

Урок 7. Показательные и логарифмические уравнения

Показательные уравнения часто решаются приведением к одному основанию или заменой переменной. В логарифмических уравнениях сначала нужно найти область допустимых значений. Разберём оба подхода и ошибки, из-за которых теряются или появляются лишние корни.

Восемь примеров показывают работу со степенями, определением и свойствами логарифма. После разбора переходите к тесту на 40 заданий: решения каждого из них открываются отдельно.

01. Степени: правила, необходимые для уравнений

В показательном уравнении неизвестное находится в показателе степени. Запись $2^x = 8$ спрашивает, в какую степень нужно возвести 2, чтобы получить 8. Ответ $x = 3$, поскольку $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Деление 8 на 2 не решает этот вопрос.

При положительном основании действуют правила $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$, $\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$, $(a^u)^v = a^{uv}$. Также $a^0 = 1$ и $a^{-u} = \frac{1}{a^u}$. Например, $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, а $9^{x-1} = 3^{2x-2}$.

Почему основания ограничены. Для показательной функции рассматривают $a > 0$ и $a \neq 1$. При $a = 1$ все значения 1^x равны 1, и приравнять показатели нельзя. Положительное основание позволяет определять степень для любого действительного показателя.

02. Приведение к одному основанию

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то из $a^u = a^v$ следует $u = v$. При $a > 1$ функция строго возрастает, а при $0 < a < 1$ строго убывает; в обоих случаях одинаковому значению соответствует только один показатель.

В уравнении $8^x = 4$ обе части удобно представить степенями двойки: $2^{3x} = 2^2$, откуда $3x = 2$ и $x = \frac{2}{3}$. Разные исходные основания не означают, что показатели можно приравнять сразу.

Замена переменной

Выражения a^{2x} и a^x связаны как квадрат и само число: $a^{2x} = (a^x)^2$. Поэтому можно ввести $t = a^x$, обязательно указав $t > 0$. Полученное квадратное уравнение решают относительно t , после чего возвращаются к x .

Например, $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ превращается в $t^2 - 3t + 2 = 0$. Получаем $t = 1$ или $t = 2$, а значит, $x = 0$ или $x = 1$. Отрицательный корень по t , если бы он появился, следовало бы отбросить: положительная степень основания не бывает отрицательной.

03. Что такое логарифм

Равенство $\log_a b = c$ означает $a^c = b$. Здесь $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$. Например, $\log_5 25 = 2$, $\log_{10} 0,001 = -3$ и $\log_7 1 = 0$.

Логарифм может быть отрицательным или нулевым. Положительным обязан быть его аргумент, а не значение логарифма. В уравнении $\log_2 x = -1$ получаем допустимый ответ $x = \frac{1}{2}$.

Как записать ОДЗ

Для $\log_3(x - 5)$ нужно $x - 5 > 0$, то есть $x > 5$. Если логарифмов несколько, условия выполняются одновременно. Для $\log_2(x - 1) + \log_2(7 - x)$ получаем $1 < x < 7$.

Если неизвестное стоит в основании, ограничения добавляются и к нему. Выражение $\log_x 5$ требует $x > 0$, $x \neq 1$. В текущих задачах основания постоянны, но смысл ограничений полезно понимать заранее.

04. Свойства логарифмов и их ограничения

При допустимом основании и положительных u , v :

- $\log_a u + \log_a v = \log_a (uv)$;
- $\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}$;
- $\log_a (u^r) = r \log_a u$ для $u > 0$.

Сумма логарифмов превращается в логарифм произведения, а не суммы аргументов. Например, $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32 = 5$. Запись $\log_2(4 + 8)$ дала бы другое число.

Особый случай. При $x \neq 0$ верно $\log_a(x^2) = 2 \log_a |x|$. Запись $2 \log_a x$ сужает область до $x > 0$ и может потерять отрицательный корень. Поэтому $\log_3(x^2) = 2$ удобно решать как $x^2 = 9$: подходят и 3, и -3 .

05. Как решать логарифмическое уравнение

1. Запишите ОДЗ исходной записи.
2. Если возможно, объедините логарифмы по их свойствам.
3. Используйте определение логарифма или равенство аргументов при одинаковом основании.
4. Решите полученное алгебраическое уравнение.
5. Проверьте найденные значения по ОДЗ и исходному равенству.

В уравнении $\log_2(x - 1) = \log_2(7 - x)$ сначала получаем $1 < x < 7$, затем $x - 1 = 7 - x$, откуда $x = 4$. Оба аргумента при этом равны 3 и положительны.

