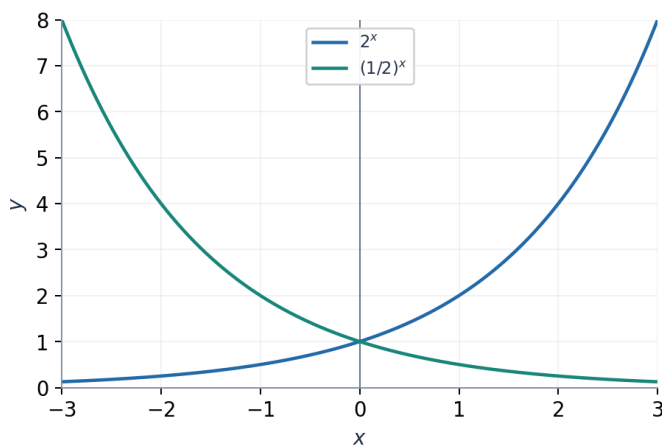
$$y = a^x$$

При $a > 1$ функция возрастает; при $0 < a < 1$ убывает. В обоих случаях разные показатели дают разные значения. Поэтому функция принимает каждое положительное значение не более одного раза.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Равносильность следует из взаимной однозначности показательной функции. Ограничения на основание не являются формальностью: при $a = 1$ обе части постоянно равны единице, а при $a \leq 0$ действительная степень не определена для всех показателей.

Главный принцип. Не «сбрасываем одинаковые основания», а применяем доказанный факт: строго монотонная функция принимает одинаковые значения только при одинаковых аргументах.



Степень положительна; основание больше 1 даёт возрастание, между 0 и 1 — убывание.

02. Почему основание больше единицы даёт возрастание

Пусть $v > u$. Тогда $v - u > 0$. Для $a > 1$ положительная степень a^{v-u} больше единицы. Поэтому

$$\frac{a^v}{a^u} = a^{v-u} > 1$$

и, следовательно, $a^v > a^u$. Если $0 < a < 1$, представим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда $a^x = b^{-x}$; с ростом x показатель $-x$ уменьшается, поэтому значение функции уменьшается.

Эта же монотонность позже определит направление знака в показательных неравенствах.

03. Простейшее показательное уравнение

Если правую часть можно представить степенью того же основания, уравнение сразу сводится к равенству показателей.

Пример. Решите $8^{x-1} = 4^{2x+1}$.

$$2^{3x-3} = 2^{4x+2}$$

$$3x - 3 = 4x + 2$$

Получаем $x = -5$. Проверка не требует десятичных приближений: обе исходные части после подстановки являются одной и той же степенью двойки.

Выбор основания. Берите простое общее основание, если оно естественно видно. Запись $8 = 2^3$ и $4 = 2^2$ сокращает вычисления и делает монотонность прозрачной.

04. Разные основания можно согласовать через их степень

Если основания являются степенями одного числа, переводим их к этому числу. Если нет, иногда полезно перенести всё в одну сторону и разложить по общему множителю.

Пример. Решите $9^x = 27^{x-1}$.

$$3^{2x} = 3^{3x-3}$$

По строгой монотонности степени $2x = 3x - 3$, откуда $x = 3$.

Контрпример к механике. В уравнении $2^x = 3^x$ одинакового основания нет. Но деление на $3^x > 0$ даёт $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, а единственный показатель, дающий единицу при основании $\frac{2}{3}$, равен нулю.

05. Вынесение наименьшей степени как общий множитель

Сумма степеней часто превращается в произведение после вынесения общей степени. Ненулевая показательная часть затем безопасно сокращается.

Задача. Решите $3^{x+1} + 3^x = 108$.

$$3^x(3 + 1) = 108$$

$$3^x = 27 = 3^3$$

Ответ: $x = 3$. Деление на 4 и на 3^x безопасно: $4 \neq 0$, а любая степень положительного основания положительна.

06. Замена $t = a^x$ и её обязательное условие

Если в уравнении встречаются a^{2x} , a^x и число, вводим $t = a^x$. Новая переменная всегда положительна.

$$t = a^x, \quad t > 0$$

Пример. Решите $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

$$t = 2^x > 0, \quad t^2 - 5t + 4 = 0$$

Получаем $t = 1$ или $t = 4$. Возвращаемся к переменной: $2^x = 1$ даёт $x = 0$, $2^x = 4$ даёт $x = 2$.

