

Урок 12. Ответы и решения

Условия, ответы и пошаговые решения всех 40 заданий.

01. Начальный уровень: задания 1-20

Задание 1

Известно, что $f(2) = 0$. Как называется точка $x = 2$ до проверки смены знака производной?

Точка, в которой производная равна нулю, является критической. Наличие экстремума ещё нужно проверить.

Ответ: критическая точка

Задание 2

Производная меняет знак с «−» на «+» при $x = 3$. Какой экстремум имеет функция?

До точки функция убывает, после точки возрастает. Это минимум.

Ответ: точка минимума $x = 3$

Задание 3

Производная меняет знак с «+» на «−» при $x = -1$. Какой экстремум имеет функция?

До точки функция возрастает, после точки убывает. Это максимум.

Ответ: точка максимума $x = -1$

Задание 4

Производная равна нулю при $x = 0$, но положительна слева и справа. Есть ли экстремум?

Функция возрастает по обе стороны точки. Направление не меняется, поэтому экстремума нет.

Ответ: нет

Задание 5

Найдите наименьшее значение функции.

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

$$f'(x) = 2x - 4 = 0$$

$$x = 2, \quad f(2) = 3$$

Ответ: 3

Задание 6

Найдите наибольшее значение функции.

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

$$f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$$

Ответ: 4

Задание 7

Найдите наибольшее значение $f(x) = x^2$ на отрезке $[-2; 3]$.

$$f(-2) = 4, \quad f(0) = 0, \quad f(3) = 9$$

Наибольшее из чисел - 9.

Ответ: 9

Задание 8

Найдите наименьшее значение $f(x) = x^2$ на отрезке $[-2; 3]$.

$$f(-2) = 4, \quad f(0) = 0, \quad f(3) = 9$$

Наименьшее из чисел - 0.

Ответ: 0

Задание 9

Какие точки нужно обязательно проверить при поиске наибольшего значения функции на отрезке?

Проверяются оба конца отрезка и все критические точки, лежащие внутри него.

Ответ: концы отрезка и внутренние критические точки

Задание 10

Для функции $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ назовите точку минимума и минимальное значение.

Квадрат минимален и равен нулю при $x = 1$. Тогда $f(1) = 2$.

Ответ: $x_{\min} = 1, \quad f_{\min} = 2$

Задание 11

По графику найдите абсциссу внутренней точки максимума.

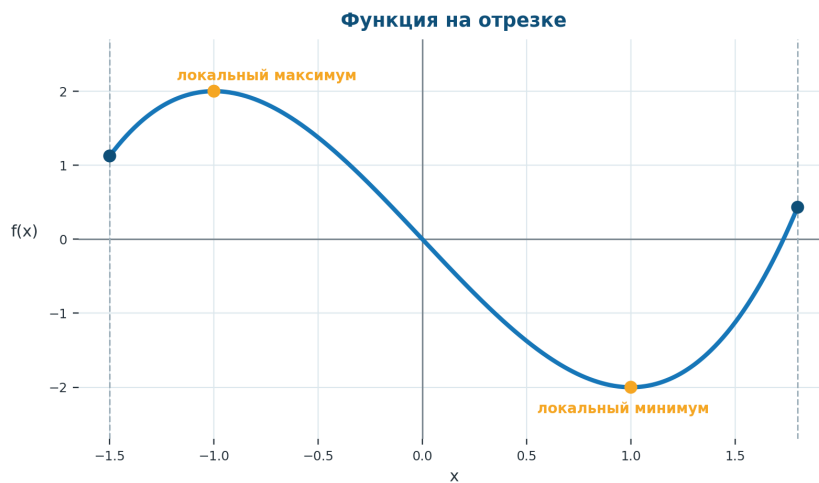


Рис. 1: Рисунок к заданию.

График сначала возрастает, а после $x = -1$ убывает. Поэтому внутренняя точка максимума имеет абсциссу -1 .

