



Урок 22. Тригонометрические уравнения: полное решение

Тригонометрические уравнения: полное решение. Правила, способы проверки и восемь пошаговых разборов.

01. Что означает полное решение тригонометрического уравнения

Один подходящий угол ещё не является полным ответом. Тригонометрические функции периодичны: их значения повторяются. Общая серия описывает все повторения, а отбор на промежутке оставляет конечное число корней. Эти две задачи выполняются последовательно.

От угла на окружности к серии

Если $\sin x = 1/2$, на первом обороте получаем $\pi/6$ и $5\pi/6$. К каждому углу можно прибавить любое целое число полных оборотов: $x = \pi/6 + 2\pi n$ или $x = 5\pi/6 + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. У косинуса удобно использовать две серии с противоположными углами. У тангенса одинаковые значения повторяются уже через π .

Не делите уравнение на синус или косинус без проверки нулевого случая. В произведении $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$ первая ветвь $\sin x = 0$ содержит полноценные корни; деление на синус их уничтожит. Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю.

Как отбирать корни без угадывания

Для серии $x = \alpha + Tn$, где $T > 0$, и отрезка $[A; B]$ запишите $A \leq \alpha + Tn \leq B$. Тогда $(A - \alpha)/T \leq n \leq (B - \alpha)/T$. Возьмите все целые числа в полученном промежутке и подставьте их в серию. Для открытой границы сохраните строгое неравенство. Повторите процедуру для каждой серии, затем удалите совпадения.

Если аргумент равен $2x$, сначала решите уравнение для всего аргумента, затем разделите на два всю правую часть, включая период. Например, из $2x = \pi/2 + \pi n$ получается $x = \pi/4 + \pi n/2$. Деление только первого слагаемого приводит к потере корней.

02. Что проверяет задание 13

В задании 13 недостаточно написать несколько чисел. Требуется показать решение уравнения, получить все серии корней и затем выполнить отбор на указанном промежутке. Это две разные математические задачи: сначала найти общее множество решений, потом оставить только те элементы этого множества, которые принадлежат заданному отрезку или интервалу.

Полная запись должна быть понятна без устных пояснений. Проверяющий должен видеть, какое преобразование выполнено, какая простейшая тригонометрическая модель получена, откуда появились серии корней и каким способом проведён отбор. Короткая фраза «по окружности получаем» допустима только тогда, когда на схеме и в записи действительно указаны все нужные точки.

При изучении с начального уровня особенно важна стабильная структура. Сначала область допустимых значений, если она возникает. Затем равносильные преобразования. Потом общие

решения с условием $n \in \mathbb{Z}$. После этого отдельный блок отбора и итоговая строка. Такой шаблон снижает нагрузку на память: меняется само уравнение, но порядок действий остаётся прежним.

В ответ нельзя переносить лишние корни из соседнего периода. Нельзя также терять конец отрезка: квадратная скобка означает, что граница входит. Если промежуток записан как $[0; 2\pi]$, значения 0 и 2π рассматриваются отдельно, хотя на единичной окружности соответствуют одной и той же точке.

Полное решение тригонометрического уравнения состоит из двух разных задач. Сначала получают все корни на числовой прямой - одну или несколько серий с целым параметром. Затем отбирают только значения, принадлежащие заданному промежутку. Верная серия без отбора не отвечает условию, а несколько угаданных углов без доказательства полноты не показывают, что другие корни отсутствуют. Поэтому в записи полезно явно разделять строки «общее решение» и «отбор на промежутке». После отбора корни сортируют, удаляют совпадения и проверяют границы.

уравнение $\rightarrow$ общие серии $\rightarrow$ отбор $\rightarrow$ ответ

Ключевые правила

- Общее решение и отбор корней оформляются отдельными этапами.
- У каждой серии корней записывается $n \in \mathbb{Z}$.
- Границы промежутка проверяются по виду скобок.
- Итоговая строка содержит только отобранные корни без повторов.

03. Радианная мера и рабочая единичная окружность

Один полный оборот равен 2π , половина оборота - π , четверть - $\frac{\pi}{2}$. Радианная мера удобна тем, что периодические решения записываются через добавление $2\pi n$ для синуса и косинуса или πn для тангенса. Число n показывает, сколько полных периодов прибавлено или вычтено.

Координаты точки единичной окружности равны $(\cos x; \sin x)$. Поэтому уравнение $\sin x = a$ задаёт горизонтальный уровень $y = a$, а $\cos x = a$ - вертикальный уровень $x = a$. Пересечения соответствующей прямой с окружностью дают точки одного периода. Затем периодичность создаёт бесконечные серии.

Табличные углы нужно видеть не как разрозненный список, а как симметрии. Для синуса точки с одинаковой ординатой симметричны относительно оси Oy . Для косинуса точки с одинаковой абсциссой симметричны относительно оси Ox . Знак определяется четвертью: синус положителен в I и II, косинус - в I и IV, тангенс - в I и III.

При отборе удобно сначала оценить диапазон целого параметра n , а не бессистемно подставлять много значений. Подставьте общую формулу корня в двойное неравенство, выражающее принадлежность промежутку. Получится ограниченный набор целых n , который легко проверить.