Полнота замены. Функция a^x при допустимом основании принимает все положительные значения и только их. Поэтому каждому $t > 0$ соответствует ровно один $x = \log_a t$.

07. Отрицательный корень вспомогательного уравнения отбрасывается до обратной замены

Вспомогательное квадратное уравнение может иметь отрицательный корень, но a^x никогда не бывает отрицательным.

Пример. После замены $t = 3^x$ уравнение приводит к $t^2 + t - 6 = 0$. Корни $t = 2$ и $t = -3$. Второй корень противоречит $t > 0$; только $3^x = 2$ возвращается к исходной переменной.

Отрицательное t не является «посторонним корнем исходного уравнения»: это недопустимое значение новой переменной, которое не имеет прообраза среди действительных x .

08. Смешанные показательные уравнения и деление на положительную степень

Задача. Решите $6^x = 2^{x+1} \cdot 3$.

Запишем $6^x = 2^x 3^x$ и разделим на положительное число $2^x 3$:

$$3^{x-1} = 2$$

Получаем $x - 1 = \log_3 2$, то есть $x = 1 + \log_3 2$. Такой ответ является точным; переводить его в десятичную дробь не нужно.

Школьный язык. Логарифм появляется как точная запись показателя. Это не новый метод, а решение уравнения $a^y = b$ по определению логарифма.

09. Показательное уравнение с модулем в показателе

Строгая монотонность позволяет сначала сравнить показатели, а затем решить уравнение с модулем.

Пример. Решите $5^{|x-2|} = 125$.

$$|x - 2| = 3$$

Отсюда $x - 2 = 3$ или $x - 2 = -3$. Ответ: $x = 5$ или $x = -1$.

Если правая часть неположительна, решений нет, потому что показательная функция всегда положительна.

10. Логарифмическое уравнение всегда начинается с ОДЗ

Для каждого логарифма требуется положительный аргумент; основание должно быть положительным и не равным единице. Ограничения выписываются по исходной записи до объединения логарифмов.

$$\log_a f(x) = b$$

При допустимом основании это равносильно двум условиям:

$$f(x) > 0 \text{ и } f(x) = a^b$$

Второе равенство часто автоматически обеспечивает положительность аргумента, потому что $a^b > 0$. Однако записать происхождение ОДЗ всё равно необходимо.

11. Определение логарифма превращает простейшее уравнение в степенное

Пример. Решите $\log_2(3x - 1) = 4$.

ОДЗ: $3x - 1 > 0$. По определению логарифма

$$3x - 1 = 2^4$$

Отсюда $x = \frac{17}{3}$. Значение входит в ОДЗ, а аргумент при подстановке равен 16.

Проверка определения. Ученик должен уметь проговорить: логарифм равен 4, значит, основание 2 в четвёртой степени даёт аргумент.

12. Равенство логарифмов с одинаковым основанием

Логарифмическая функция строго монотонна, следовательно, принимает каждое значение единственный раз.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Равносильность действует только на общей ОДЗ: $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Пример. $\log_3(x^2 - 1) = \log_3(2x + 3)$. ОДЗ требует $x^2 - 1 > 0$ и $2x + 3 > 0$. После равенства аргументов получаем кандидатов, а затем оставляем только значения общей ОДЗ.

Запрет. Нельзя сначала приравнять аргументы, а затем забыть исходные условия. Алгебраическое равенство может иметь корни, при которых один из логарифмов не существует.

13. Сумма логарифмов: исходная ОДЗ не заменяется условием на произведение

Свойство логарифма произведения работает, если каждый исходный аргумент положителен.

$$\log_a u + \log_a v = \log_a (uv), \quad u > 0, v > 0$$

Задача. Решите $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$.

Исходная ОДЗ: $x > 3$. Объединяем логарифмы и получаем $(x-1)(x-3) = 8$. Квадратное уравнение даёт $x = 5$ и $x = -1$; ОДЗ оставляет $x = 5$.

