



Практикум: первая часть и неравенства

Теория и разобранные примеры

Урок 33. Практикум: первая часть и неравенства. Объяснения с начального уровня, исходные примеры с пошаговыми решениями и отдельный тест для самостоятельной проверки.

Как соединить короткий ответ и полное решение неравенства

В первой части часто проверяется один вычислительный шаг. В развёрнутом неравенстве оценивается вся логика: область допустимых значений, равносильное преобразование, критические точки, знаки на интервалах и корректная запись ответа.

Каркас метода интервалов

Перенесите всё в одну часть и представьте выражение как произведение или дробь. Отдельно найдите нули числителя и запрещённые нули знаменателя. Расположите критические точки на числовой прямой и определите знак на каждом промежутке. Нуль числителя можно включить только при нестрогом знаке; нуль знаменателя не включается никогда.

Сокращение одинакового множителя не отменяет запрет исходного знаменателя. Например, выражение $(x - 2) / (x - 2)$ равно единице только при $x \neq 2$. Точка два остаётся выколотой после сокращения.

Когда знак меняется

При переходе через корень нечётной кратности знак множителя меняется. Корень чётной кратности знак не меняет. Если кратность неочевидна, разложите выражение полностью и подпишите степени множителей. Это надёжнее механического чередования плюсов и минусов.

Показательные и логарифмические конструкции

Перед сравнением показателей проверьте основание. При $a > 1$ направление неравенства сохраняется, при $0 < a < 1$ меняется. Для логарифма сначала записывается область допустимых значений его аргумента. Условия ОДЗ пересекаются с решением, а не добавляются к нему как отдельная ветвь.

После получения ответа возьмите по одной проверочной точке из выбранного и отвергнутого промежутков. Затем отдельно проверьте конечные границы в исходной записи. Такая проверка обнаруживает потерянный запрет или неверно включённый корень, но в полном решении всё равно нужно показать таблицу знаков или её словесный эквивалент.



Подробные объяснения и разобранные примеры

Карта теории

ОДЗ

В знаменателе выражение не равно нулю; аргумент логарифма строго положителен. Ограничения записывайте до преобразований и сохраняйте до последнего шага.

Метод интервалов

Отметьте нули всех множителей и запрещённые точки. Определите знак на одном промежутке. Через корень нечётной кратности знак меняется, через корень чётной — сохраняется.

Монотонность

При основании больше 1 логарифмическая и показательная функции возрастают, при основании от 0 до 1 — убывают. Во втором случае знак сравнения аргументов или показателей меняется.

Квадрат в знаменателе

Квадрат неотрицателен, но в знаменателе требуется строгая положительность. Поэтому сначала исключите его нули, затем решайте неравенство по знаку числителя.

На первых разборах проговаривайте, почему выбран каждый шаг. Перед последними двумя задачами закройте решение, составьте собственный план и только затем сравните его с разбором.

Разбор 1. Логарифмическое неравенство и ОДЗ

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Логарифм существует только при положительном аргументе.

Условие

Решите неравенство $\log_3 (x - 1) \leq 2$.

1. $x - 1 > 0$, значит $x > 1$.

Это ОДЗ исходного выражения.

2. $\log_3 (x - 1) \leq 2$ равносильно $x - 1 \leq 3^2$.

Основание 3 больше 1, логарифмическая функция возрастает.

3. $x \leq 10$. Пересекаем с $x > 1$.

Оба требования должны выполняться одновременно.

4. $x \in (1; 10]$.

1 не включаем из-за ОДЗ, 10 включаем из-за нестрогого знака.



Иллюстрация к условию задания.

Проверка	Типичная ошибка
При $x = 10$ имеем $\log_3 9 = 2$. При $x = 1$ логарифм не существует.	Потерять ограничение $x > 1$ после перехода к аргументу.

Ответ: $(1; 10]$

Разбор 2. Метод интервалов с нулём знаменателя

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Для дроби нужны нули числителя и запрещённые точки.

Условие

Решите неравенство $\frac{(x-2)(x-9)}{x-5} \geq 0$.

1. $x \neq 5$; нули числителя — 2 и 9.

В точке 5 дробь не определена, поэтому её никогда не включаем.

2. Разбиваем ось точками 2, 5, 9.

На каждом открытом промежутке знак дроби постоянен.

3. Справа от 9 все множители положительны. Знаки слева направо: $-$, $+$, $-$, $+$.

Каждый линейный множитель имеет нечётную кратность, поэтому знак меняется в каждой отмеченной точке.

4. $x \in [2; 5) \cup [9; +\infty)$.

Берём участки со знаком плюс и допустимые нули числителя.



Иллюстрация к условию задания.

Проверка	Типичная ошибка
При $x = 3$ дробь равна $3 > 0$; при $x = 6$ равна $-12 < 0$.	Домножить неравенство на $x - 5$ без учёта его знака.

Ответ: $[2; 5) \cup [9; +\infty)$



Разбор 3. Убывающая показательная функция

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. При $0 < a < 1$ большему показателю соответствует меньшее значение степени.

Условие

Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{8}$.

1. $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Приводим правую часть к тому же основанию.

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3$ равносильно $x - 1 \leq 3$.

Основание меньше 1, поэтому знак при сравнении показателей меняется.

3. $x \leq 4$, то есть $x \in (-\infty; 4]$.

Показательная функция определена при любом действительном x .



Иллюстрация к условию задания.

Проверка	Типичная ошибка
При $x = 4$ обе части равны $1/8$; при $x = 5$ слева $1/16$, и неравенство уже неверно.	Сохранять знак при переходе к показателям.

ОТВЕТ. $x \in (-\infty; 4]$.