Радианная мера связана с длиной дуги: угол в 1 радиан стягивает дугу, длина которой равна радиусу. Полный оборот соответствует 2π , половина - π , четверть - $\frac{\pi}{2}$. Для перевода градусов в радианы умножают на $\frac{\pi}{180^\circ}$, а для обратного перевода - на $\frac{180^\circ}{\pi}$. Табличные углы полезно видеть как доли полуоборота: $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Такой смысловой перевод надёжнее механического запоминания несвязанных пар.

На единичной окружности косинус - абсцисса точки, синус - ордината. Поэтому знак косинуса определяется правой или левой полуплоскостью, а знак синуса - верхней или нижней. Тангенс равен отношению ординаты к абсциссе и не существует там, где косинус равен нулю. Перед поиском углов отметьте знак правой части и назовите допустимые четверти. Этот шаг отбрасывает невозможные варианты до применения формулы.

$$(\cos x; \sin x)$$

$$x = x_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ключевые правила

- $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.
- Для синуса читается ордината, для косинуса - абсцисса точки.
- Одинаковая точка окружности может соответствовать разным концам отрезка, например 0 и 2π .

04. Простейшее уравнение с синусом

Уравнение $\sin x = a$ имеет решения только при $|a| \leq 1$. Универсальная запись использует арксинус: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$. Для табличных значений часто понятнее записать две серии, найденные по окружности. Например, при $\sin x = \frac{1}{2}$ получаются $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Две серии должны описывать обе точки одного периода. Если значение синуса отрицательно, точки лежат в III и IV четвертях. Можно использовать отрицательные представительные углы, но внутри одного решения лучше придерживаться одной системы, чтобы отбор не стал запутанным.

Крайевые случаи требуют отдельной памяти: $\sin x = 0$ даёт $x = \pi n$; $\sin x = 1$ даёт $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\sin x = -1$ даёт $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Здесь одна серия, потому что горизонтальная прямая касается окружности в одной точке.

Проверка серии выполняется подстановкой одного представителя и добавлением периода. Если $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, то прибавление $2\pi n$ не меняет значение. Для второй серии аналогично проверяется $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Для уравнения $\sin x = a$ горизонтальная прямая $y = a$ пересекает окружность обычно в двух точках. Их углы симметричны относительно вертикальной оси: если один равен $\alpha = \arcsin a$, второй равен $\pi - \alpha$. Компактная серия $x = (-1)^n \alpha + \pi n$ объединяет обе ветви, но на первом этапе полезно выписать их отдельно. Так легче выполнить отбор и понять, почему при $a = 0$ или $a = \pm 1$ две ветви фактически совпадают.

$$\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n$$

Ключевые правила

- Сначала проверяйте условие $|a| \leq 1$.
- Для обычного табличного значения синуса чаще возникают две серии.
- Для 0, 1 и -1 используйте специальные короткие формулы.

Разбор 1. Синус и две серии

УСЛОВИЕ

Решите уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ и отберите корни на $[0; 2\pi]$.

1. На одном обороте синус равен $\frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$.
2. Общие серии: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. Для обеих серий на $[0; 2\pi]$ подходит только $n = 0$.
4. Получаем $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$.
5. Проверка: обе точки имеют ординату $\frac{1}{2}$.

ОТВЕТ. Общее решение: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. На отрезке: $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\sin x = -\frac{1}{2}$ на $[0; 2\pi]$.

Синус равен одной второй

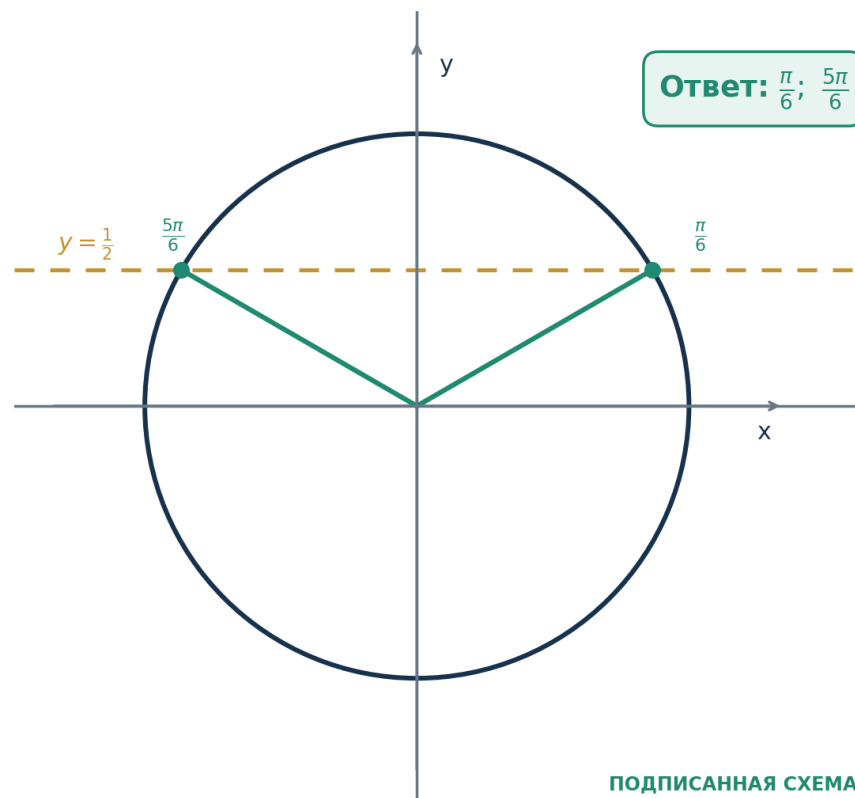


Figure 1: Разбор 1. Синус и две серии

Точки лежат в III и IV четвертях.