Условие $(x-1)(x-3) > 0$ дополнительно допустило бы $x < 1$, где оба исходных аргумента отрицательны. Поэтому оно не заменяет исходную ОДЗ.

14. Разность логарифмов и ненулевой знаменатель

При объединении разности логарифмов второй аргумент становится знаменателем, но он уже положителен по ОДЗ.

$$\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}, \quad u > 0, v > 0$$

Пример. $\log_5(x+4) - \log_5 x = 1$. ОДЗ: $x > 0$. После объединения $\frac{x+4}{x} = 5$, откуда $x = 1$. Проверка исходных аргументов выполнена.

15. Логарифм степени и модуль

Если исходно $x > 0$, верно $\log_a(x^2) = 2\log_a x$. Если известно только $x \neq 0$, справа должен появиться модуль:

$$\log_a x^2 = 2\log_a |x|$$

Причина: $\sqrt{x^2} = |x|$. Потеря модуля незаконно исключает отрицательные значения, для которых логарифм квадрата существует.

Пример. Уравнение $\log_2(x^2) = 6$ равносильно $x^2 = 64$ и имеет два корня: $x = -8$ и $x = 8$.

16. Логарифмическая замена $t = \log_a x$

Если в уравнении встречаются квадрат логарифма, сам логарифм и число, вводим $t = \log_a x$. При допустимом x переменная t может принимать любое действительное значение.

$$t = \log_a x$$

Пример. $(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 6 = 0$.

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

Получаем $t = 2$ или $t = 3$, затем $x = 4$ или $x = 8$. Оба значения положительны.

Сравнение замен. Для $t = a^x$ записываем $t > 0$. Для $t = \log_a x$ ограничений на t нет, но исходная переменная обязана удовлетворять $x > 0$.

17. Согласование разных логарифмических оснований

Разные основания переводятся к одному через формулу замены основания. Формулу не угадываем, а при необходимости выводим из определения.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Пример. Решите $\log_2 x + \log_4 x = 6$.

Поскольку $\log_4 x = \left(\frac{1}{2}\right) \log_2 x$, вводим $t = \log_2 x$. Тогда $t + \frac{t}{2} = 6$, откуда $t = 4$ и $x = 16$.

ОДЗ $x > 0$ сохраняется; найденное значение ей удовлетворяет.

18. Переменное основание: три условия ОДЗ

В логарифме с основанием $g(x)$ необходимо одновременно проверить:

- $g(x) > 0$;
- $g(x) \neq 1$;
- аргумент $f(x) > 0$.

Пример. Решите $\log_{(x-1)} 4 = 2$.

ОДЗ основания: $x > 1$ и $x \neq 2$. По определению $(x-1)^2 = 4$. Кандидаты $x = 3$ и $x = -1$; только $x = 3$ входит в ОДЗ.

Источник ошибки. Квадратное равенство допускает отрицательное $x - 1$, но основание логарифма обязано быть положительным. Отбрасывание делает ОДЗ, а не извлечение корня.

19. Факторизация логарифмического уравнения

Иногда общий логарифмический множитель позволяет разложить уравнение на ветви. Перед ветвлением сохраняется общая ОДЗ всех исходных логарифмов.

Пример. $(\log_2 x - 1)(\log_2 x + 3) = 0$.

ОДЗ: $x > 0$. Нулевое произведение даёт $\log_2 x = 1$ или $\log_2 x = -3$, поэтому $x = 2$ или $x = \frac{1}{8}$.

Факторизация является тождественным преобразованием выражения на ОДЗ и потому не добавляет корней.

20. Показательно-логарифмическая связь

Основное логарифмическое тождество позволяет мгновенно упрощать показатель, если основание степени совпадает с основанием логарифма.

$$a^{\log_a u} = u, \quad u > 0$$

Пример. Решите $3^{\log_3 (x-1)} = 9$.

ОДЗ: $x - 1 > 0$. Левая часть равна $x - 1$, поэтому $x - 1 = 9$ и $x = 10$.

Если основания различны, сначала согласуем их: $a^{\log_b u} = u^{\log_b a}$. Это следствие замены основания, а не отдельная формула для заучивания.