Проверять только произведение аргументов после объединения недостаточно: оно может быть положительным и при двух отрицательных множителях. Исходные логарифмы тогда не определены. Именно поэтому ОДЗ записывается до преобразований.

Как понять, что ответ правдоподобен

При основании больше 1 положительный логарифм соответствует аргументу больше 1, отрицательный - аргументу между 0 и 1. Для основания между 0 и 1 соотношение обратное. Самая надёжная короткая проверка - восстановить степенное равенство по определению логарифма.

06. Примеры с пошаговыми решениями

Разбор 1. Простейшее показательное уравнение

Условие

Решите уравнение.

$$2^x = 32$$

Короткое правило.

Представляем правую часть как степень того же основания и приравниваем показатели.

До решения.

Степени двойки: 2, 4, 8, 16, 32. Уже по последовательности видно, что показатель - целое положительное число.

1. Записываем 32 как степень двойки

$$32 = 2^5$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

2. Сравниваем показатели

$$2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

Функция 2^x строго возрастает и принимает каждое значение один раз.

Проверка. $2^5=32$ - подстановка сразу восстанавливает исходное равенство.

Типичная ошибка. Разделить 32 на 2 и получить $x=16$: показатель - не множитель перед основанием.

Ответ.

$$x = 5$$

Разбор 2. Приведение к общему основанию

Условие

Решите уравнение.

$$9^{x-1} = 27$$

Короткое правило.

Если основания различны, ищем общее простое основание. Здесь 9 и 27 - степени числа 3.

До решения.

$9^1=9$, $9^2=81$, а 27 лежит между ними. Поэтому $x-1$ должно быть между 1 и 2, а x - между 2 и 3.

1. Переписываем обе части

$$(3^2)^{x-1} = 3^3$$

$$9=3^2, 27=3^3.$$

2. Умножаем показатели

$$3^{2x-2} = 3^3$$

По правилу $(a^m)^n = a^{mn}$.

3. Приравниваем показатели

$$2x - 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Основания одинаковы и допустимы.

Проверка. $x-1=3/2$, а $9^{(3/2)}=(\sqrt{9})^3=3^3=27$.

Типичная ошибка. Записать $(3^2)^{(x-1)}$ как $3^{(2x-1)}$, не умножив -1 на 2 .

Ответ.

$$x = \frac{5}{2}$$

Разбор 3. Замена переменной в показательном уравнении**Условие**

Решите уравнение.

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Короткое правило.

Замечаем $4^x=(2^x)^2$ и вводим $t=2^x$. Новая переменная обязательно положительна.

До решения.

Уравнение станет квадратным относительно t . После решения нужно вернуться от t к x .

1. Вводим замену

$$t = 2^x > 0, \quad 4^x = t^2$$

$$4^x=(2^2)^x=(2^x)^2.$$

2. Решаем квадратное уравнение

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 4) = 0$$

Получаем $t=1$ или $t=4$; оба значения положительны.

3. Возвращаемся к x

$$2^x = 1 \Rightarrow x = 0; \quad 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$1=2^0 \text{ и } 4=2^2.$$

Проверка. При $x=0$: $1-5+4=0$; при $x=2$: $16-20+4=0$.

Типичная ошибка. Решить квадратное уравнение для t и записать $t=1;4$ как окончательный ответ по x .

Ответ.

$$x = 0; 2$$

Разбор 4. Логарифм как показатель степени

Условие

Решите уравнение.

$$\log_3(x-1) = 2$$

Короткое правило.

По определению $\log_a b = c$ равносильно $a^c = b$, но только при положительном аргументе b .

До решения.

ОДЗ: $x-1 > 0$, то есть $x > 1$. Итоговый корень должен быть больше единицы.

1. Записываем ОДЗ

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Логарифм неположительного числа не определён.

2. Переходим к степени

$$x - 1 = 3^2$$

Основание 3 в степени 2 равно аргументу.

3. Находим x

$$x - 1 = 9 \Rightarrow x = 10$$

Прибавляем 1 к обеим частям.

4. Сверяем с ОДЗ

$$10 > 1$$

Корень допустим.

Проверка. $\log_3(10-1)=\log_3 9=2$.

Типичная ошибка. Записать $x-1=2^3$ вместо 3^2 : основание и значение логарифма меняются ролями неправильно.

Ответ.

$$x = 10$$

Разбор 5. Сумма логарифмов и отбор по ОДЗ

Условие

Решите уравнение.

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+1) = 2$$

Короткое правило.

Сначала пересекаем условия положительности всех аргументов, затем объединяем сумму логарифмов в логарифм произведения.