На одном обороте получаем $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$.

Оба значения принадлежат заданному отрезку.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

05. Простейшее уравнение с косинусом

Для уравнения $\cos x = a$ также необходимо $|a| \leq 1$. Общая формула: $x = \pm \arccos a + 2\pi n$. Знак плюс и минус задают две симметричные относительно оси Ox точки. Для $\cos x = \frac{1}{2}$ можно записать $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

При отборе на $[0; 2\pi]$ отрицательный представитель $-\frac{\pi}{3}$ удобно заменить равным ему по окружности углом $\frac{5\pi}{3}$. Однако в общем решении запись с символом $\pm$ остаётся компактной и корректной. В блоке отбора нужно явно показать, какие значения n дают нужные корни.

Особые случаи: $\cos x = 0$ даёт $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\cos x = 1$ даёт $x = 2\pi n$; $\cos x = -1$ даёт $x = \pi + 2\pi n$. Обратите внимание: у нулевого косинуса период между соседними корнями равен π , хотя период функции равен 2π .

Распространённая ошибка - использовать формулу синуса и написать $\pi - \alpha$ вместо $\pm \alpha$. Геометрическая проверка проста: одинаковый косинус означает одинаковую абсциссу, следовательно точки должны быть симметричны относительно горизонтальной оси.

Для $\cos x = a$ точки симметричны относительно горизонтальной оси, поэтому возникают углы $\pm \alpha + 2\pi n$, где $\alpha = \arccos a$. Если отбор идёт на $[0; 2\pi]$, отрицательный представитель заменяют сонаправленным положительным углом $2\pi - \alpha$. Например, при $\cos x = \frac{1}{2}$ получаем $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$. Запись обеих точек на окружности одновременно даёт значение функции, знак и положение корней.

$$\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Ключевые правила

- Для косинуса естественна запись $\pm \arccos a + 2\pi n$.
- Одинаковый косинус означает одинаковую абсциссу.
- Уравнение $\cos x = 0$ имеет шаг корней π .

Разбор 2. Косинус и симметрия

УСЛОВИЕ

Решите $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[-\pi; \pi]$.

1. Опорный угол равен $\frac{\pi}{6}$, косинус отрицателен во II и III четвертях.
2. Общее решение можно записать как $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
3. На $[-\pi; \pi]$ подходят $-\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.
4. Соседние значения при $n = \pm 1$ выходят за границы.
5. Косинусы выбранных углов равны $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ОТВЕТ.

$$-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Косинус равен минус корень из трёх пополам

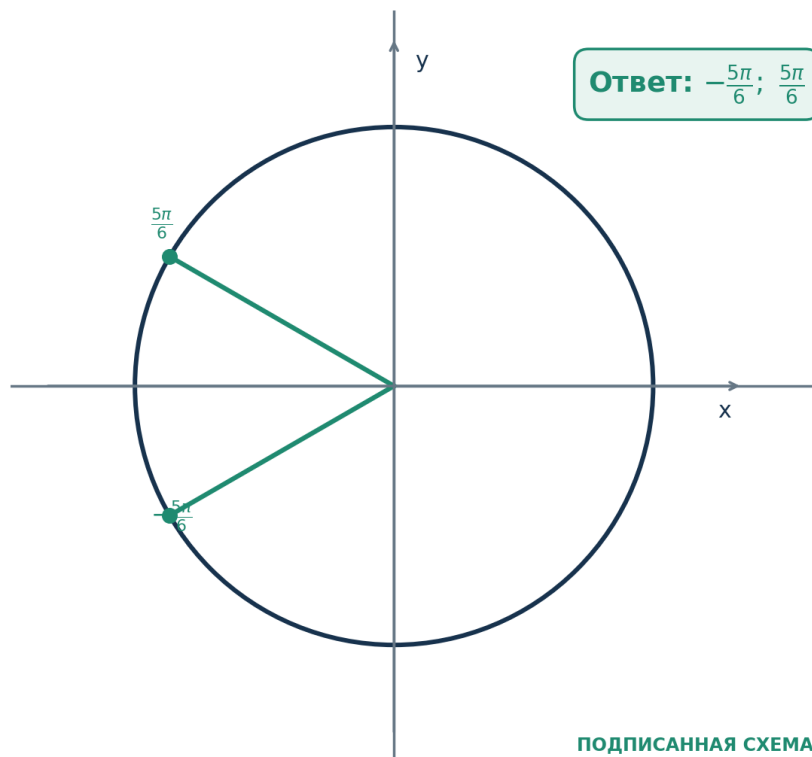


Figure 2: Разбор 2. Косинус и симметрия

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\cos x = -\frac{1}{2}$ на $[0; 2\pi]$.

