



Текстовые задачи на движение

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Путь, перемещение, скорость и время	2
02. Согласование единиц и временной шкалы	2
03. Таблица как способ построить уравнение	2
04. Встречное движение и относительная скорость	3
05. Догоняние и запоздалый старт	3
06. Средняя скорость: всегда весь путь на всё время	4
07. Остановка и компенсация повышением скорости	4
08. Река, ветер и движущаяся дорожка	5
09. Поезда: что значит полностью пройти	5
10. Круговая дорожка и счёт встреч	5
11. Координатный метод и развороты	7
12. Как читать графики пути и координаты	7
13. Перпендикулярные дороги и минимум расстояния	8
14. Выбор маршрута: минимум времени не равен минимуму пути	8
15. Параметр времени и полнота ответа	9
16. Типичные ошибки и контроль модели	10

01. Путь, перемещение, скорость и время

При равномерном движении с постоянным модулем скорости $v \geq 0$ за время $t \geq 0$ пройденный путь $s = vt$. При $t > 0$ получаем $v = \frac{s}{t}$, при $v > 0 - t = \frac{s}{v}$. Деление на нулевую скорость недопустимо: стоящий участник не преодолеет положительный путь за конечное время.

Путь - суммарная длина траектории; координата показывает положение относительно выбранного начала, а перемещение - изменение координаты. Путь не уменьшается, координата может убывать. После поездки туда и обратно перемещение равно нулю, но путь положителен.

В задачах этого урока скорости на каждом этапе постоянны, если не указано иное. При остановке, изменении скорости или развороте начинается новый этап. Основная трудность - выбрать, какие времена или пути нужно сложить, вычесть либо приравнять.

02. Согласование единиц и временной шкалы

В одном уравнении все длины должны быть в одной системе единиц, а времена - в одной системе. Связь скоростей выводится из определения:

$$1 \text{ м/с} = \frac{3600}{1000} \text{ км/ч} = 3,6 \text{ км/ч}.$$

Поэтому из км/ч в м/с умножают на $\frac{5}{18}$. Например, 72 км/ч - 20 м/с. 20 минут - $\frac{1}{3}$ часа, а не 0,2 часа; 40 минут - $\frac{2}{3}$ часа.

Если второй стартует позже на τ часов, то при общем времени t после первого старта он движется $t - \tau$ часов, и этот этап существует лишь при $t \geq \tau$. Можно вместо этого считать время от второго старта: тогда первый движется $t + \tau$. Оба подхода верны, если последовательно использовать одну шкалу.

03. Таблица как способ построить уравнение

Заполняйте таблицу «путь - скорость - время» по участникам или этапам. Сначала выберите неизвестную и её физическую область, затем выражайте остальные величины. В последней строке зафиксируйте словесную связь: например, сумма времён равна 5 часам, или первый затратил на полчаса больше.

Пример. Путь 120 км туда со скоростью v и обратно со скоростью $v + 20$ занял 5 ч. При $v > 0$ времена $\frac{120}{v}$ и $\frac{120}{v + 20}$. Уравнение $\frac{120}{v} + \frac{120}{v + 20} = 5$ даёт $v^2 - 28v - 480 = 0$, корни 40 и -12. Подходит 40; проверка $3 + 2 = 5$.

Таблица сама не выбирает знак между временами. Слова «за всё путешествие» обычно означают сумму, «на столько-то раньше» - разность, «одновременно

прибыли при одновременном старте» - равенство. Одинаковый путь не означает одинаковое время.

04. Встречное движение и относительная скорость

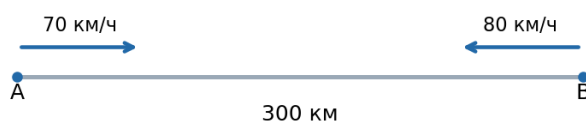
Пусть исходное расстояние $S > 0$, скорости навстречу $v_1, v_2 > 0$, старт одновременный. До встречи каждый движется одно и то же время t , а пути складываются: $v_1 t + v_2 t = S$. Поэтому

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2}.$$

Сумма скоростей - скорость уменьшения расстояния между участниками.

Пример: $S = 300$ км, скорости 70 и 80. Встреча через 2 ч; от первого пункта 140 км, от второго 160 км.

Формула верна до встречи на рассматриваемом прямом участке. Если один разворачивается или ждёт, надо проверить, не наступило ли это событие раньше вычисленного момента. После встречи расстояние между продолжающими движение участниками уже увеличивается.



Встречное движение: пройденные навстречу пути составляют 300 км.