21. Система показательных уравнений

Задача. Решите систему $2^x \cdot 2^y = 32$ и $2^x + 2^y = 12$.

Положим $u = 2^x > 0$ и $v = 2^y > 0$. Тогда $uv = 32$ и $u + v = 12$. Числа u и v являются корнями $t^2 - 12t + 32 = 0$, то есть 4 и 8.

Получаем две упорядоченные пары: $(u, v) = (4, 8)$ или $(8, 4)$. Поэтому $(x, y) = (2, 3)$ или $(3, 2)$.

Почему решений ровно два. Степенная функция с основанием 2 взаимно однозначна, поэтому каждому положительному u соответствует единственный x .

22. Система логарифмов и переход к сумме и произведению

Задача. Решите систему $\log_2 x + \log_2 y = 3$ и $x + y = 6$.

ОДЗ: $x > 0$ и $y > 0$. Первое уравнение равносильно $\log_2(xy) = 3$, то есть $xy = 8$. Числа x и y — корни $t^2 - 6t + 8 = 0$.

Получаем $(x, y) = (2, 4)$ или $(4, 2)$. Обе пары входят в ОДЗ.

23. Функциональный метод: сумма возрастающей и убывающей частей

Иногда стандартная замена не работает, но можно доказать единственность корня через монотонность. После нахождения очевидного корня это завершает решение.

Пример. Рассмотрим $2^x + x = 3$. Левая часть строго возрастает как сумма двух строго возрастающих функций. Значение $x = 1$ является корнем. Следовательно, другого корня нет.

Полнота функционального метода. Проверка одного корня даёт существование; строгая монотонность даёт единственность. Нужны обе части рассуждения.

24. Оценка как метод решения

Если каждое слагаемое имеет известную нижнюю границу и равенство возможно только в одной точке, можно обойти громоздкие преобразования.

Пример. Для $t > 0$ верно $t + \frac{1}{t} \geq 2$, потому что $(t - 1)^2 \geq 0$. Если после замены $t = 2^x$ уравнение сводится к $t + \frac{1}{t} = 2$, то обязательно $t = 1$ и $x = 0$.

$$t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t - 1)^2}{t} \geq 0$$

Равенство достигается только при $t = 1$. Доказанная оценка одновременно даёт корень и его единственность.

25. Полный разбор показательного уравнения

Задача. Решите $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.

Положим $t = 3^x > 0$. Тогда $9^x = t^2$ и уравнение принимает вид $t^2 - 10t + 9 = 0$.

$$(t - 1)(t - 9) = 0$$

Оба корня положительны: $t = 1$ и $t = 9$. Обратная замена даёт $x = 0$ и $x = 2$. Проверка исходного уравнения подтверждает оба значения.

Полнота следует из взаимной однозначности замены $3^x = t$ на области $t > 0$ и полного решения квадратного уравнения.

26. Полный разбор логарифмического уравнения

Задача. Решите $\log_2(x-1) + \log_2(x+3) = 3 + \log_2 x$.

ОДЗ: $x-1 > 0$, $x+3 > 0$ и $x > 0$, то есть $x > 1$.

На ОДЗ объединяем логарифмы и переносим их в одну часть:

$$\log_2 \frac{(x-1)(x+3)}{x} = 3$$

По определению логарифма дробь равна 8. После умножения на $x > 0$ получаем квадратное уравнение. Все его корни проверяем условием $x > 1$ и исходной записью.

Контроль ОДЗ. Положительность общей дроби не заменяет положительность трёх исходных аргументов. Ограничение $x > 1$ сохраняется до ответа.

27. Уравнение с параметром в показателе

Задача. В зависимости от a решите $2^{ax} = 4$.

Запишем $4 = 2^2$. По строгой монотонности $ax = 2$.

Если $a \neq 0$, единственный корень $x = \frac{2}{a}$. Если $a = 0$, получаем $1 = 4$, поэтому решений нет.

Параметрическая развилка. Особое значение появляется не из степени, а из последующего деления на a . Его нужно разобрать до деления.

