



Показательные и логарифмические неравенства

Теория и разобранные примеры

Урок 25. Показательные и логарифмические неравенства. Объяснения с начального уровня, исходные примеры с пошаговыми решениями и отдельный тест для самостоятельной проверки.

Два решения внутри одного неравенства

Показательное или логарифмическое неравенство обычно требует двух шагов: использовать монотонность функции, затем решить полученное алгебраическое неравенство. Для логарифмов добавляется обязательное пересечение с областью допустимых значений.

Как определить направление знака

При $a > 1$ большему показателю соответствует большая степень, поэтому $a^u > a^v$ равносильно $u > v$. При $0 < a < 1$ зависимость обратная: например, $(1/2)^1 = 1/2$, а $(1/2)^2 = 1/4$. Поэтому $a^u > a^v$ равносильно $u < v$. Для логарифмов действует такое же правило при положительных аргументах.

В записи $\log_{1/2}(x+2) > -1$ сначала получаем $x+2 > 0$. Затем представляем $-1 = \log_{1/2} 2$ и сравниваем аргументы с изменением знака: $x+2 < 2$. Вместе эти условия дают $-2 < x < 0$. Если забыть ОДЗ, появятся числа, при которых исходное выражение вообще не определено.

Почему ответ для новой переменной нужно ограничить

Замена $t = a^x$ всегда требует $t > 0$. Если квадратное неравенство даёт $t < -3$ или $t > 2$, первая ветвь исчезает. Если получилось $-3 < t < 2$, остаётся $0 < t < 2$. Лишь затем выполняется обратный переход к x , с учётом того, возрастает или убывает a^x .

Контроль границ

Проверьте три разных вида границ: нули выражения, границы ОДЗ и запрещённые знаменатели. Равенство допускает включение нуля выражения, но не отменяет запрета ОДЗ. Например, в $\log_3(x-1) \leq 2$ число 10 входит в ответ, а 1 исключается: логарифм нуля не существует.



Подробные объяснения и разобранные примеры

1. Главный вопрос: функция возрастает или убывает

В показательных и логарифмических неравенствах знак при переходе к аргументам зависит от основания. Если $a > 1$, функции a^x и $\log_a x$ возрастают: большему аргументу соответствует большее значение, поэтому знак сохраняется. Если $0 < a < 1$, обе функции убывают и знак неравенства меняется.

Это правило нельзя заменять механической фразой «убираем основания». Перед переходом к показателям или аргументам явно укажите диапазон основания. Такая одна строка объясняет направление знака и защищает от самой частой ошибки темы.

Для равенства монотонность не меняла знак, поэтому на предыдущем уроке основания больше и меньше единицы обрабатывались одинаково. В неравенстве различие принципиально. Например, из $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ следует $x < -2$.

После перехода к алгебраическому неравенству решайте его обычными методами. Если возникает квадрат, метод интервалов или свойства параболы остаются теми же; показательная часть уже выполнена.

Монотонность — центральное правило темы. При $a > 1$ функция a^x возрастает, при $0 < a < 1$ убывает; логарифм ведёт себя аналогично. Поэтому перед сравнением показателей или аргументов основание явно классифицируют. Запись «основание меньше единицы, знак меняется» должна предшествовать преобразованию.

Монотонность применяют только после представления обеих частей значениями одной функции с одинаковым основанием. Нельзя сравнивать показатели у разных оснований или аргументы логарифмов с разными основаниями без дополнительного преобразования.

Графическая картина помогает помнить направление: у 2^x и $\log_2 x$ графики идут вверх, у $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $\log_{\frac{1}{2}} x$ — вниз. Сравнение значений одной возрастающей функции сохраняет порядок аргументов, убывающей — меняет. Это одно правило объясняет и показательные, и логарифмические неравенства.

При равенстве показательных или логарифмических значений монотонность тоже используется, но знак разворачивать не нужно: равные значения одной взаимно однозначной функции имеют равные аргументы. Основание всё равно должно быть допустимым и одинаковым в обеих частях. На графике это означает, что горизонтальная прямая пересекает строго монотонную функцию не более одного раза.

$$\begin{aligned} a > 1: a^u > a^v &\Leftrightarrow u > v \\ 0 < a < 1: a^u > a^v &\Leftrightarrow u < v \end{aligned}$$

Ключевые правила

- При $a > 1$ знак сохраняется.
- При $0 < a < 1$ знак меняется.
- Диапазон основания указывается до перехода к показателям.



2. Одинаковое основание в показательном неравенстве

Сначала все числа представляют как степени одного основания. Например, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, а $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$. Затем сравнивают показатели с учётом монотонности.

Если основания являются степенями общего числа, их переписывают: $4^x = 2^{2x}$, $8^{x-1} = 2^{3x-3}$. После этого получается линейное или квадратное неравенство относительно x .

При квадратном показателе ответ может быть отрезком или объединением лучей. Например, $2^{x^2-1} \leq 2^3$ равносильно $x^2 \leq 4$, откуда $-2 \leq x \leq 2$.

Проверка выполняется одной точкой из каждого полученного промежутка. Для основания больше единицы большая степень действительно должна давать большее значение. Это смысловая проверка, а не вычисление огромных степеней.