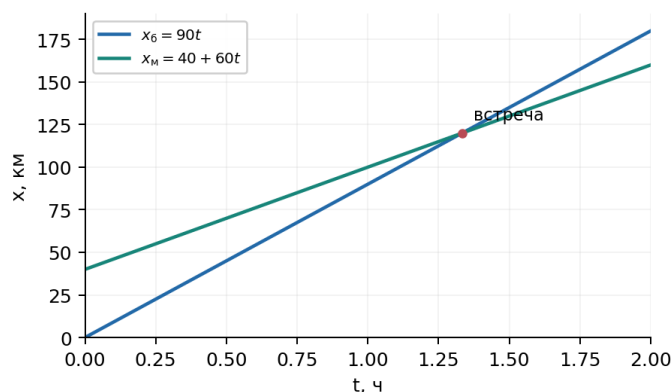
05. Догоняние и запоздалый старт

Если быстрый находится на $d > 0$ позади и движется в ту же сторону, разрыв меняется по закону $d - (v_б - v_м) t$. Догон возможен при $v_б > v_м$ и наступает через

$$t = \frac{d}{v_б - v_м}.$$

При равных скоростях положительный разрыв сохраняется, при меньшей скорости заднего - растёт. Отрицательное время, полученное формальным делением, не описывает будущую встречу.

Если первый выехал раньше на τ , его фора $d = v_1 \tau$. **Пример:** первый едет 60 км/ч, второй 90 и стартует на 40 минут позже. Фора 40 км; догон через $\frac{4}{3}$ ч после второго старта. После первого старта прошло 2 ч. Указание начала отсчёта - часть ответа.



Пример теории: время от второго старта; встреча при $t = 4/3$ ч и $x = 120$ км.

06. Средняя скорость: всегда весь путь на всё время

Средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{T_{\text{общ}}}$, где в полное время входят остановки, если условие не исключает их. Для участков длиной S_i со скоростями $v_i > 0$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_1 + \dots + S_n}{\frac{S_1}{v_1} + \dots + \frac{S_n}{v_n} + T_{\text{ост}}}.$$

При двух равных временах без остановок получается арифметическое среднее $\frac{v_1 + v_2}{2}$. При двух равных путях - гармоническое:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Разность арифметического и гармонического средних равна $\frac{(v_1 - v_2)^2}{2(v_1 + v_2)} \geq 0$, равенство только при одинаковых скоростях. Для 60 и 40 км/ч получаем соответственно 50 и 48 км/ч. Эта проверка объясняет, почему медленная половина пути сильнее влияет на результат.

07. Остановка и компенсация повышением скорости

Остановка добавляет время, но не путь. Если после неё участник увеличил скорость и прибыл вовремя, сэкономленное на оставшемся участке время равно остановке. Совпадающий начальный этап можно сразу сократить.

Пример. После остановки на 15 минут осталось 30 км. Скорость увеличена с v до $v + 10$, прибытие вовремя. Тогда $\frac{30}{v} - \frac{30}{v + 10} = \frac{1}{4}$ при $v > 0$. Получаем $v(v + 10) = 1200$, корни 30 и -40; подходит 30 км/ч. Плановое время оставшегося участка 1 ч, фактическое движение $\frac{3}{4}$ ч плюс остановка $\frac{1}{4}$ ч.

Ошибка - прибавлять время остановки к плану: план составлен без неё. Также не следует считать повышенную скорость на уже пройденном начальном участке.

08. Река, ветер и движущаяся дорожка

Собственная скорость измеряется относительно среды. При движении вдоль течения скорость относительно берега $v + u$, против течения $v - u$. Чтобы пройти положительный путь вверх по реке, требуется $v > u \geq 0$. У плота собственная скорость нулевая: он движется со скоростью u .

Для равных расстояний S туда и обратно время

$$T = \frac{S}{v+u} + \frac{S}{v-u} = \frac{2Sv}{v^2 - u^2}.$$

При $u > 0$ оно больше $\frac{2S}{v}$: течение не компенсируется, потому что медленная часть длится дольше. Средняя путевая скорость всего маршрута равна $\frac{v^2 - u^2}{v}$.

Точно такая же модель работает для ветра, направленного вдоль маршрута, и ходьбы вдоль движущейся дорожки. Но скорости можно складывать как числа только при коллинеарных направлениях. Для перпендикулярных дорог нужна геометрия.

09. Поезда: что значит полностью пройти

При прохождении столба путь поезда за указанный промежуток равен его длине L . При полном прохождении платформы длиной a голова смещается на $L + a$. Поэтому времена $\frac{L}{v}$ и $\frac{L+a}{v}$.