Опорный угол $\frac{\pi}{3}$.

Косинус отрицателен во II и III четвертях.

Корни: $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

06. Тангенс и его период

Тангенс определён там, где $\cos x \neq 0$. Уравнение $\tan x = a$ имеет одну серию $x = \arctan a + \pi n$, потому что период тангенса равен π . Для табличных значений достаточно выбрать один угол и прибавлять целое число периодов.

Знак тангенса положителен в I и III четвертях, отрицателен во II и IV. Например, $\tan x = -1$ можно представить углом $-\frac{\pi}{4}$, поэтому $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. На промежутке $[0; 2\pi]$ это даст $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

Если уравнение получено делением на $\cos x$, нужно заранее проверить, не потеряны ли случаи $\cos x = 0$. Безопаснее переносить всё в одну сторону и раскладывать на множители. Деление на выражение, которое может быть равно нулю, меняет множество решений.

При отборе шаг π означает, что на промежутке длиной 2π обычно появляются два корня. Это быстрая оценка, но границы всё равно проверяются отдельно.

Период тангенса равен π , потому что при повороте на половину оборота обе координаты точки меняют знак, а их отношение сохраняется. Поэтому серия содержит πn , а не $2\pi n$. При отборе обязательно исключают точки $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где косинус равен нулю. Если уравнение получено после

преобразований с делением на косинус, эти ограничения записывают до деления: иначе можно потерять или добавить корни.

$$\tan x = a \Rightarrow x = \arctan a + \pi n$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

Ключевые правила

- Период тангенса равен π .
- Перед делением на $\cos x$ проверьте возможность нулевого значения.
- Для отрицательного тангенса удобно использовать отрицательный основной угол.

Разбор 3. Тангенс и период π

УСЛОВИЕ

Решите $\tan x = 1$ на $[-\pi; \pi]$.

Тангенс равен единице

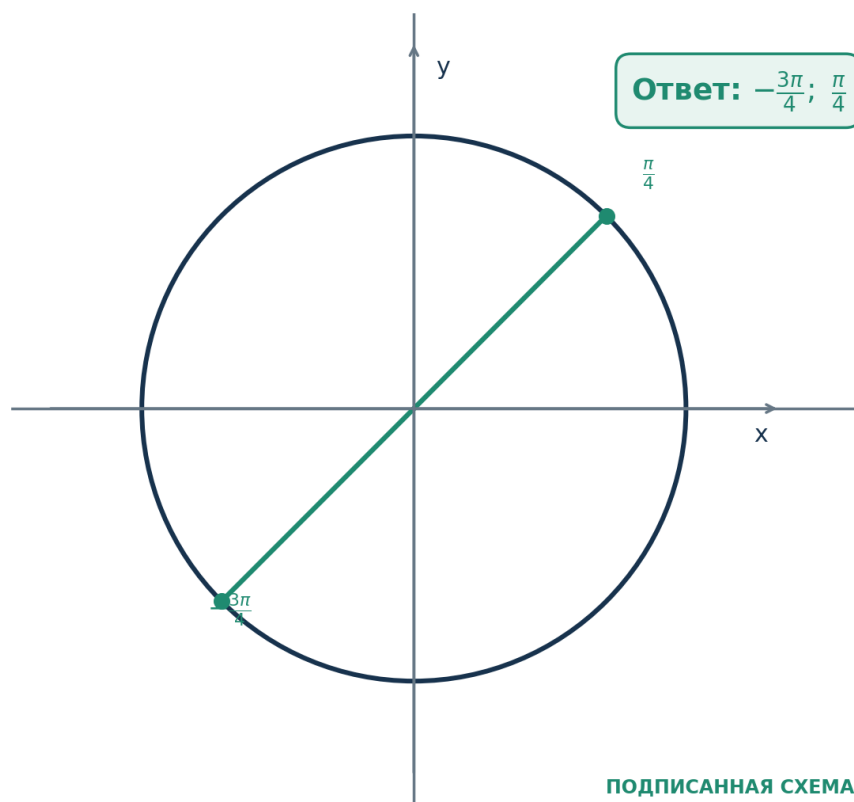


Figure 3: Разбор 3. Тангенс и период π

1. Основной угол: $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
2. Общее решение: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
3. Неравенство $-\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \leq \pi$ даёт $-\frac{5}{4} \leq n \leq \frac{3}{4}$.
4. Целые значения: $n = -1$ и $n = 0$.
5. Корни: $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

ОТВЕТ.

$$-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\tan x = -1$ на $[0; 2\pi]$.

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Подходят $n = 1$ и $n = 2$.

Получаем $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

07. Сдвиг аргумента и замена переменной

Если внутри функции стоит выражение $kx + b$, сначала обозначьте его новой переменной $t = kx + b$. Решите простейшее уравнение относительно t , а затем вернитесь к x . Это защищает от потери коэффициента при аргументе.

Например, из $\sin(2x) = 0$ следует $2x = \pi n$, а затем $x = \frac{\pi n}{2}$. Нельзя сразу написать $x = \pi n$: это решение другого уравнения. При сдвиге $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ сначала получают $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, затем вычитают $\frac{\pi}{3}$.