28. Лаборатория ошибок

Ошибка	Почему неверно	Как восстановить
сравнили показатели при разных основаниях	монотонность применена к разным функциям	свести основания или использовать другой метод
после $t = a^x$ взяли $t \leq 0$	показательная функция положительна	сразу записать $t > 0$

Ошибка	Почему неверно	Как восстановить
приравняли аргументы логарифмов без ОДЗ	исходные логарифмы могут не существовать	сначала выписать положительность каждого аргумента
объединили логарифмы и расширили ОДЗ	положительное произведение допускает два отрицательных множителя	сохранить исходные условия
забыли основание $\neq 1$	логарифм не определяется однозначно	проверять три условия переменного основания

29. Контроль восстановления доказательств

- доказать строгую монотонность a^x при $a > 1$ и объяснить убывание при $0 < a < 1$;
- обосновать равносильность равенства степеней одного основания и равенства их показателей;
- объяснить область $t > 0$ в замене $t = a^x$;
- вывести равенство логарифмов через строгую монотонность и общую ОДЗ;
- восстановить формулу замены основания;
- объяснить, почему исходная ОДЗ сохраняется после объединения логарифмов.

30. Дополнительная практика по основному банку

Задания практики	Этап работы
1–10	Основные приёмы урока
11–16	Сочетание приёмов и контроль ограничений
17–20	Повторение ранее изученного
21–30	Многошаговое решение
31–36	Полное обоснование и проверка ответа
37–40	Итоговые задачи повышенной сложности

31. Карта урока

Модель	Ключевой факт	Ограничение	Контроль полноты
одинаковые основания $t = a^x$	строгая монотонность $a^x > 0$	$a > 0, a \neq 1$ $t > 0$	равенство показателей единственный обратный логарифм
одинаковые логарифмы	строгая монотонность $\log_a x$	оба аргумента > 0	равенство аргументов
объединение логарифмов	свойства произведения и частного	исходная ОДЗ	проверка всех аргументов

32. Быстрая проверка понимания

Вопрос	Критерий полного ответа
Почему можно сравнить показатели?	Одинаковая показательная функция строго монотонна при допустимом основании.
Почему $t = a^x$ положительно?	Положительное основание в любой действительной степени даёт положительное число.
Почему равны аргументы логарифмов?	Логарифмическая функция строго монотонна на положительной полуоси.
Почему ОДЗ не заменяется условием на произведение?	Два отрицательных множителя дают положительное произведение, но исходные логарифмы не существуют.
Как доказать единственность найденного корня?	Показать строгую монотонность левой части или взаимную однозначность замены.

33. Как упростить или усложнить урок

Уровень	Что оставить	Что добавить
55-65	одинаковые основания, простые логарифмические уравнения, задания 1-10	готовая схема ОДЗ
65-80	замены, факторизация, объединение логарифмов, задания 1-20	самостоятельный выбор метода
80-100	системы, функциональный метод, оценки и параметры	доказательство единственности и высокий банк 21-40

34. Финальное упражнение: восстановить метод без таблицы

Составьте по одному уравнению для четырёх методов: сведение оснований, замена $t = a^x$, равенство логарифмов и функциональная монотонность. Для каждого запишите ограничения, докажете равносильность перехода и укажите, чем обеспечена полнота ответа.

Критерий. Ученик объясняет не только последовательность действий, но и математический факт, который разрешает каждое действие.

35. Разбор сложных задач ЕГЭ

Шесть крупных задач разбираются полностью: от ОДЗ и выбора метода до проверки, графической интерпретации и доказательства полноты ответа.

36. Задача 1 • Взаимно обратные показательные слагаемые

Условие

Решите уравнение

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}.$$

Разбор

1. Вводим положительную замену

$$t = 2^x > 0.$$

- Тогда $2^{-x} = \frac{1}{t}$.

1. Получаем

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}.$$

- После умножения на $2t > 0$:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

- откуда

$$t = 2 \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{2}.$$

1. Возвращаемся к x :

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1,$$

$$2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1.$$

Контроль полноты

Оба корня квадратного уравнения положительны, а функция 2^x взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}$ на $(0, +\infty)$.

Ответ: -1 ; 1 .

Экзаменационный акцент: условие $t > 0$ - обязательная часть показательной замены.