Если два поезда проходят друг друга полностью, относительный путь - сумма длин $L_1 + L_2$. При встречном движении относительная скорость $v_1 + v_2$, при обгоне в одну сторону - $v_6 - v_m > 0$.

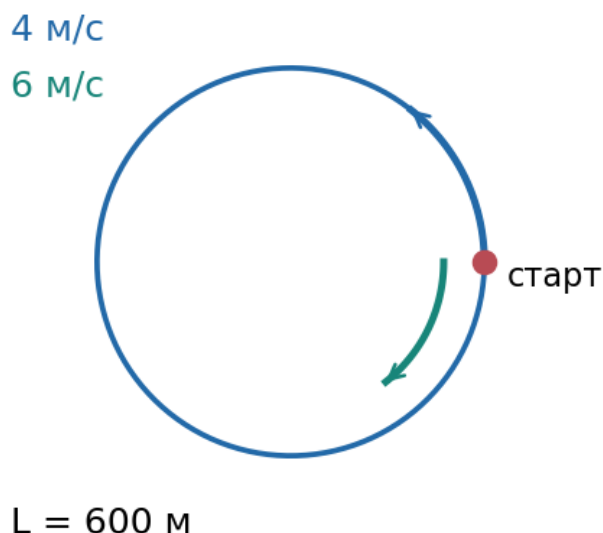
Пример. Поезд проходит столб за 10 с, платформу 200 м за 20 с. Из $L = 10v$, $L + 200 = 20v$ получаем $v = 20$ м/с и $L = 200$ м. Если скорость дана в км/ч, перед вычислением секунд переведите её в м/с.

10. Круговая дорожка и счёт встреч

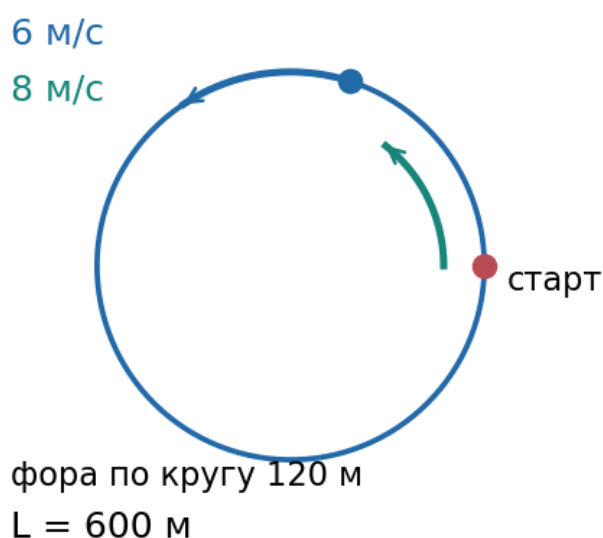
На круге длины L положения совпадают, когда разность координат, измеренных по выбранному направлению, равна целому числу L . При общем старте и движении навстречу время между встречами $\frac{L}{v_1 + v_2}$; в одну сторону при разных скоростях - $\frac{L}{|v_1 - v_2|}$.

При задержке или разных стартовых точках первая встреча определяется начальной дугой, последующие повторяются с тем же периодом. Начальное совпадение $t = 0$ не считайте, если спрашивают встречи после старта.

Пример. Длина 600 м, первый бежит 6 м/с и стартовал на 120 с раньше второго со скоростью 8 м/с. Фора по накопленному пути 720 м, но на круге первый впереди на 120 м. Первый обгон через 60 с, следующий через 360 с. Проверка общего вида: $8t - (720 + 6t) = 600k$, $k \in \mathbb{Z}$. Нужно выбрать положительные времена и упорядочить их, а не брать только $k = 0$.



Бегуны движутся навстречу: суммарная пройденная дуга до первой встречи - один круг.



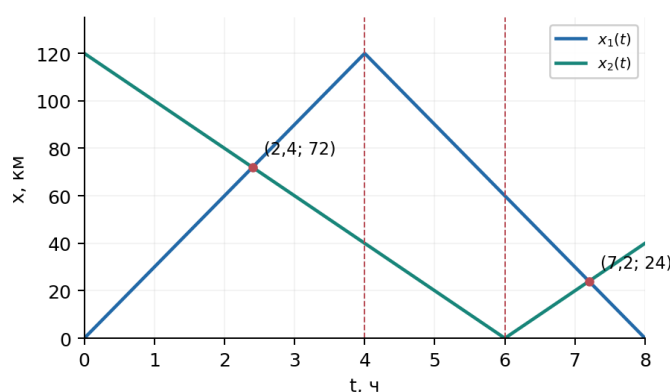
Положение к запоздалому старту: первый впереди на 120 м по кругу.

