

## Урок 14. Текстовые задачи: движение

Задачу на движение удобно начинать с таблицы пути, скорости и времени. Разберём встречу, догоняние, движение по реке и круговой трассе, среднюю скорость и прохождение поездом тоннеля. Восемь примеров показывают, как составить уравнение и проверить его корни.

### 01. Три величины движения

Для равномерного движения путь, скорость и время связаны равенством  $s = vt$ . Из него получаются  $t = s/v$  и  $v = s/t$ . Здесь скорость постоянна на рассматриваемом участке, время положительно, а единицы согласованы: километры с часами или метры с секундами.

Перед составлением уравнения полезно сделать таблицу. В каждой строке - один участник или один этап пути, в столбцах - путь, скорость и время. Если величина неизвестна, выразите её через выбранную переменную. Не добавляйте в одну строку разные этапы с разными скоростями.

### 02. Встреча и догоняние

При движении навстречу расстояние между участниками за час уменьшается на сумму пройденных ими расстояний. Поэтому скорость сближения равна  $v_1 + v_2$ , а время встречи -  $S/(v_1 + v_2)$ .

При движении в одном направлении быстрый сокращает отрыв на  $v_{\text{быстр}} - v_{\text{медл}}$  за час. Для догоняния нужно, чтобы эта разность была положительной. Если впереди более быстрый участник, догоняния при постоянных скоростях не будет.

**Запомните.** Время до встречи считают от указанного в вопросе момента. При позднем старте одного участника сначала вычисляют расстояние, которое первый успел пройти.

Например, велосипедист со скоростью 12 км/ч получает двухчасовую фору: его отрыв равен 24 км. Второй едет 18 км/ч и сокращает отрыв на 6 км в час. Он догонит первого через 4 часа после своего старта; первый к этому моменту будет в пути 6 часов.



Рис. 1: Встречное движение: за 3 часа машины проходят 180 и 240 км, всего 420 км.

### 03. Движение по реке

Собственная скорость  $v$  - скорость лодки относительно воды, скорость течения  $u$  - скорость воды относительно берега. По течению относительно берега получается  $v + u$ , против течения -  $v - u$ . Для продвижения вверх по реке требуется  $v > u$ .

Из известных скоростей по течению и против него можно восстановить обе величины:

$$v = \frac{v_{\text{по}} + v_{\text{против}}}{2}, \quad u = \frac{v_{\text{по}} - v_{\text{против}}}{2}.$$

Если расстояния туда и обратно одинаковы, приравняйте пути:  $t_1(v + u) = t_2(v - u)$ . Если дано общее время, складывайте времена:  $S_1/(v + u) + S_2/(v - u) = T$ . После решения уравнения проверьте  $v > u$  и подставьте скорость в обе части маршрута.

### 04. Средняя скорость

Средняя скорость за поездку равна общему пути, делённому на всё затраченное время:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2 + \dots}{t_1 + t_2 + \dots}.$$

Среднее арифметическое скоростей подходит только для равных промежутков времени. На равных расстояниях медленный участок занимает больше времени и сильнее влияет на итог. Для двух равных участков без остановок получается  $2v_1v_2/(v_1 + v_2)$ .

При скоростях 60 и 40 км/ч на равных расстояниях результат равен 48 км/ч. Он лежит между 40 и 60, но ниже их среднего арифметического. Остановка добавляет время и не добавляет путь, поэтому уменьшает среднюю скорость за всю поездку.

### 05. Поезда, платформы и тоннели

Чтобы поезд полностью прошёл столб, его передняя точка должна пройти длину поезда. Чтобы весь поезд миновал тоннель, нужно пройти сумму длин поезда и тоннеля. Для полного расхождения двух поездов относительный путь равен сумме их длин.

Если поезда движутся навстречу, относительная скорость - сумма; при обгоне в одном направлении - разность. Длины обычно даны в метрах, поэтому км/ч переводят в м/с до деления. Слово «полностью» определяет, какие длины надо сложить.

### 06. Движение по кругу

При старте из одной точки в противоположных направлениях первая встреча после старта произойдёт, когда сумма пройденных путей составит длину круга  $L$ :  $t = L/(v_1 + v_2)$ . При одном направлении быстрый должен выиграть у медленного целый круг:  $t = L/|v_1 - v_2|$ , если скорости различны.