37. Задача 2 • Логарифмическая сумма и исходная ОДЗ

Условие

Решите уравнение

$$\log_2(x-1) + \log_2(5-x) = 1.$$

Разбор

1. ОДЗ задаётся двумя строгими неравенствами:

$$x - 1 > 0, \quad 5 - x > 0,$$

- то есть

$$1 < x < 5.$$

1. Только на ОДЗ объединяем логарифмы:

$$\log_2 ((x - 1)(5 - x)) = 1.$$

1. По определению логарифма:

$$(x - 1)(5 - x) = 2.$$

- После раскрытия скобок:

$$x^2 - 6x + 7 = 0.$$

- Поэтому

$$x = 3 \pm \sqrt{2}.$$

1. Оба числа лежат между 1 и 5.

Контроль полноты

Переход к произведению выполнен на исходной ОДЗ; равенство логарифма и числа преобразовано по определению при допустимом основании.

Ответ: $3 - \sqrt{2}$; $3 + \sqrt{2}$.

Экзаменационный акцент: условие $(x - 1)(5 - x) > 0$ было бы слабее исходной ОДЗ и могло бы добавить лишнюю область.

38. Задача 3 • Переменное основание

Условие

Решите уравнение

$$\log_{x-1} (x^2 - 5x + 7) = 1.$$

Разбор

- Условия на основание:

$$x - 1 > 0, \quad x - 1 \neq 1,$$

- то есть $x > 1$, $x \neq 2$.
- Аргумент положителен при всех x , потому что

$$x^2 - 5x + 7 > 0$$

- и его дискриминант равен $25 - 28 = -3 < 0$.
- По определению логарифма исходное уравнение равносильно

$$x^2 - 5x + 7 = x - 1.$$

- Тогда

$$x^2 - 6x + 8 = 0,$$

$$x = 2 \quad \text{или} \quad x = 4.$$

- Значение $x = 2$ запрещено: основание логарифма стало бы равно 1. Значение $x = 4$ допустимо.

Контроль полноты

Все три условия существования логарифма проверены отдельно; оба кандидата из алгебраического уравнения сопоставлены с исходной ОДЗ.

Ответ: 4.

Экзаменационный акцент: основание, зависящее от x , нельзя считать «обычной константой».

39. Задача 4 • Система показательных уравнений

Условие

Решите систему

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 10, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Разбор

1. Введём положительные переменные

$$u = 2^x, \quad v = 2^y.$$

1. Из второго уравнения системы:

$$uv = 2^{x+y} = 2^4 = 16.$$

- Поэтому

$$u + v = 10, \quad uv = 16.$$

1. Числа u и v являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - 10z + 16 = 0.$$

- Отсюда $\{u, v\} = \{2, 8\}$.

1. Возвращаемся к показателям:

$$(u, v) = (2, 8) \Rightarrow (x, y) = (1, 3),$$

$$(u, v) = (8, 2) \Rightarrow (x, y) = (3, 1).$$

Контроль полноты

Оба порядка пары $\{2, 8\}$ учтены; логарифмирование по основанию 2 однозначно восстанавливает x и y .

Ответ: $(1; 3), (3; 1)$.

Экзаменационный акцент: сумма и произведение новой пары часто сильнее прямого исключения переменной.

40. Задача 5 • число корней симметричной показательной суммы

Условие

В зависимости от параметра a определите число корней уравнения

$$2^x + 2^{-x} = a.$$

Разбор

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2.$$

- Равенство достигается только при $2^x = 2^{-x}$, то есть при $x = 0$.

Функция чётная. На $[0, +\infty)$ она строго возрастает, поскольку при $x > 0$ растущее слагаемое 2^x доминирует над убывающим 2^{-x} ; то же можно строго подтвердить производной.



Рисунок 1. Горизонталь ниже минимума не пересекает график, в минимуме касается его, выше минимума пересекает две симметричные ветви.

Следовательно:

при $a < 2$ корней нет;

при $a = 2$ один корень, $x = 0$;

при $a > 2$ два корня, противоположных по знаку.

Контроль полноты

Минимум найден точно, а строгая монотонность каждой ветви исключает дополнительные пересечения.