Отбор можно проводить уже для x или сначала ограничить новую переменную. Обычно безопаснее получить общие серии для x и только потом подставить в границы. Если коэффициент при x отрицательный, при делении неравенства знак меняется - это важно при вычислении диапазона n .

Проверка выполняется подстановкой одного найденного корня в исходный аргумент. Если $x = \frac{\pi}{6}$ решает $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, то аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, и косинус действительно равен нулю.

При сдвиге аргумента удобно временно обозначить весь аргумент одной буквой: $t = x - \frac{\pi}{6}$ или $t = 2x + \frac{\pi}{3}$. Сначала решают стандартное уравнение относительно t , затем возвращаются к x . Если коэффициент при x не равен единице, делить нужно всю правую часть серии, включая периодический член. Например, из $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ следует $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, а не $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

$$\sin(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2}$$

Ключевые правила

- Сначала решайте относительно всего аргумента.
- После получения серии обязательно возвращайтесь к переменной x .
- Корень проверяется в исходном, а не только в преобразованном уравнении.

Разбор 4. Аргумент два икс

УСЛОВИЕ

Решите $\sin 2x = 0$ на $[0; \pi]$.

1. Для синуса $\sin t = 0$ получаем $t = \pi n$.
2. Здесь $t = 2x$, поэтому $2x = \pi n$.
3. $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. Из $0 \leq \frac{\pi n}{2} \leq \pi$ следует $0 \leq n \leq 2$.
5. При $n = 0, 1, 2$ получаем $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

ОТВЕТ.

$$0; \frac{\pi}{2}; \pi$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Нули синуса двойного угла

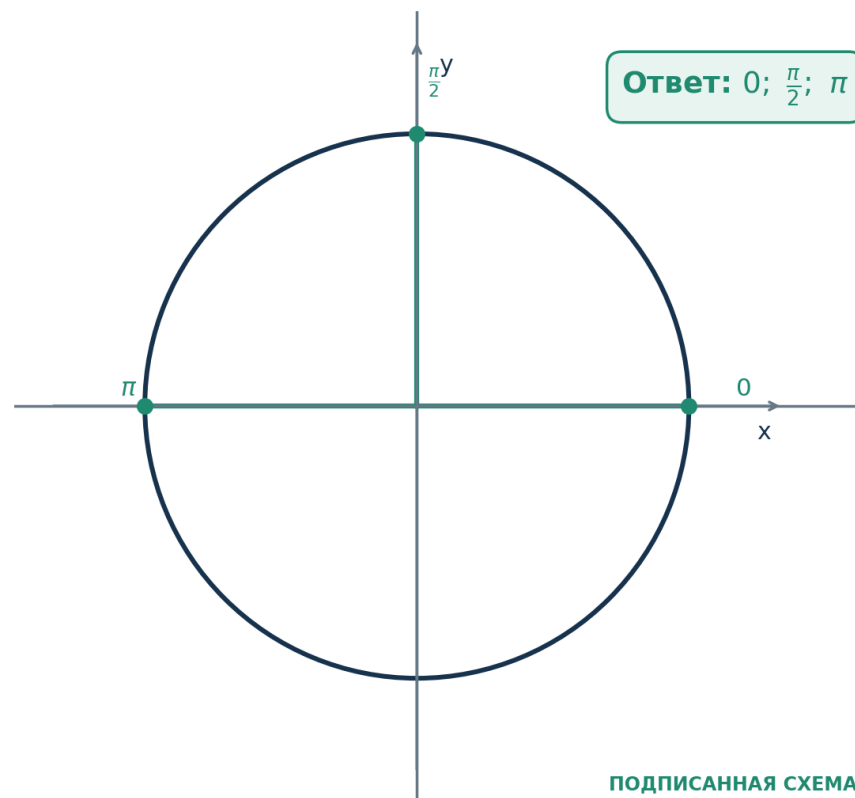


Figure 4: Разбор 4. Аргумент два икс

Решите $\cos 2x = 0$ на $[0; \pi]$.

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

На отрезке подходят $n = 0, 1 : \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

08. Разложение на множители и совокупности

Если произведение равно нулю, хотя бы один множитель равен нулю. Поэтому уравнение $\sin x (2 \cos x - 1) = 0$ распадается на совокупность $\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. Каждое простейшее уравнение решается отдельно, а множества корней объединяются.

Совокупность означает «или», система - «и». В тригонометрии это различие критично. Для произведения нужна совокупность. Для дроби, равной нулю, числитель должен быть равен нулю одновременно с условием ненулевого знаменателя - это уже сочетание уравнения и ограничения.

После объединения серий возможны повторы. Например, в уравнении $\sin x (1 + \cos x) = 0$ корень $x = \pi + 2\pi n$ возникает и из $\sin x = 0$, и из $\cos x = -1$. В итоговом ответе каждый корень записывают один раз.

Разложение на множители обычно лучше деления. Если поделить уравнение на $\sin x$, все корни с $\sin x = 0$ будут потеряны. Поэтому сначала перенесите все члены в одну сторону, вынесите общий множитель и только затем решайте совокупность.

