



ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА · УРОК 29

Чётность и делимость

Ответы и пошаговые решения

Базовая тренировка: задания 1-12

Задание 1

*Тренировка. чётность и остатки*Определите чётность суммы $17 + 35 + 48$.**Решение**

1. Два нечётных числа дают чётную сумму; прибавление 48 сохраняет чётность.

Ответ**чётное**

Задание 2

Тренировка. чётность и остатки

Найдите остаток 47 при делении на 5.

Решение1. $47 = 5 \cdot 9 + 2$.**Ответ****2**

Задание 3

*Тренировка. чётность и остатки*Найдите остаток 3^{20} при делении на 4.**Решение**1. $3^2 \equiv 1 \pmod{4}$, поэтому $3^{20} = (3^2)^{10} \equiv 1$.**Ответ****1**



Задание 4

Тренировка. чётность и остатки

Докажите, что сумма двух последовательных чисел нечётна.

Решение

1. Одно из двух последовательных чисел чётно, другое нечётно; их сумма нечётна.

Ответ

доказано

Задание 5

Тренировка. чётность и остатки

Найдите остаток числа $10^6 + 7$ при делении на 9.

Решение

1. $10 \equiv 1 \pmod{9}$, значит $10^6 + 7 \equiv 1 + 7 = 8$.

Ответ

8

Задание 6

Тренировка. чётность и остатки

Может ли произведение четырёх нечётных чисел быть чётным?

Решение

1. Произведение нечётных множителей остаётся нечётным.

Ответ

Нет

Задание 7

Тренировка. чётность и остатки

Найдите остаток 2^{10} при делении на 3.

Решение

1. $2 \equiv -1 \pmod{3}$, чётная степень даёт остаток 1.

Ответ

1



Задание 8

Тренировка. чётность и остатки

Докажите, что n^2 и n имеют одинаковую чётность.

Решение

1. Если n чётно, квадрат чётен; если n нечётно, квадрат нечётен.

Ответ

доказано

Задание 9

Тренировка. чётность и остатки

Какие остатки может давать квадрат целого числа при делении на 4?

Решение

1. Проверяем остатки 0, 1, 2, 3; квадраты дают только 0 и 1.

Ответ

0 или 1

Задание 10

Тренировка. чётность и остатки

Найдите НОД чисел 84 и 126.

Решение

1. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$; общий множитель $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Ответ

42

Задание 11

Тренировка. чётность и остатки

Докажите, что произведение двух последовательных чисел делится на 2.

Решение

1. Одно из них обязательно чётно.

Ответ

доказано



Задание 12

Тренировка. чётность и остатки

Найдите последнюю цифру числа 7^4 .

Решение

1. $7^2 = 49$, $7^4 = 49^2$ оканчивается цифрой 1.

Ответ

1

Подготовительные и экзаменационные задачи: задания 13–36

Задание 13

Тренировка. Подготовительная модель • чётность и делимость

Могут ли квадраты двух целых чисел в сумме дать 2026? Если могут, приведите пример; если нет, докажите невозможность.

Решение

1. Заметим, что $2026 = 2025 + 1$.

2. Число 2025 является квадратом: $2025 = 45^2$.

3. Поэтому $2026 = 45^2 + 1^2$, то есть требуемые целые числа существуют.

Ответ

да, например 45 и 1

Задание 14

Тренировка. Подготовительная модель • чётность и делимость

Могут ли квадраты двух целых чисел в сумме дать 2027? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Квадрат целого числа при делении на 4 даёт остаток 0 или 1.

2. Поэтому сумма двух квадратов по модулю 4 может быть сравнима только с 0, 1 или 2.

3. Но $2027 \equiv 3 \pmod{4}$.

4. Следовательно, представить 2027 как сумму двух квадратов целых чисел нельзя.

Ответ

нет



Задание 15

Тренировка. Подготовительная модель • чётность и делимость

Может ли разность квадратов двух целых чисел быть равна 2026? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Предположим, что $a^2 - b^2 = 2026$.
2. Тогда $(a - b)(a + b) = 2026$; множители $a - b$ и $a + b$ имеют одинаковую чётность.
3. Их произведение чётно, значит оба множителя должны быть чётными.
4. Тогда произведение делится на 4, однако 2026 на 4 не делится.
5. Получено противоречие.