Ответ: -1

Задание 12

По графику найдите абсциссу внутренней точки минимума.

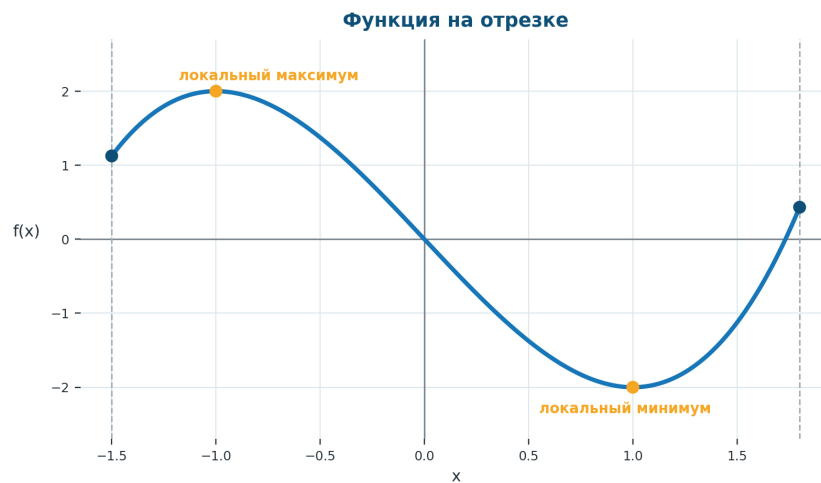


Рис. 2: Рисунок к заданию.

График убывает до $x = 1$, а затем возрастает. Поэтому точка минимума имеет абсциссу 1.

Ответ: 1

Задание 13

На рисунке дан график производной. Сколько точек экстремума имеет функция f ?

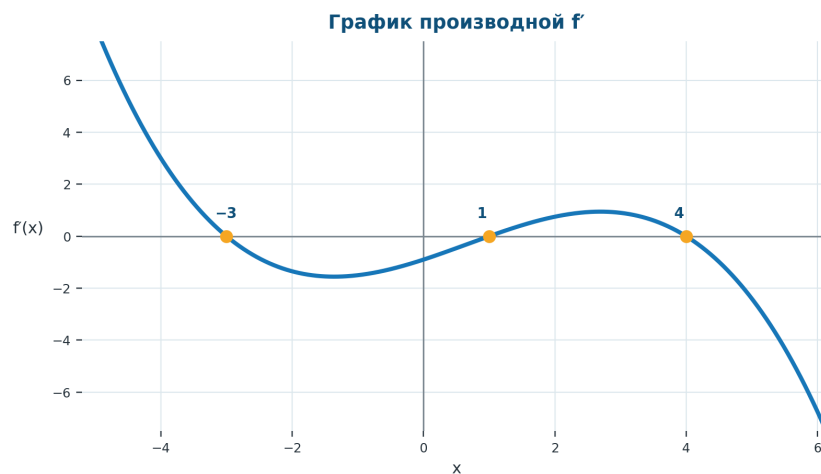


Рис. 3: Рисунок к заданию.

Производная меняет знак в каждом из трёх нулей. Значит экстремумов три.

Ответ: 3

Задание 14

По графику производной укажите абсциссы точек максимума функции f .