Разложение на множители превращает одно сложное условие в совокупность простых: произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один множитель равен нулю. Нельзя делить на множитель с переменной, не рассмотрев случай, когда он равен нулю. Например, из $\sin x (2 \cos x - 1) = 0$ получают две ветви, а деление на $\sin x$ уничтожило бы корни первой ветви. После решения ветвей объединяют корни и удаляют совпадения.

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ или } B = 0.$$

Ключевые правила

- Произведение равно нулю - решаем совокупность.
- Не делите на выражение с переменной без отдельного рассмотрения его нулей.
- После объединения удаляйте повторяющиеся корни.

Разбор 5. Произведение и совокупность

УСЛОВИЕ

Решите $\sin x (2 \cos x - 1) = 0$ на $[0; 2\pi]$.

1. Произведение равно нулю, поэтому $\sin x = 0$ или $2 \cos x - 1 = 0$.
2. Первая ветвь: $x = \pi n$; на отрезке получаем $0, \pi, 2\pi$.
3. Вторая ветвь: $\cos x = \frac{1}{2}$; получаем $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$.
4. Объединяем и располагаем по возрастанию.
5. Повторов нет, все пять значений удовлетворяют исходному произведению.

ОТВЕТ.

$$0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\cos x (2 \sin x - 1) = 0$ на $[0; 2\pi]$.

$$\cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Первая ветвь даёт $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Совокупность двух тригонометрических условий

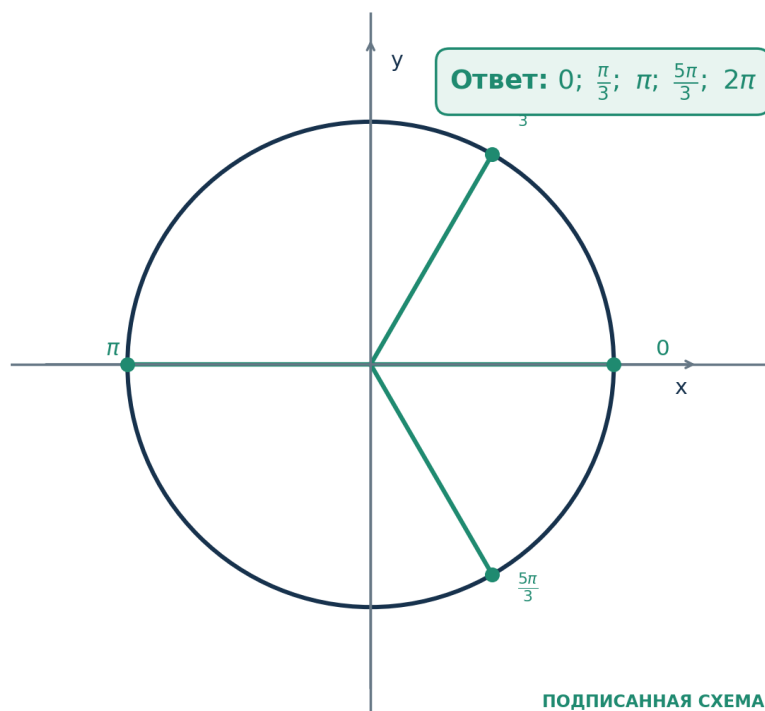


Figure 5: Разбор 5. Произведение и совокупность

Вторая даёт $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; объединяем четыре корня.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

09. Тождества и формулы двойного угла

Тождества нужны для перехода к одной функции или к произведению. Базовое равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ позволяет заменить квадрат одной функции через другую. Формула $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ превращает произведение в простейшее уравнение с двойным аргументом.

Формула косинуса двойного угла имеет три формы: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$. Выбирайте форму по тому, какая функция уже есть в уравнении. Цель - уменьшить число разных функций, а не применить как можно больше формул.

При замене квадрата появляется уравнение вида $\sin^2 x = a$ или $\cos^2 x = a$. Можно извлечь корень и получить две возможности со знаком плюс и минус. Например, из $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ следует $\cos x = \pm \frac{1}{2}$, поэтому на одном обороте обычно четыре корня.

Каждое тождественное преобразование должно сохранять область определения. У синуса и косинуса ограничений нет, а появившийся тангенс потребует $\cos x \neq 0$. Поэтому не следует без необходимости делить тождество на $\cos^2 x$.

Тождество выбирают по цели. Если присутствуют квадраты синуса и косинуса, один заменяют через единицу минус другой. Если есть произведение $2 \sin x \cos x$, оно сворачивается в $\sin 2x$. Формула двойного угла для косинуса имеет несколько форм; выбирают ту, которая оставляет одну функцию. Перед преобразованием стоит назвать, к какому простейшему уравнению вы хотите прийти, - это предотвращает бесцельное усложнение выражения.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

Ключевые правила

- Выбирайте форму двойного угла, которая оставляет одну функцию.
- Из $u^2 = a$ при $a > 0$ следуют два случая $u = \pm\sqrt{a}$.
- Не создавайте ограничения делением, если задача решается без него.

10. Алгебраическая замена в тригонометрии

Если уравнение содержит только $\sin x$ и $\sin^2 x$, можно ввести $t = \sin x$. Получится обычное квадратное уравнение. После его решения обязательно применяется ограничение $-1 \leq t \leq 1$: корни квадратного уравнения вне этого отрезка не могут быть значениями синуса.