Ответ

нет

Задание 16

Тренировка. Подготовительная модель • чётность и делимость

Докажите, что число $n^5 - n$ делится на 30 при любом целом n .

Решение

1. Числа $n - 1$, n и $n + 1$ последовательны, поэтому их произведение делится на 2 и на 3.
2. Имеем $n^5 - n = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$, значит выражение делится на 6.
3. По модулю 5 любой остаток $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ удовлетворяет $r^5 \equiv r \pmod{5}$.
4. Следовательно, $n^5 - n$ делится и на 5.
5. Числа 6 и 5 взаимно просты, поэтому выражение делится на 30.

Ответ

делится при любом целом n

Задание 17

Тренировка. Подготовительная модель • чётность и делимость

Докажите, что число $n^3 + 5n$ делится на 6 при любом целом n .

Решение

1. По модулю 2 имеем $n^3 + 5n \equiv n + n = 2n \equiv 0 \pmod{2}$.
2. По модулю 3 выполняется $n^3 \equiv n$, поэтому $n^3 + 5n \equiv n + 2n = 3n \equiv 0 \pmod{3}$.
3. Выражение делится одновременно на 2 и на 3.
4. Так как 2 и 3 взаимно просты, оно делится на 6.

Ответ

делится при любом целом n



Задание 18

Тренировка. Подготовительная модель • чётность и делимость

При каких целых n число $n^2 + n + 4$ делится на 5? Ответ запишите в виде класса остатков.

Решение

1. Проверим пять возможных остатков числа n при делении на 5.
2. При $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$ выражение даёт соответственно остатки 4, 1, 0, 1, 4.
3. Нулевой остаток получается только при остатке n , равном 2.
4. Следовательно, подходят и только подходят числа $n \equiv 2 \pmod{5}$.

Ответ

$$n \equiv 2 \pmod{5}$$

Задание 19

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Для каких натуральных n число $3^n + 4^n$ делится на 5? Ответ запишите через остаток n по модулю 4.

Решение

1. Остатки степеней 3 по модулю 5 повторяются циклом 3, 4, 2, 1.
2. Так как $4 \equiv -1 \pmod{5}$, остатки 4^n равны 4 при нечётном n и 1 при чётном n .
3. Для n с остатками 1, 2, 3, 0 по модулю 4 суммы дают остатки 2, 0, 1, 2.
4. Делимость на 5 возникает ровно при $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Ответ

$$n \equiv 2 \pmod{4}$$

Задание 20

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Найдите наименьшее натуральное n , для которого $2^n - 1$ делится на 7. Обоснуйте минимальность.

Решение

1. При $n = 1$ получаем $2^1 \equiv 2 \pmod{7}$.
2. При $n = 2$ получаем $2^2 \equiv 4 \pmod{7}$.
3. При $n = 3$ получаем $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$.
4. Первые два значения не подходят, поэтому найденное значение минимально.

Ответ

3



Задание 21

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Может ли сумма квадратов четырёх нечётных целых чисел делиться на 8? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Любое нечётное число имеет вид $2k+1$.
2. Его квадрат равен $4k(k+1) + 1$; произведение $k(k+1)$ чётно.
3. Поэтому квадрат каждого нечётного числа сравним с 1 по модулю 8.
4. Сумма четырёх таких квадратов сравнима с 4 ($\text{mod } 8$) и на 8 не делится.

Ответ

нет

Задание 22

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

При каких целых n выражение $n^2 + 2n + 5$ делится на 8? Ответ запишите через остаток n по модулю 4.

Решение

1. Преобразуем выражение: $n^2 + 2n + 5 = (n+1)^2 + 4$.
2. Для делимости на 8 необходимо $(n+1)^2 \equiv 4 \pmod{8}$.
3. Квадрат даёт остаток 4 по модулю 8 тогда и только тогда, когда число сравнимо с 2 по модулю 4.
4. Значит, $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$, то есть $n \equiv 1 \pmod{4}$.

Ответ

$$n \equiv 1 \pmod{4}$$

Задание 23

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Докажите, что число $10^n + 8$ делится на 9 при любом натуральном n .

Решение

1. По модулю 9 число 10 сравнимо с 1: $10 \equiv 1 \pmod{9}$.
2. Поэтому для любого натурального n выполняется $10^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{9}$.
3. Тогда $10^n + 8 \equiv 1 + 8 \equiv 0 \pmod{9}$.
4. Следовательно, утверждение верно для каждого натурального n .