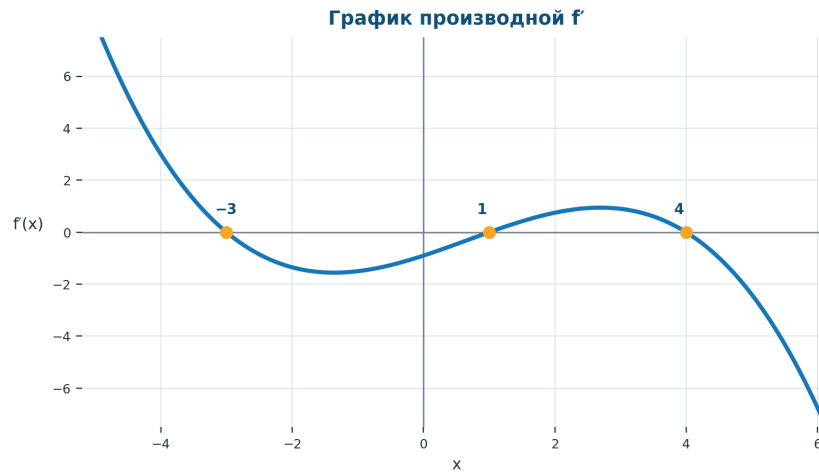


Рис. 4: Рисунок к заданию.

Максимум соответствует смене знака « $+$ $\rightarrow$ $-$ ». Это происходит при $x = -3$ и $x = 4$.

Ответ: $-3; 4$

Задание 15

Найдите промежутки возрастания функции.

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < -1 \text{ и } x > 1$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Задание 16

Имеет ли функция $f(x) = x^3$ экстремум при $x = 0$?

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

Знак производной не меняется: функция возрастает слева и справа. Экстремума нет.

Ответ: нет

Задание 17

Найдите наибольшее значение $f(x) = 2x + 1$ на отрезке $[0; 4]$.

Функция возрастает, поэтому максимум достигается в правом конце.

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

Ответ: 9

Повторение: производная, функции и неравенства

Задание 18

Найдите $f'(3)$.

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(3) = 6$$

Ответ: 6

Задание 19

Найдите наименьшее значение $f(x) = -x^2 + 4$ на отрезке $[-3; 1]$.

$$f(-3) = -9 + 4 = -5$$

$$f(0) = 4$$

$$f(1) = 3$$

Наименьшее значение равно -5 .

Ответ: -5

Повторение: производная, функции и неравенства

Задание 20

Прямая проходит через точки $(0; 1)$ и $(2; 5)$. Найдите коэффициент наклона.

$$k = \frac{5 - 1}{2 - 0} = 2$$

Ответ: 2

02. Средний уровень: задания 21-35

Задание 21

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $[-1; 3]$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3x(x - 2)$$

$$x = 0, 2$$

$$f(-1) = -2, f(0) = 2, f(2) = -2, f(3) = 2$$

Ответ: -2

Задание 22

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $[-3; 3]$.

$$f(x) = x^4 - 4x^2$$

$$f'(x) = 4x(x^2 - 2)$$

$$x = 0, \pm\sqrt{2}$$

$$f(0) = 0, f(\pm\sqrt{2}) = -4, f(\pm 3) = 45$$

Ответ: -4

Задание 23

Найдите наибольшее значение функции на отрезке $[-3; 3]$.

$$f(x) = x^4 - 4x^2$$

$$f(0) = 0, f(\pm\sqrt{2}) = -4, f(\pm 3) = 45$$

Наибольшее значение достигается на концах отрезка.

Ответ: 45

Задание 24

Найдите наименьшее значение функции при $x > 0$.

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

На положительной полуоси производная отрицательна до 2 и положительна после этой точки. Поэтому найденное значение является наименьшим на всей указанной области.

Ответ: 4

Задание 25

Найдите наименьшее значение функции при $x > 0$.

$$f(x) = 2x + \frac{8}{x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 4, \quad x = 2$$

$$f(2) = 4 + 4 = 8$$

На положительной полуоси производная отрицательна до 2 и положительна после этой точки. Поэтому найденное значение является наименьшим на всей указанной области.

Ответ: 8

Задание 26

Найдите координаты точек графика, в которых функция имеет локальные максимум и минимум.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$$

Знаки: +, -, +. Поэтому $x = 1$ - максимум, $x = 3$ - минимум.

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 0$$

Ответ: (1; 4), (3; 0)

Задание 27

На рисунке дан график производной f' . На каком промежутке между крайними нулями производной функция f возрастает?