Аналогично для косинуса используют $t = \cos x$ и то же ограничение. Затем каждый допустимый корень t превращается в отдельное простейшее тригонометрическое уравнение. Нельзя остановиться на значениях t : задача спрашивает значения x .

Замена полезна, когда выражение уже является квадратным относительно одной функции, например $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. Факторизация даёт $(2t - 1)(t + 1) = 0$, откуда $t = \frac{1}{2}$ или $t = -1$. Обе величины допустимы и дают свои серии.

В полной записи укажите саму замену и её допустимый диапазон. После возврата к x выполните отбор для каждой серии, а затем объедините результаты без повторов.

Алгебраическая замена $t = \sin x$ или $t = \cos x$ требует ограничения $-1 \leq t \leq 1$. Квадратное уравнение может дать значение вне этого отрезка; его отбрасывают до возвращения к углам. Затем для каждого допустимого t решают отдельное тригонометрическое уравнение. В ответе остаются значения x , а не промежуточной переменной. Проверка включает подстановку допустимых значений функции в исходное алгебраическое выражение.

$$t = \sin x, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$t = \cos x, \quad -1 \leq t \leq 1$$

Ключевые правила

- Для $t = \sin x$ и $t = \cos x$ всегда записывайте $t \in [-1; 1]$.
- Решение относительно t - промежуточный этап.
- Каждый допустимый корень замены даёт отдельное простейшее уравнение.

Разбор 6. Квадратное уравнение относительно косинуса

УСЛОВИЕ

Решите $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ на $[0; 2\pi]$.

1. Положим $t = \cos x$, где $-1 \leq t \leq 1$.
2. Получаем $2t^2 + t - 1 = 0$, то есть $(2t - 1)(t + 1) = 0$.
3. Допустимые значения: $t = \frac{1}{2}$ и $t = -1$.
4. Из $\cos x = \frac{1}{2}$ получаем $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$; из $\cos x = -1$ получаем π .
5. Все три корня лежат на отрезке и подстановка подтверждает равенство.

ОТВЕТ.

$$\frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Два допустимых значения косинуса

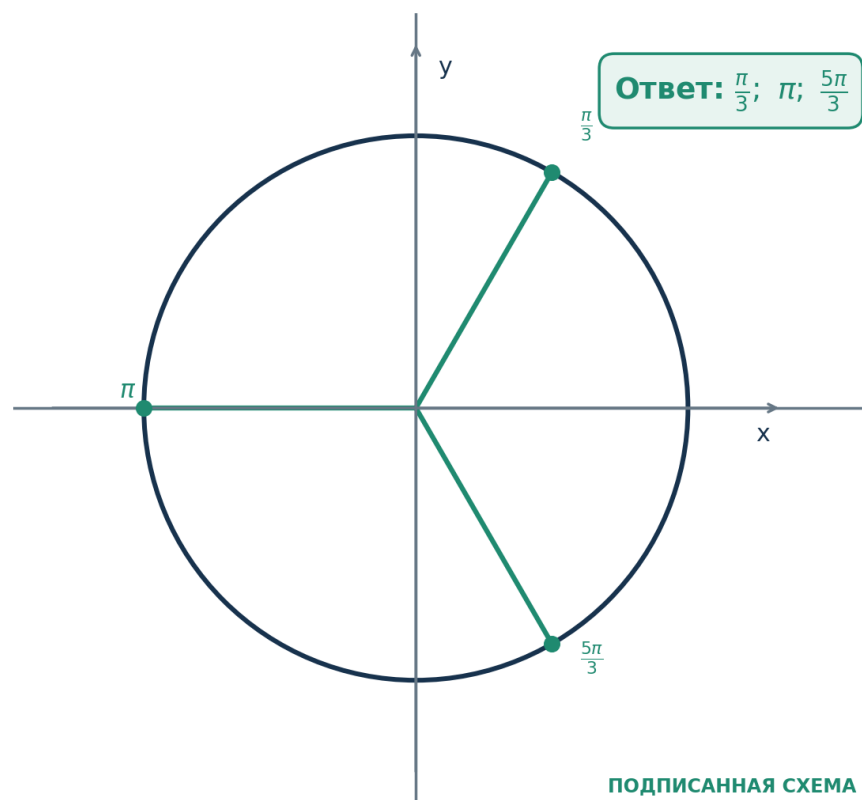


Figure 6: Разбор 6. Квадратное уравнение относительно косинуса

Решите $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ на $[0; 2\pi]$.

$t = \sin x$, $(2t - 1)(t - 1) = 0$.

$t = \frac{1}{2}$ или $t = 1$.

Корни: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

11. Отбор корней и окончательная проверка

Самый надёжный способ отбора - для каждой серии записать двойное неравенство. Если $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и требуется $x \in [0; 2\pi]$, получаем $0 \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi$. После деления на 2π видно, что подходит только $n = 0$.

Для короткого промежутка допустим перебор нескольких соседних значений n , но он должен быть организован. Запишите, почему меньшие n уже выводят корень левее границы, а большие - правее. Случайный список подстановок не доказывает полноту отбора.