До решения.

Нужно одновременно $x-2>0$ и $x+1>0$. Более строгое условие даёт $x>2$.

1. Находим ОДЗ

$$x > 2$$

Оба аргумента должны быть положительными.

2. Объединяем логарифмы

$$\log_2((x-2)(x+1)) = 2$$

Сумма логарифмов превращается в логарифм произведения на ОДЗ.

3. Переходим к степени

$$(x-2)(x+1) = 4$$

$$2^2=4.$$

4. Решаем квадратное уравнение

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3; -2$$

Трёхчлен раскладывается как $(x-3)(x+2)$.

5. Отбираем по ОДЗ

$$x > 2 \Rightarrow x = 3$$

При $x=-2$ первый аргумент отрицателен, второй равен -1 .

Проверка. $\log_2 1 + \log_2 4 = 0 + 2 = 2$.

Типичная ошибка. Не выписать ОДЗ и оставить оба корня квадратного уравнения.

Ответ.

$$x = 3$$

Разбор 6. Уравнение с отрицательным показателем

Условие

Найдите корень уравнения.

$$3^{x-8} = \frac{1}{81}$$

Короткое правило.

Представляем дробь как степень основания 3 и приравниваем показатели.

До решения.

$1/81 = 1/3^4 = 3^{-4}$, поэтому показатель $x-8$ должен быть отрицательным.

1. Переписываем правую часть

$$\frac{1}{81} = 3^{-4}$$

$81 = 3^4$, а обратное число меняет знак показателя.

2. Приравниваем показатели

$$x - 8 = -4$$

Основания одинаковы и функция 3^x строго возрастает.

3. Находим x

$$x = 4$$

Прибавляем 8 к обеим частям.

Проверка. $3^{(4-8)} = 3^{-4} = 1/81$.

Типичная ошибка. Записать $1/81 = 3^4$ и потерять отрицательный показатель.

Ответ.

$$x = 4$$

Разбор 7. Неизвестное в аргументе логарифма

Условие

Найдите корень уравнения.

$$\log_5(20 - x) = 2$$

Короткое правило.

Переходим к равенству аргумента и степени основания, затем сверяем корень с ОДЗ.

До решения.

ОДЗ: $20 - x > 0$, то есть $x < 20$. Аргумент должен быть равен $5^2 = 25$, поэтому корень окажется отрицательным.

1. Записываем ОДЗ

$$20 - x > 0 \Rightarrow x < 20$$

Аргумент логарифма положителен.

2. Переходим к степени

$$20 - x = 5^2 = 25$$

Используем определение логарифма.

3. Решаем линейное уравнение

$$-x = 5 \Rightarrow x = -5$$

Вычитаем 20 и делим на -1 .

4. Сверяем с ОДЗ

$$-5 < 20$$

Корень допустим.

Проверка. $\log_5(20 - (-5)) = \log_5 25 = 2$.

Типичная ошибка. Получить $x = 5$, забыв знак минус перед x в выражении $20 - x$.

Ответ.

$$x = -5$$

Разбор 8. Разность логарифмов

Условие

Найдите значение выражения.

$$\log_4 56 - \log_4 7$$

Короткое правило.

Разность логарифмов с одинаковым основанием равна логарифму частного.

До решения.

$56/7=8$. Число 8 лежит между 4^1 и 4^2 , поэтому ответ должен быть между 1 и 2.

1. Объединяем логарифмы

$$\log_4 56 - \log_4 7 = \log_4 \frac{56}{7}$$

В разности сохраняем порядок аргументов.

2. Сокращаем частное

$$\log_4 \frac{56}{7} = \log_4 8$$

$56/7=8$.

3. Приводим к основанию 2

$$4 = 2^2, \quad 8 = 2^3 \quad \Rightarrow \quad \log_4 8 = \frac{3}{2}$$

Нужно найти показатель, при котором 4 в этой степени равно 8.

Проверка. $4^{(3/2)} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$.

Типичная ошибка. Вычесть аргументы и записать $\log_4(56-7)$.

Ответ.

$$\frac{3}{2}$$

07. Основные формулы

$$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

08. Вопросы по теме

Может ли логарифм быть отрицательным?

Да. Например, логарифм 0,01 по основанию 10 равен -2 . Положительным должен быть аргумент логарифма, а не его значение.

Зачем нужна ОДЗ до объединения логарифмов?

Положительное произведение аргументов может получиться из двух отрицательных множителей. Логарифм произведения тогда существует, но исходные логарифмы - нет.