### 07. Самопроверка модели

Укажите начало отсчёта времени, проверьте единицы и положительность всех времён. В ответе на вопрос о средней скорости учитывайте остановки, если речь о всей поездке. Найденный корень проверяйте исходным условием, особенно если при решении умножали на выражение с неизвестной в знаменателе.

## 08. Подробные объяснения и разобранные примеры

### Разбор 1. Находим время по пути и скорости

#### УСЛОВИЕ

Автобус проехал 270 км со скоростью 90 км/ч. Сколько часов длилась поездка?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Если известны путь и скорость, время равно пути, делённому на скорость.

ДО РЕШЕНИЯ.

За один час автобус проходит 90 км; в 270 км содержится три таких участка.

#### 1. Выписываем величины

$$s = 270 \text{ км}, \quad v = 90 \text{ км/ч}$$

Единицы уже согласованы.

#### 2. Выбираем формулу

$$t = \frac{s}{v}$$

Из  $s=vt$  делим обе части на  $v$ .

#### 3. Подставляем

$$t = \frac{270}{90} = 3$$

Путь делим на скорость, а не наоборот.

#### 4. Проверяем

$$90 \cdot 3 = 270$$

Обратное действие возвращает исходный путь.

**Проверка.** км ÷ (км/ч) = ч.

**Типичная ошибка.** Вычислить  $90/270$  и получить величину без физического смысла.

**ОТВЕТ.** 3 часа; в краткий ответ записывается число 3.

3

### Разбор 2. Движение навстречу

#### УСЛОВИЕ

Из двух городов, расстояние между которыми 420 км, одновременно выехали навстречу друг другу автомобили со скоростями 60 и 80 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

При движении навстречу за каждый час участники вместе сокращают расстояние на сумму скоростей.

ДО РЕШЕНИЯ.

Суммарно они проходят 140 км за час; 420 - три таких порции.

**1. Находим скорость сближения**

$$v_{\text{сближ}} = 60 + 80 = 140$$

Оба движутся к месту встречи с разных сторон.

**2. Записываем общий путь**

$$420 = (60 + 80)t$$

К моменту встречи сумма пройденных расстояний равна 420 км.

**3. Находим время**

$$t = \frac{420}{140} = 3$$

Делим начальное расстояние на скорость его сокращения.

**4. Проверяем частями**

$$60 \cdot 3 + 80 \cdot 3 = 180 + 240 = 420$$

Пройденные участки точно заполняют всё расстояние.

**Проверка.** Оба времени одинаковы - 3 часа, как и должно быть при одновременной встрече.

**Типичная ошибка.** Вычесть скорости, хотя участники движутся навстречу.

**ОТВЕТ.**

3

### **Разбор 3. Догонка после более раннего старта**

**УСЛОВИЕ**

Пешеход идёт со скоростью 5 км/ч. Через 2 часа вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 15 км/ч. Через сколько часов после своего старта велосипедист догонит пешехода?

**КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.**

Сначала находим начальную фору, затем делим её на разность скоростей.

ДО РЕШЕНИЯ.

Пешеход получил фору 10 км; велосипедист сокращает её на 10 км каждый час.

**1. Находим фору**

$$s_0 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ км}$$

Столько пешеход прошёл до старта велосипедиста.

**2. Находим скорость сближения**

$$v_{\text{дог}} = 15 - 5 = 10 \text{ км/ч}$$

Они движутся в одном направлении.

**3. Находим время догонки**

$$t = \frac{10}{10} = 1 \text{ ч}$$

Фора делится на скорость её уменьшения.

**4. Сверяем расстояния**

$$15 \cdot 1 = 15; \quad 5 \cdot (2 + 1) = 15$$

К моменту встречи оба находятся в 15 км от старта.

**Проверка.** Ответ отсчитывается после старта велосипедиста, как требует вопрос.

**Типичная ошибка.** Ответить 3 часа - это время пешехода, а не велосипедиста.

**ОТВЕТ.**

1

**Разбор 4. Средняя скорость на двух равных участках****УСЛОВИЕ**

Половину пути автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую половину - 90 км/ч. Найдите среднюю скорость на всём пути.

**КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.**

При равных расстояниях времена различны, поэтому используем весь путь, делённый на всё время.

**ДО РЕШЕНИЯ.**

Средняя скорость лежит между 60 и 90 и должна быть ближе к 60, потому что на медленном участке потрачено больше времени.

**1. Выбираем удобный общий путь**

$$s = 180 \text{ км}, \quad s_1 = s_2 = 90 \text{ км}$$

90 делится на обе скорости без сложных дробей.

**2. Находим времена**

$$t_1 = \frac{90}{60} = 1,5; \quad t_2 = \frac{90}{90} = 1$$

Для каждого участка  $t = s/v$ .

### 3. Складываем

$$t_{\text{общ}} = 2,5 \text{ ч}$$

Средняя скорость учитывает всё время.

### 4. Делим весь путь на всё время

$$v_{\text{ср}} = \frac{180}{2,5} = 72$$

Это определение средней скорости.

**Проверка.** 72 находится между 60 и 90 и меньше арифметического среднего 75.

**Типичная ошибка.** Вычислить  $(60+90)/2=75$ : так можно только при равных временах.

**ОТВЕТ.**

72

## Разбор 5. Путь по течению и против течения

### УСЛОВИЕ

Собственная скорость катера 18 км/ч, скорость течения 3 км/ч. Катер прошёл 42 км против течения и 42 км по течению. Сколько часов занял весь путь без остановок?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

К собственной скорости прибавляем течение по ходу реки и вычитаем против него; времена участков складываем.

ДО РЕШЕНИЯ.

Против течения скорость 15 км/ч, по течению 21 км/ч; первый участок займёт больше времени.

#### 1. Находим скорости

$$v_{\uparrow} = 18 - 3 = 15; \quad v_{\downarrow} = 18 + 3 = 21$$

Течение мешает вверх и помогает вниз.

#### 2. Находим время против течения

$$t_{\uparrow} = \frac{42}{15} = 2,8$$

Используем  $t=s/v$ .

#### 3. Находим время по течению

$$t_{\downarrow} = \frac{42}{21} = 2$$

Вниз катер движется быстрее.

**4. Складываем времена**

$$t = 2,8 + 2 = 4,8 \text{ ч}$$

Путь состоит из двух последовательных участков.

**Проверка.** 4,8 часа = 4 часа 48 минут; значение больше  $84/18 \approx 4,67$ , потому что медленный участок влияет сильнее.

**Типичная ошибка.** Сложить скорости или использовать 18 км/ч для обоих участков.

**ОТВЕТ.**

$$4,8$$

**Разбор 6. Два поезда проходят друг мимо друга****УСЛОВИЕ**

По параллельным путям навстречу движутся скорый и пассажирский поезда со скоростями 85 и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда 250 м. Найдите длину скорого, если они полностью прошли друг мимо друга за 30 секунд. Ответ дайте в метрах.

**КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.**

При полном прохождении поезда преодолевают сумму своих длин с относительной скоростью, которую нужно перевести в м/с.

**ДО РЕШЕНИЯ.**

Скорость сближения 120 км/ч - это больше 30 м/с; за 30 секунд сумма длин около километра.

**1. Складываем скорости**

$$v_{\text{сближ}} = 85 + 35 = 120 \text{ км/ч}$$

Поезда движутся навстречу.

**2. Переводим в м/с**

$$120 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{100}{3} \text{ м/с}$$

Время дано в секундах, длины - в метрах.

**3. Находим сумму длин**

$$L_1 + L_2 = \frac{100}{3} \cdot 30 = 1000 \text{ м}$$

За время прохождения относительное перемещение равно сумме длин.

**4. Вычитаем известную длину**

$$L_{\text{скор}} = 1000 - 250 = 750 \text{ м}$$

250 м приходится на пассажирский поезд.