Графический отбор по окружности удобен на промежутке длиной не более одного оборота. На длинных промежутках один и тот же луч соответствует нескольким значениям, поэтому требуется добавить периоды и отдельно учитывать границы. Чертёж помогает увидеть точки, но не заменяет числовую запись.

Финальная проверка состоит из трёх вопросов. Каждый ли записанный корень принадлежит промежутку? Удовлетворяет ли он исходному уравнению? Доказано ли, что других корней нет? Если ответы положительные, итоговая строка готова.

Надёжный отбор выполняют через двойное неравенство. Если серия имеет вид $x = \alpha + Tn$ и требуется $a \leq x \leq b$, записывают $a \leq \alpha + Tn \leq b$, вычитают α , делят на положительный T и находят все целые n в полученном промежутке. Затем значения n подставляют в серию. Такой способ доказывает полноту и автоматически контролирует включённые границы. Для нескольких серий отбор делают отдельно.

После отбора проверяют каждый пограничный корень в исходном уравнении и его принадлежность промежутку. На закрытом отрезке обе границы допускаются, на открытом - нет. Если промежуток длиннее периода, число корней можно оценить по окружности: это помогает заметить потерянную ветвь. Ответ записывают в возрастающем порядке, отделяя значения точкой с запятой.

$$a \leq x_0 + Tn \leq b \Rightarrow n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$$

Ключевые правила

- Отбор выполняется отдельно для каждой серии.
- Границы проверяются даже тогда, когда соответствуют одной точке окружности.
- Ответ записывается по возрастанию и без повторов.

12. Типичные ошибки и способы самопроверки

- Записать только корни на промежутке, не получив общее решение.
- Использовать период 2π для тангенса вместо π .
- Потерять множитель при аргументе, например из $\sin 2x = 0$ получить $x = \pi n$.
- Разделить уравнение на $\sin x$ или $\cos x$ и потерять нулевые случаи.
- Перепутать совокупность «или» и систему «и».
- Не записать ограничение $t \in [-1; 1]$ при замене $t = \sin x$ или $t = \cos x$.
- Не проверить включение концов отрезка.
- Записать один и тот же корень дважды после объединения ветвей.
- Провести отбор по рисунку, но не доказать полноту значений параметра n .

13. Дополнительные разборы

Разбор 7. Разложение через основное тригонометрическое тождество

УСЛОВИЕ

а) Решите уравнение. б) Укажите корни на отрезке $[-7\pi/2; -2\pi]$.

$$2 \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 2 \cos^3 x$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. Переносим куб косинуса к линейному косинусу и выносим $\sin^2 x$ как общий множитель.

ДО РЕШЕНИЯ. После получения серий отдельно и аккуратно отбираем значения на закрытом отрезке.

1. Собираем левую часть

$$2 \cos x - 2 \cos^3 x - \sqrt{3} \sin^2 x = 0$$

Переносим всё в одну сторону.

2. Используем $1 - \cos^2 x$

$$2 \cos x (1 - \cos^2 x) - \sqrt{3} \sin^2 x = 0$$

Разность $\cos x - \cos^3 x$ содержит множитель $1 - \cos^2 x$.

3. Факторизуем

$$\sin^2 x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

По тождеству $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.

4. Записываем серии

$$x = \pi n$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем $\sin x = 0$ и $\cos x = \sqrt{3}/2$.

5. Отбираем на отрезке

$$x = -3\pi; -\frac{13\pi}{6}; -2\pi$$

Проверяем каждую серию относительно обеих границ.

Проверка. Крайняя точка -2π входит: отрезок закрытый, а $\sin(-2\pi) = 0$.

Типичная ошибка. Сократить на $\sin^2 x$ и потерять целую серию $x = \pi n$.

ОТВЕТ. $x = \pi n$ или $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; -3\pi, -\frac{13\pi}{6}, -2\pi$

Разбор 8. Сумма квадратов и формулы двойного угла

УСЛОВИЕ

а) Решите уравнение. б) Найдите все корни на отрезке $[5\pi; 6\pi]$.

$$\cos^2 x + \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. Квадраты синуса и косинуса переводим к функциям двойного угла.

ДО РЕШЕНИЯ. После преобразования получится одно уравнение для линейной комбинации $\cos 2x$ и $\sin 2x$.

1. Раскрываем квадраты

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 - \sin 2x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2x - \pi/2) = \sin 2x.$$

2. Упрощаем

$$\cos 2x - \sin 2x = -1$$

Умножаем равенство на 2 и переносим постоянные.

3. Сворачиваем

$$\sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$$

Используем $\cos u - \sin u = \sqrt{2} \cos(u + \pi/4)$.

4. Получаем серии

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Косинус равен $-\sqrt{2}/2$ в двух четвертях.

5. Отбираем

$$x = \frac{21\pi}{4}; \frac{11\pi}{2}$$

Только $n=5$ в каждой серии попадает в $[5\pi; 6\pi]$.

Проверка. Оба значения лежат между 5π и 6π и дают левую часть $1/2$.

Типичная ошибка. Потерять знак при вычислении $\cos(2x - \pi/2) = \sin 2x$.

ОТВЕТ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{21\pi}{4}, \frac{11\pi}{2}$