Экзаменационный акцент: график показывает структуру ответа, но критерий полноты — минимум и монотонность.

41. Задача 6 • параметр в логарифмической сумме

Условие

В зависимости от параметра a определите число корней уравнения

$$\log_2 x + \log_2(4 - x) = a.$$

Разбор

ОДЗ:

$$0 < x < 4.$$

На ОДЗ:

$$\log_2(x(4-x)) = a,$$

- поэтому

$$x(4-x) = 2^a.$$

Квадратичная функция $x(4-x)$ положительна на $(0,4)$, симметрична относительно $x = 2$ и имеет максимум

$$2(4-2) = 4.$$

- Следовательно, максимальное значение логарифмической функции равно

$$\log_2 4 = 2.$$

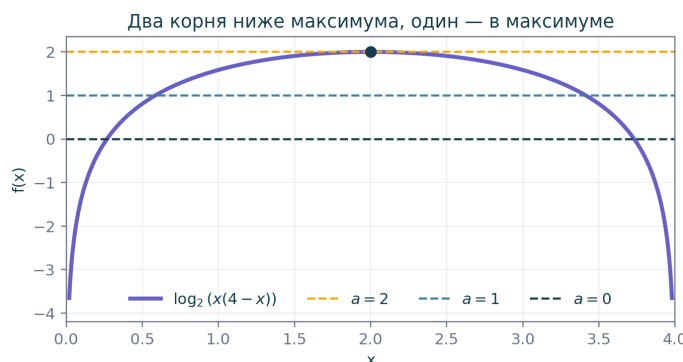


Рисунок 2. На концах ОДЗ функция стремится к $-\infty$, а в точке $x = 2$ достигает единственного максимума.

Получаем:

при $a < 2$ корней два;

при $a = 2$ корень один, $x = 2$;

при $a > 2$ корней нет.

Контроль полноты

На каждой из двух ветвей функция строго монотонна; её поведение у границ ОДЗ и точное значение максимума установлены.

Экзаменационный акцент: границы ОДЗ не входят в ответ, но определяют неограниченное убывание функции.

42. Итог урока

Показательная замена всегда сопровождается условием новой переменной $t > 0$.

Исходная логарифмическая ОДЗ сохраняется после объединения логарифмов.

Для переменного основания проверяются аргумент, положительность основания и запрет основания 1.

В симметрических задачах полезны сумма и произведение новых переменных.

Число корней с параметром обосновывается точными границами и монотонностью.

43. Монотонность и показательная замена

Почему показательная функция с основанием больше 1 возрастает

Пусть $a > 1$ и $y > x$. Тогда $y - x > 0$. По закону частного степеней

$$\frac{a^y}{a^x} = a^{y-x}.$$

Положительная степень числа больше 1 больше единицы, поэтому

$$\frac{a^y}{a^x} > 1,$$

а значит $a^y > a^x$.

Если $0 < a < 1$, представим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда

$$a^x = b^{-x}.$$

При росте x показатель $-x$ уменьшается, поэтому функция убывает. Этот факт станет основанием монотонности логарифма на следующем уроке.

Следствие. При $a > 0$, $a \neq 1$ равенство

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

равносильно $f(x) = g(x)$ на общей ОДЗ. Строгая монотонность гарантирует единственность показателя.

Полный разбор: уравнение с общим основанием

Решим

$$8^{x-1} = 4^{2x+1}.$$

Переходим к основанию 2:

$$2^{3(x-1)} = 2^{2(2x+1)}.$$

Основание 2 положительно и не равно 1, степенная функция строго возрастает, поэтому показатели равны:

$$3x - 3 = 4x + 2.$$

Откуда $x = -5$.

Проверка подстановкой подтверждает равенство. В решении важно назвать причину перехода к равенству показателей — строгую монотонность, а не «одинаковые основания можно убрать».

Показательная замена в уравнениях и неравенствах

Если в выражении встречаются a^{2x} и a^x при положительном a , вводим $t = a^x$. Важно сразу записать $t > 0$: показательная функция принимает только положительные значения.