**Проверка.**  $(750+250)/(100/3)=30$  секунд.

**Типичная ошибка.** Использовать только длину одного поезда или смешать км/ч с секундами.

**ОТВЕТ.**

750

## Разбор 7. Теплоход с остановкой

### УСЛОВИЕ

Теплоход проходит 609 км по течению, после стоянки возвращается обратно. Собственная скорость 25 км/ч, стоянка длится 1 час, а всё путешествие - 51 час. Найдите скорость течения.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Из общего времени вычитаем стоянку; скорости по и против течения записываем как  $25+u$  и  $25-u$ .

ДО РЕШЕНИЯ.

$0 < u < 25$ . Время движения равно 50 часов.

#### 1. Обозначаем течение

$$u \text{ км/ч}, \quad 0 < u < 25$$

Против течения скорость  $25-u$  должна оставаться положительной.

#### 2. Составляем уравнение времени

$$\frac{609}{25+u} + \frac{609}{25-u} = 50$$

Из 51 часа убираем часовую стоянку.

#### 3. Объединяем дроби

$$\frac{609 \cdot 50}{625 - u^2} = 50$$

В числителе  $(25-u)+(25+u)=50$ .

#### 4. Решаем

$$625 - u^2 = 609 \Rightarrow u^2 = 16 \Rightarrow u = 4$$

Скорость положительна, поэтому  $-4$  отбрасываем.

#### 5. Проверяем время

$$\frac{609}{29} + \frac{609}{21} = 21 + 29 = 50$$

Вместе со стоянкой получается 51 час.

**Проверка.**  $4 < 25$ , поэтому скорость против течения 21 км/ч допустима.

**Типичная ошибка.** Не вычесть стоянку или перепутать скорости  $25 \pm u$ .

**ОТВЕТ.**

4

## Разбор 8. Первая встреча на круговой трассе

### УСЛОВИЕ

Два мотоциклиста одновременно стартуют в одном направлении из диаметрально противоположных точек круговой трассы длиной 14 км. Скорость одного на 21 км/ч больше. Через сколько минут они впервые поравняются?

### КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Диаметрально противоположные точки делят окружность пополам; быстрый должен ликвидировать отрыв в половину длины трассы.

### ДО РЕШЕНИЯ.

Начальный отрыв 7 км, относительная скорость 21 км/ч; время меньше часа.

#### 1. Находим начальный отрыв

$$s_0 = \frac{14}{2} = 7 \text{ км}$$

Стартовые точки диаметрально противоположны.

#### 2. Находим относительную скорость

$$v_{\text{отн}} = 21 \text{ км/ч}$$

Разность скоростей дана прямо.

#### 3. Находим время в часах

$$t = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \text{ ч}$$

Быстрый сокращает отрыв со скоростью 21 км/ч.

#### 4. Переводим в минуты

$$\frac{1}{3} \cdot 60 = 20 \text{ мин}$$

Вопрос требует минуты.

**Проверка.** За 20 минут быстрый проходит на  $21 \cdot (1/3) = 7$  км больше медленного - ровно начальный отрыв.

**Типичная ошибка.** Делить всю длину 14 км на разность скоростей или оставить  $1/3$  в ответе без перевода.

**ОТВЕТ.**

## 09. Опорные формулы

$$s = vt, \quad t = \frac{s}{v}, \quad v = \frac{s}{t}$$

$$v_{\text{сближ}} = v_1 + v_2, \quad v_{\text{дог}} = |v_1 - v_2|$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2 + \dots}{t_1 + t_2 + \dots}$$

$$v_{\text{по теч}} = v_{\text{соб}} + u, \quad v_{\text{против}} = v_{\text{соб}} - u$$

## 10. Вопросы по теме

### Когда скорости складывают, а когда вычитают?

При встречном движении скорости сближения складывают. При догонянии в одном направлении из большей скорости вычитают меньшую.

### Можно ли найти среднюю скорость как среднее арифметическое?

Только при равных временах движения с каждой скоростью. В остальных случаях разделите весь путь на всё время, включая остановки, если учитывается вся поездка.

## 11. Самостоятельная работа

Сначала решите задания 1-20 в тесте. После проверки переходите к заданиям 21-35, затем к 36-40. Задания на повторение выделены отдельно. К каждому ошибочному ответу запишите причину и повторите решение без подсказки.

Предыдущая тема: Прикладные расчёты по формуле.