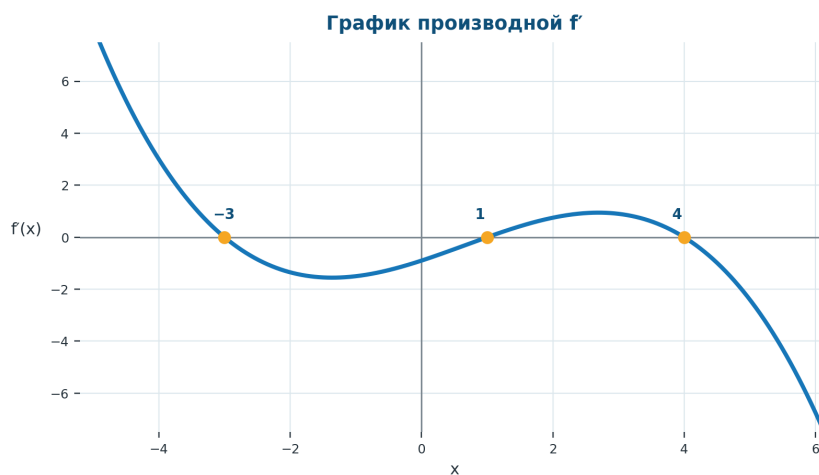


Рис. 5: Рисунок к заданию.

Крайние нули производной: -3 и 4 . Между ними график f' находится выше оси Ox только при $1 < x < 4$. Там исходная функция возрастает.

Ответ: (1; 4).

Задание 28

На рисунке дан график f' . Укажите абсциссу точки минимума f .

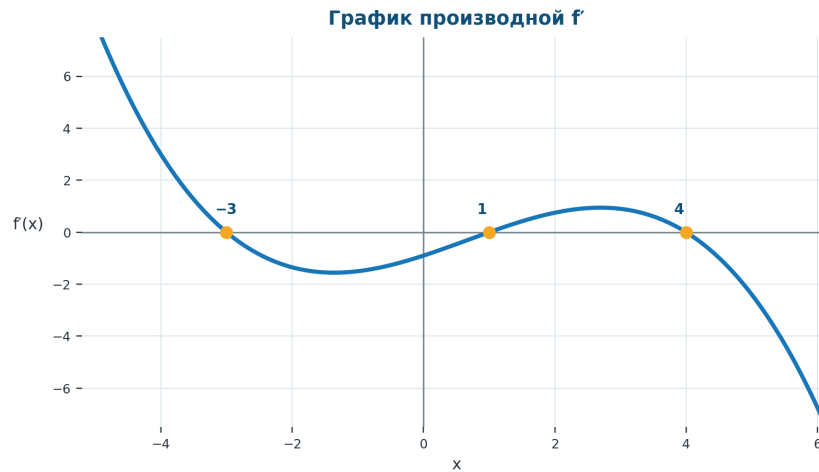


Рис. 6: Рисунок к заданию.

Смена « $- \rightarrow +$ » происходит при $x = 1$.

Ответ: 1

Задание 29

Функция непрерывна на отрезке $[-1; 2]$. Известно: $f(-1) = 3$, $f(0) = -2$, $f(2) = 5$; $x = 0$ является единственной внутренней критической точкой. Найдите наибольшее значение функции на этом отрезке.

Сравниваем значения в концах и критической точке: 3, -2 и 5. Наибольшее - 5.

Ответ: 5

Повторение: производная, функции и неравенства

Задание 30

Запишите область определения функции.

$$f(x) = \sqrt{7-x}$$

$$7-x \geq 0$$

$$x \leq 7$$

Ответ: $(-\infty; 7]$

Задание 31

Периметр прямоугольника равен 20. Найдите наибольшую возможную площадь.