Уравнение

Задача. Решите $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$. Поскольку $4^x = (2^x)^2$, положим $t = 2^x, t > 0$. Получаем

$$t^2 - 5t + 4 = 0, \quad (t - 1)(t - 4) = 0.$$

Оба корня положительны: $t = 1$ или $t = 4$. Возвращаемся к исходной переменной: $2^x = 1$ даёт $x = 0$, а $2^x = 4$ даёт $x = 2$. Ответ: 0 и 2.

Проверка. Подстановка $x = 0$ даёт $1 - 5 + 4 = 0$; при $x = 2$ получаем $16 - 20 + 4 = 0$. Условие $t > 0$ не исключило корни, но его всё равно необходимо фиксировать.

Неравенство

Задача. Решите $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0$. Положим $t = 3^x, t > 0$. Тогда

$$t^2 - 10t + 9 \leq 0, \quad (t - 1)(t - 9) \leq 0.$$

Квадратный трёхчлен неположителен между корнями: $1 \leq t \leq 9$. Возвращаем замену: $1 \leq 3^x \leq 9$. Основание 3 больше 1, поэтому функция возрастает и можно сравнить показатели:

$$0 \leq x \leq 2.$$

Когда один корень замены запрещён

Рассмотрим уравнение $4^x + 2^x - 2 = 0$. После замены $t = 2^x > 0$ получаем $t^2 + t - 2 = 0$, то есть $t = 1$ или $t = -2$. Второй корень квадратного уравнения не может быть значением 2^x , поэтому остаётся $t = 1$ и $x = 0$.

Важно. Ограничение $t > 0$ проверяется до обратного перехода. Нельзя пытаться решать $2^x = -2$ и только потом вспоминать, что положительная степень положительного основания всегда положительна.

Критерий решения. Ученик объясняет, почему замена охватывает все исходные значения, решает новое уравнение с учётом $t > 0$ и корректно возвращается к x через монотонность показательной функции.



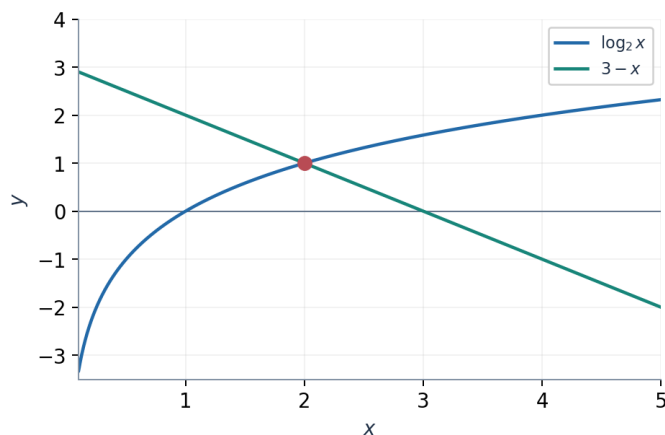
После замены $t = 3^x$ и условия $1 \leq t \leq 9$ получаем $0 \leq x \leq 2$.

44. Два корня внутри заданного интервала

После замены $t = \log_b x$ нельзя забывать границы для t . Для квадратичной функции $q(t)$ с положительным старшим коэффициентом два различных корня лежат строго внутри $(u; v)$ тогда и только тогда, когда вершина лежит между u и v , минимум отрицателен, а $q(u) > 0$ и $q(v) > 0$. На концах открытого интервала равенство нулю запрещено.

Пример. Для $t^2 - 2at + 1 = 0$ требуются два корня в $(0; 3)$. Вершина $t = a$: $0 < a < 3$; дискриминант положителен при $|a| > 1$; $q(0) = 1 > 0$, $q(3) = 10 - 6a > 0$. Получаем $1 < a < \frac{5}{3}$.

Функциональный метод. Единственность часто проще доказать монотонностью, чем преобразованиями. Для $\log_2 x + x = 3$ сумма слева строго возрастает, поэтому найденный корень $x = 2$ единственный. Если используется выпуклость, обоснуйте её, например второй производной. Для $2^x - x - 1$ она положительна всюду; этот дополнительный приём потребует в одном задании практики.



Возрастающий логарифм и убывающая прямая имеют одно пересечение.