Ответ

делится при любом натуральном n



Задание 24

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 6 при любом целом n .

Решение

1. Разложим: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$.
2. Это произведение трёх последовательных целых чисел.
3. Среди них есть чётное число, поэтому произведение делится на 2.
4. Среди них есть число, кратное 3, поэтому произведение делится на 3.
5. Значит, произведение делится на 6.

Ответ

делится при любом целом n

Задание 25

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Докажите: если n^2 делится на 3, то и целое число n делится на 3.

Решение

1. Целое число при делении на 3 даёт остаток 0, 1 или 2.
2. Квадраты этих остатков равны по модулю 3 соответственно 0, 1, 1.
3. Нулевой остаток квадрата возможен только при нулевом остатке самого числа.
4. Следовательно, из $3 \mid n^2$ следует $3 \mid n$.

Ответ

утверждение доказано

Задание 26

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Найдите наименьшее число, записанное только цифрами 1, которое делится на 37. Обоснуйте минимальность.

Решение

1. Однозначное число 1 на 37 не делится.
2. Двузначное число 11 меньше 37 и также не делится на 37.
3. Трёхзначное число $111 = 3 \cdot 37$.
4. Следовательно, 111 подходит и является наименьшим.

Ответ

111



Задание 27

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Найдите все натуральные числа, не превосходящие 50, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 5 — остаток 3. Найдите их сумму.

Решение

1. Числа с остатком 3 при делении на 5 имеют вид $x = 3 + 5k$.
2. Условие по модулю 3 даёт $3 + 5k \equiv 2k \equiv 2 \pmod{3}$, поэтому $k \equiv 1 \pmod{3}$.
3. Следовательно, $x = 8 + 15t$.
4. В пределах от 1 до 50 получаем числа 8, 23 и 38.
5. Их сумма равна $8 + 23 + 38 = 69$.

Ответ

8, 23, 38; сумма — 69.

Задание 28

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Может ли сумма квадратов двух последовательных целых чисел делиться на 4? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Из двух последовательных чисел одно чётно, другое нечётно.
2. Квадрат чётного числа сравним с 0 по модулю 4.
3. Квадрат нечётного числа сравним с 1 по модулю 4.
4. Их сумма даёт остаток 1 при делении на 4, поэтому делимость невозможна.

Ответ

нет

Задание 29

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Может ли сумма квадратов двух целых чисел давать остаток 6 при делении на 8? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Квадрат целого числа по модулю 8 может иметь остаток только 0, 1 или 4.
2. Возможные суммы двух таких остатков: 0, 1, 2, 4 и 5 по модулю 8.
3. Остаток 6 в этом списке отсутствует.
4. Следовательно, требуемая сумма невозможна.

Ответ

нет



Задание 30

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

При каких целых n число $n^2 + n + 4$ делится на 4? Ответ запишите через остаток n по модулю 4.

Решение

1. Рассмотрим остатки n , равные 0, 1, 2 и 3 по модулю 4.
2. Выражение $n^2 + n + 4$ даёт соответственно остатки 0, 2, 2, 0.
3. Нулевой остаток получается в первом и четвёртом случаях.
4. Поэтому $n \equiv 0$ или $n \equiv 3 \pmod{4}$.

Ответ

$n \equiv 0$ или $n \equiv 3 \pmod{4}$

Задание 31

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Сумма двух целых чисел нечётна. Докажите, что сумма их квадратов нечётна, а произведение чётно.

Решение

1. Нечётная сумма означает, что одно из чисел чётно, а другое нечётно.
2. Квадрат чётного числа чётен, квадрат нечётного — нечётен.
3. Поэтому сумма квадратов имеет вид «чётное + нечётное» и нечётна.
4. В произведении присутствует чётный множитель, поэтому произведение чётно.

Ответ

утверждение доказано

Задание 32

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Может ли произведение двух последовательных целых чисел давать остаток 1 при делении на 4? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Рассмотрим остаток меньшего числа n по модулю 4.
2. При $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ произведение $n(n+1)$ даёт остатки 0, 2, 2, 0.
3. Остаток 1 не возникает ни в одном случае.
4. Следовательно, такое произведение невозможно.

Ответ

нет



Задание 33

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Какими цифрами может оканчиваться квадрат целого числа? Обоснуйте полноту списка.