Пусть одна сторона x , тогда другая $10 - x$.

$$S(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$$

$$S'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$S_{\max} = 25$$

Ответ: 25

Задание 32

Высота тела в метрах задана формулой $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$, где $t \geq 0$ измеряется в секундах до падения на землю. Найдите наибольшую высоту в метрах.

$$h'(t) = -10t + 20 = 0$$

$$t = 2$$

$$h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$$

Ответ: 21

Задание 33

Найдите наибольшее значение функции на отрезке $[-1; 4]$.

$$f(x) = x^3 - 12x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$$

Внутри отрезка находится $x = 2$.

$$f(-1) = 11, \quad f(2) = -16, \quad f(4) = 16$$

Ответ: 16

Повторение: производная, функции и неравенства

Задание 34

Решите неравенство.

$$(x - 2)(x + 1) > 0$$

Произведение положительно вне корней -1 и 2 .

$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Задание 35

Найдите абсциссы точек локального максимума и минимума функции.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$$

Вычислим производную и найдём её нули.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$$

Критические точки: $x = -3$ и $x = 1$. Знаки производной слева направо: плюс, минус, плюс. При $x = -3$ возрастание сменяется убыванием, при $x = 1$ убывание сменяется возрастанием.

Проверка: $f(-3) = 27$, $f(1) = -5$. Вопрос требует абсциссы, а не значения функции.

Ответ: точка максимума -3 ; точка минимума 1 .

03. Сложный уровень: задания 36-40**Задание 36**

Наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2ax + 5$ равно 1 . Найдите все значения a .

$$f(x) = (x - a)^2 + 5 - a^2$$

$$5 - a^2 = 1$$

$$a^2 = 4$$

$$a = \pm 2$$

Ответ: -2 ; 2

Задание 37

Найдите наибольшее значение функции на отрезке $[1/2; 4]$.

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}, \quad f(1) = 2, \quad f(4) = \frac{17}{4}$$

Ответ: $\frac{17}{4}$

Задание 38

Найдите наименьшее значение функции при $x > 0$.

$$f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$2x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

$$f_{\min} = 3\sqrt[3]{4}$$

На положительной полуоси производная отрицательна до $\sqrt[3]{2}$ и положительна после этой точки. Поэтому найденное значение является наименьшим на всей указанной области.

Ответ: $3\sqrt[3]{4}$

Задание 39

На рисунке дан график производной. Сколько критических точек функции f показано?

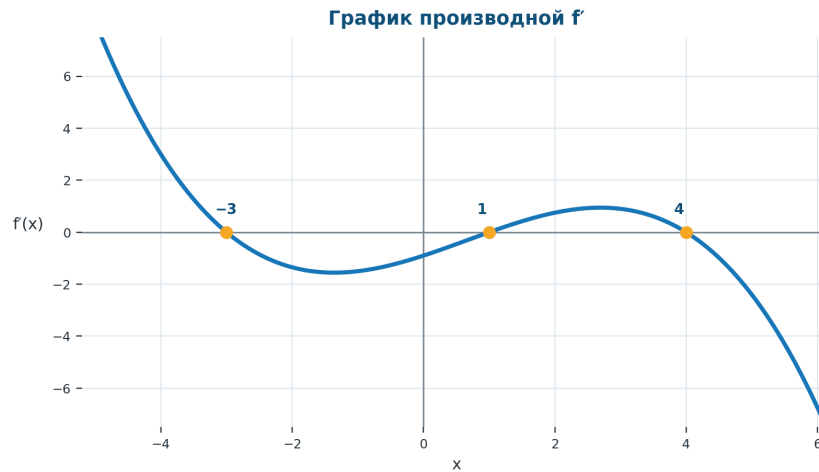


Рис. 7: Рисунок к заданию.

Критические точки соответствуют нулям производной. На графике их три: -3 , 1 и 4 .

Ответ: 3

Задание 40

Среди прямоугольников с периметром 20 найдите длины сторон прямоугольника наибольшей площади.

Пусть стороны x и $10 - x$.

$$S(x) = x(10 - x)$$

$$S'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$$

Вторая сторона также равна 5.

Ответ: 5 и 5

Вернуться к теории и разобранным примерам