11. Координатный метод и развороты

Задайте общую ось и единое время. При постоянной направленной скорости координата $x(t) = x_0 + vt$; знак v показывает направление. Встреча означает $x_1(t) = x_2(t)$, расстояние $|x_1(t) - x_2(t)|$.

При развороте знак скорости меняется, а координата остаётся непрерывной. Если участник достиг В с координатой S в момент t_0 и едет назад со скоростью по модулю v , то $x(t) = S - v(t - t_0)$ до следующего события. Просто заменить знак у исходного выражения vt нельзя: потеряется положение в момент разворота.

Разбейте время по всем событиям обоих участников. На каждом промежутке составьте отдельное уравнение и оставьте лишь корни, попадающие в этот промежуток. Граничный момент встречи при переходе между двумя этапами учитывается один раз. На графике координаты разворот виден как смена знака наклона.



Первые две встречи - пересечения ломаных; развороты при $t = 4$ и $t = 6$.

12. Как читать графики пути и координаты

На графике пути $s(t)$ скорость равномерного этапа - отношение приращения пути к приращению времени, то есть наклон отрезка: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Горизонтальная часть соответствует остановке. Пройденный путь не убывает.

На графике координаты $x(t)$ наклон может быть отрицательным: движение в отрицательном направлении. Пересечения двух графиков координат при одном времени показывают встречи. На графике пути пересечение само по себе не доказывает встречи, поскольку начальные точки и направления могут различаться.

Пример. За первые 2 ч путь вырос до 120 км, затем 1 ч не менялся, за четвёртый час вырос до 180 км. Скорости 60, 0, 60 км/ч. Средняя $\frac{180}{4} = 45$ км/ч. Нельзя усреднить три числа без весов: длительности участков различны.

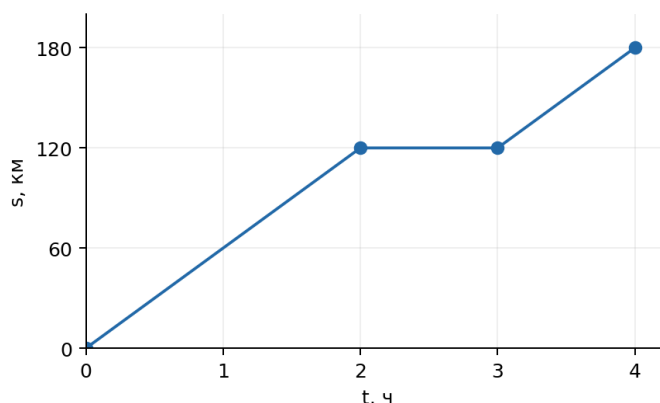


График пути: вершины (0; 0), (2; 120), (3; 120), (4; 180).

13. Перпендикулярные дороги и минимум расстояния

Если участники находятся на перпендикулярных осях в точках $(x(t); 0)$ и $(0; y(t))$, то $d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Отрицательные координаты допустимы; расстояние всегда неотрицательно.

Для минимизации расстояния удобнее минимизировать его квадрат: квадратный корень возрастает. При равномерном движении квадрат расстояния часто оказывается квадратным трёхчленом. Найдите вершину и обязательно проверьте, входит ли её время в допустимый промежуток; если нет, сравните концы.

Пример. $x = 3t - 6$, $y = 4t - 4$ на $[0; 3]$. Тогда

$$d^2 = 25t^2 - 68t + 52 = 25 \left(t - \frac{34}{25} \right)^2 + \frac{144}{25}.$$

Минимум при $t = \frac{34}{25}$ ч равен $d = \frac{12}{5}$ км. Оба участника проходят перекрёсток в разные моменты; поэтому минимальное расстояние положительно.