Разбор 4. Логарифм с основанием меньше единицы

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. $0 < \frac{1}{2} < 1$, поэтому логарифмическая функция убывает.

Условие

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) \geq 2$.

1. $x > 2$.

Аргумент $x - 2$ должен быть положительным.

2. $x - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

При переходе к аргументам знак меняется: большему логарифму соответствует меньший аргумент.

3. $2 < x \leq \frac{9}{4}$.

Объединяем полученное ограничение с ОДЗ.



4. $x \in (2; \frac{9}{4}]$.

Левую границу исключаем, правую включаем.



Иллюстрация к условию задания.

Проверка	Типичная ошибка
При $x = \frac{9}{4}$ аргумент равен $1/4$ и логарифм равен 2.	Сохранять знак неравенства, как для основания больше 1.

ОТВЕТ. $x \in (2; \frac{9}{4}]$.

Разбор 5. Нестрогое неравенство и скобки

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Нули числителя можно включить, нуль знаменателя — нельзя.

Условие

Решите неравенство $\frac{(x-0)(x-7)}{x-3} \leq 0$.

1. $x \neq 3$. Нули числителя — 0 и 7.

Отмечаем все точки, в которых может измениться знак.

2. Слева направо знаки: $-$, $+$, $-$, $+$.

Справа от 7 знак положительный; при каждом линейном множителе он меняется.

3. $x \in (-\infty; 0] \cup (3; 7]$.

Выбираем отрицательные участки и допустимые нули, поскольку знак ≤ 0 .



Иллюстрация к условию задания.

Проверка	Типичная ошибка
При $x = 4$ дробь отрицательна; 3 исключена независимо от знака неравенства.	Включить 3 или потерять 0 и 7.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (3; 7]$



Разбор 6. Уравнение рядом с неравенством

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. В уравнении ищем отдельные корни, а не промежутки.

Условие

а) Решите уравнение $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

1. $t = 2^x > 0$. Получаем $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Связь $4^x = (2^x)^2$ позволяет сделать замену.

2. $(t - 1)(t - 4) = 0$; $t = 1$ или $t = 4$.

Оба значения соответствуют положительной степени 2.

3. $x = 0$ или $x = 2$. В $[-1; 1]$ входит только 0.

Раздельно записываем общий ответ и отбор.

Проверка	Типичная ошибка
При $x = 0$: $1 - 5 + 4 = 0$.	Отбирать значения t , а не корни исходного уравнения.

ОТВЕТ. а) $x = 0; 2$; б) $x = 0$.

Разбор 7. Простейшее логарифмическое уравнение

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, открытый вариант КИМ ЕГЭ-2025, задание 6 Открыть источник	официальный КИМ • первая часть	ОДЗ и определение логарифма

Условие

Найдите корень уравнения:

$$\log_5 (20 - x) = 2$$

До решения: что заметить

Аргумент логарифма должен быть положительным.

Равенство $\log_5 A = 2$ означает $A = 5^2$.

После решения делаем подстановку.

Решение по шагам

Шаг 1. Записываем ОДЗ. Требование к аргументу:

$$20 - x > 0 \Rightarrow x < 20$$

Шаг 2. Переходим к степени. По определению логарифма:

$$20 - x = 5^2$$

Шаг 3. Решаем. Получаем:

$$20 - x = 25$$



$$x = -5$$

Проверка

$-5 < 20$, ОДЗ выполнено.

Подстановка: $\log_5 25 = 2$.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Считать 5^2 как $5 \cdot 2$. Логарифм задаёт показатель степени.

ОТВЕТ: -5

Разбор 8. Задание 15: квадрат в знаменателе

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, демонстрационный вариант ЕГЭ-2025, задача 15; запись адаптирована Открыть источник	официальная демоверсия • задача 15	ОДЗ, знак знаменателя и логарифмы

Условие

Решите неравенство:

$$\frac{\log_2 (2 - x) - \log_2 (x + 1)}{\log_2^2 (x^2) + \log_2 (x^4) + 1} \geq 0$$

До решения: что заметить

ОДЗ числителя: $-1 < x < 2$; логарифмы x^2 и x^4 требуют $x \neq 0$.

Знаменатель сворачивается в квадрат, но его нули исключаются.

После этого знак дроби определяется числителем.

Решение по шагам

Шаг 1. Сворачиваем знаменатель. Используем $\log_2(x^4) = 2\log_2(x^2)$:

$$\log_2^2 (x^2) + 2 \log_2 (x^2) + 1 = (\log_2 (x^2) + 1)^2$$

Шаг 2. Находим запрещённые точки. Квадрат равен нулю при $\log_2(x^2) = -1$:

$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Также исключён $x = 0$.

Шаг 3. Решаем по числителю. В остальных точках знаменатель положителен:

$$\log_2 (x + 1) \leq \log_2 (2 - x)$$

Шаг 4. Сравниваем аргументы. Основание 2 больше 1:

$$0 < x + 1 \leq 2 - x$$



$$-1 < x \leq \frac{1}{2}$$

Шаг 5. Удаляем точки разрыва. На найденном промежутке удаляем $-\sqrt{2}/2$ и 0 . Положительная $\sqrt{2}/2$ больше $1/2$.

Проверка

$x = 1/2$ включается: числитель нулевой, знаменатель ненулевой.

Нули знаменателя в ответ не входят.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Сказать «знаменатель — квадрат, значит положителен» и оставить его нули в ответе.

ОТВЕТ: $(-1; -\sqrt{2}/2) \cup (-\sqrt{2}/2; 0) \cup (0; 1/2]$



Иллюстрация к условию задания.