Решение

1. Последняя цифра квадрата определяется только последней цифрой исходного числа.
2. Возведём в квадрат цифры от 0 до 9 и возьмём последние цифры результатов.
3. Получаем набор 0, 1, 4, 5, 6 и 9.
4. Других случаев нет, поскольку все возможные последние цифры уже проверены.

Ответ

0, 1, 4, 5, 6, 9

Задание 34

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Для каких натуральных n число $10^n - 1$ делится на 27? Ответ запишите через остаток n по модулю 3.

Решение

1. По модулю 27: $10^1 \equiv 10$, $10^2 \equiv 19$, $10^3 \equiv 1$.
2. После третьей степени остатки повторяются с периодом 3.
3. Делимость $10^n - 1$ на 27 равносильна сравнению $10^n \equiv 1 \pmod{27}$.
4. Это выполняется ровно при $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Ответ

$$n \equiv 0 \pmod{3}$$

Задание 35

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Докажите: если сумма квадратов двух целых чисел делится на 4, то оба числа чётны.

Решение

1. Квадрат целого числа по модулю 4 равен 0 для чётного числа и 1 для нечётного.
2. Если одно число нечётно, сумма квадратов даёт остаток 1 или 2 по модулю 4.
3. Поэтому нулевой остаток возможен только как сумма 0 и 0.
4. Значит, квадраты, а следовательно и оба исходных числа, чётны.

Ответ

утверждение доказано



Задание 36

ЕГЭ. формат ЕГЭ • пункт 19а • полная запись

Сумма пяти целых чисел чётна. Сколько нечётных слагаемых может быть среди этих пяти чисел? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Чётные слагаемые не меняют чётность суммы.
2. Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна, а чётного количества — чётна.
3. Поэтому число нечётных слагаемых должно быть чётным.
4. Среди пяти чисел возможны 0, 2 или 4 нечётных; все три случая реализуются.

Ответ

0, 2 или 4

Повторение: задания 37–40

Задание 37

Повторение. накопительное повторение • линия 16 • формат ЕГЭ

В июле банк выдал кредит в размере 1 000 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 12%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Сумма остатков перед начислениями равна $1000 \cdot \frac{5+1}{2} = 3000$ тыс. рублей.
2. Сумма процентов равна $0,12 \cdot 3000 = 360$ тыс. рублей.
3. Вместе с основным долгом будет выплачено $1000 + 360 = 1360$ тыс. рублей.

Ответ

1 360 тыс. рублей



Задание 38

Повторение. накопительное повторение • линия 16 • формат ЕГЭ

Первоначальная сумма кредита — 1 200 тыс. рублей. Кредит выдан на 5 лет под 10% годовых. После начисления процентов вносится один платёж. За первые 3 года основной долг равномерно уменьшается до 300 тыс. рублей, а в оставшиеся 2 года — до нуля. Найдите общую сумму выплат. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. На первом этапе долг уменьшается на $\frac{1200-300}{3} = 300$ тыс. рублей в год, на втором — на $\frac{300}{2} = 150$ тыс. рублей.
2. Остатки перед начислениями равны 1 200, 900, 600, 300 и 150 тыс. рублей.
3. Проценты составят $0,1 \cdot (1200 + 900 + 600 + 300 + 150) = 315$ тыс. рублей.
4. Общая сумма выплат равна $1200 + 315 = 1515$ тыс. рублей.

Ответ

1 515 тыс. рублей

Задание 39

Повторение. накопительное повторение • линия 15 • формат ЕГЭ

Решите неравенство $\log_2 (x - 1) \geq 3$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 1$.
2. Так как основание 2 больше единицы, знак неравенства сохраняется: $x - 1 \geq 2^3$.
3. С учётом ОДЗ получаем $[9; +\infty)$.

Ответ

$[9; +\infty)$



Задание 40

Повторение. накопительное повторение • линия 13 • формат ЕГЭ

а) Решите уравнение $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

Решение

1. Положим $t = 2^x > 0$. Получаем $t^2 - 5t + 4 = 0$.
2. Корни квадратного уравнения: $t = 1$ и $t = 4$.
3. Следовательно, $x = 0$ или $x = 2$.
4. Условию пункта б удовлетворяет только $x = 0$.

Ответ

а) 0; 2.

б)

0