14. Выбор маршрута: минимум времени не равен минимуму пути

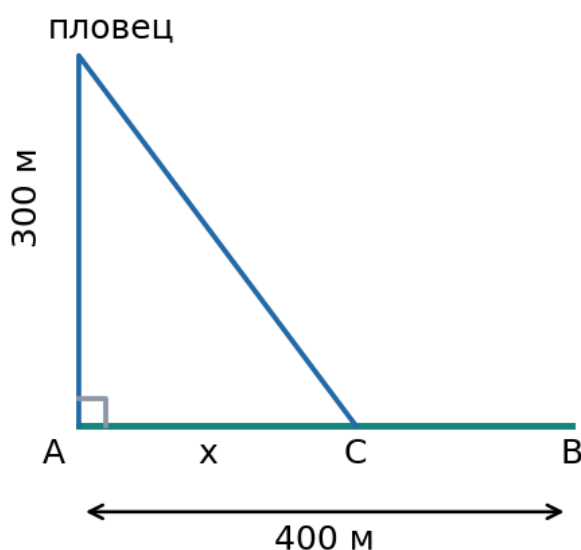
Если на двух участках скорости различны, кратчайшая геометрическая траектория не всегда самая быстрая. При плавании к берегу и беге вдоль него время складывается из длины каждого участка, делённой на соответствующую скорость.

Если расстояние до берега h , цель на расстоянии b вдоль берега, точка выхода имеет координату $x \in [0; b]$, то

$$T(x) = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_{\text{пл}}} + \frac{b - x}{v_{\text{бег}}}.$$

Внутренняя критическая точка удовлетворяет $\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{v_{\text{пл}}}{v_{\text{бег}}}$. При равных или более медленных скоростях бега такой точки внутри может не быть. Даже найденную точку нужно сверить с $[0; b]$ и сравнить с концами.

Перед возведением уравнения в квадрат фиксируйте неотрицательность обеих частей. Прикладная постановка не отменяет правил равносильности, изученных раньше.



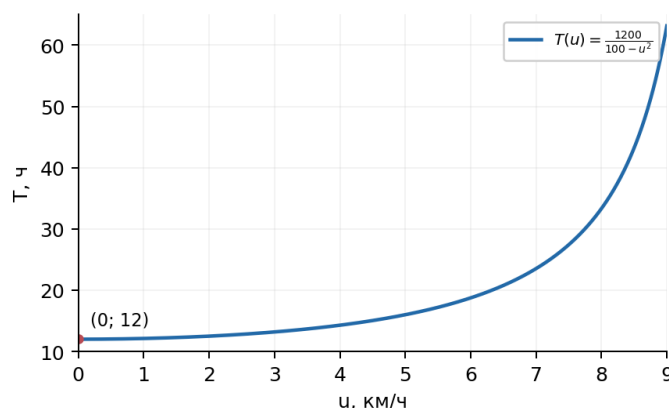
Маршрут: плавание к произвольной С на берегу и бег от С до В; положение С условное.

15. Параметр времени и полнота ответа

Когда задано неизвестное время a , нужно исследовать семейство уравнений $T(v) = a$, а не подставить один удобный пример. Горизонтальная прямая уровня a пересекает допустимую часть графика в точках возможных скоростей.

Найдите физическую область, точки изменения монотонности и значения на её границах. Критическими параметрами могут быть как экстремальные значения функции, так и значения на концах: в них корень входит в область или покидает её. Дискриминант учитывает лишь действительность корней, но не положительность скоростей и не ограничение допустимого диапазона.

Пример бюджета. Для лодки с собственной скоростью 10 км/ч и маршрутом по 60 км в обе стороны $T(u) = \frac{1200}{100 - u^2}$ на $[0; 10)$. Минимум 12 ч достигается при $u = 0$, а при $u \rightarrow 10^-$ время неограниченно растёт. Поэтому бюджет меньше 12 ч невозможен; при 12 ч течение должно быть нулевым; при большем бюджете допустим отрезок течений с вычисляемой верхней границей.



Течение увеличивает полное время; минимум 12 ч при $u = 0$.

16. Типичные ошибки и контроль модели

Перед вычислением спросите: что измеряется относительно земли, а что относительно движущейся среды? От какого старта отсчитывается время? Речь о встрече точек, полном прохождении поездов или физическом обгоне на круге?

Не заменяйте среднюю скорость полусуммой без проверки равенства времён. Не складывайте скорости при обычном догонянии. Не забывайте остановку в полном времени. Не суммируйте перпендикулярные пути вместо применения теоремы Пифагора. Не продолжайте прежнее уравнение после разворота.

После решения подставьте найденные скорости в исходные времена, проверьте положительность всех знаменателей и времён этапов. В задачах с несколькими встречами покажите, что более ранних не пропущено. В параметрических задачах отдельно проверьте равенства на каждом пороге.

Четыре задания повторения 17-20 поддерживают навыки отбора корней, решения неравенств, исследования функции и построения прикладной модели. Эти же действия понадобятся в заключительном блоке движения.