В показательном неравенстве с постоянным допустимым основанием область определения обычно вся прямая. После сравнения показателей получается алгебраическое неравенство. Дробное основание можно переписать как отрицательную степень: $\left(\frac{1}{3}\right)^u = 3^{-u}$. Это даёт альтернативную проверку разворота знака.

Если основания только похожи, сначала выразите их через одну базу. Например, 4^x и 8^{x-1} превращаются в степени двойки. При основании, зависящем от переменной, простой алгоритм не действует без отдельного исследования основания.

В выражении $4^{x+1} \geq 8$ обе части приводят к основанию 2: $2^{2x+2} \geq 2^3$, затем $2x+2 \geq 3$. Если основание выбрано больше единицы, направление сохраняется. Тот же пример через основание $\frac{1}{2}$ должен привести к тому же ответу после корректного разворота — полезная независимая проверка.

Число справа полезно представить степенью того же основания. Если точной степени нет, границу можно оставить логарифмом. Десятичное приближение не должно менять строгую границу ответа. Точная граница облегчает последующую проверку подстановкой.

$$4^x \geq 2^{x+2} \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 2^{x+2} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Ключевые правила

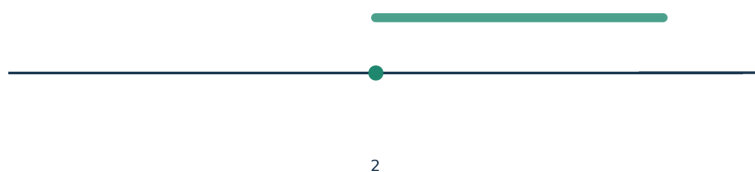
- Приводите обе части к одному основанию.
- Показатели сравниваются только после указания монотонности.
- Квадратное неравенство по показателю решается полностью.

Разбор 1. Возрастающая показательная функция

УРОВЕНЬ. База • старт

УСЛОВИЕ

Решите $4^x \geq 2^{x+2}$.

**Возрастающая показательная функция****Ответ:** $[2; +\infty)$ 

ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Показательная задача 1. Возрастающее основание.

1. $4^x = 2^{2x}$, основание $2 > 1$, функция возрастает.
2. Поэтому $2x \geq x + 2$.
3. Получаем $x \geq 2$.
4. Граница включается из-за нестрогого знака.
5. Проверка при $x = 2$: обе части равны 16.

ОТВЕТ. $[2; +\infty)$ **Близкий аналог для самостоятельной работы**Решите $9^{x-1} < 3^{x+1}$.

$$3^{2x-2} < 3^{x+1}.$$

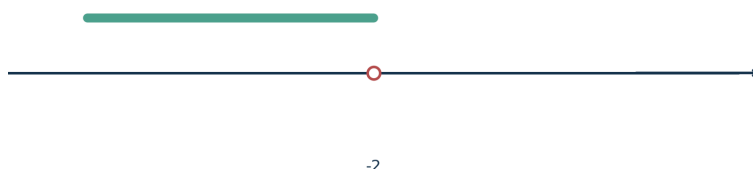
Функция возрастает, поэтому $2x - 2 < x + 1$.

$$x < 3.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. $(-\infty; 3)$ **Разбор 2. Убывающая показательная функция****УРОВЕНЬ.** База**УСЛОВИЕ**Решите $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$.



Убывающая показательная функция

Ответ: $(-\infty; -2)$ 

ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Показательная задача 2. Убывающее основание.

1. $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.
2. Основание $\frac{1}{2}$ находится между 0 и 1, функция убывает.
3. Поэтому знак между показателями меняется: $x < -2$.
4. Граница не входит, так как знак строгий.
5. Проверка: при $x = -3$ левая часть равна $8 > 4$.

ОТВЕТ. $(-\infty; -2)$ **Близкий аналог для самостоятельной работы**Решите $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq 9$.

$$9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}.$$

Функция убывает, поэтому $x - 1 \geq -2$.

$$x \geq -1.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ. $[-1; +\infty)$ **3. Замена t равняется a в степени x**

Если встречаются a^{2x} и a^x , вводят $t = a^x > 0$. Неравенство становится рациональным или квадратным относительно t . Его решение обязательно пересекают с условием $t > 0$.

После получения промежутка для t нужно вернуться к x . Например, $1 \leq 2^x \leq 4$ при возрастающем основании равносильно $0 \leq x \leq 2$. Если основание меньше единицы, направления при возврате меняются.

Иногда квадратное неравенство даёт отрицательный промежуток для t . Он полностью отбрасывается, потому что степень положительна. Нельзя переносить его в ответ или пытаться логарифмировать отрицательные числа.



Для выражения $2^x + 2^{-x}$ удобно положить $t = 2^x > 0$, тогда $2^{-x} = \frac{1}{t}$. После умножения на положительное t знак сохраняется. Именно запись $t > 0$ обосновывает безопасное умножение.

Замена $t = a^x > 0$ превращает показательную модель в квадратное или рациональное неравенство. Ограничение $t > 0$ пересекают с ответом до обратного перехода. Затем границы вида $t = a^c$ переводят в условия на x с учётом монотонности.

При двойном условии, например $1 \leq 2^x \leq 4$, получают одновременно $x \geq 0$ и $x \leq 2$. Для основания меньше единицы обе границы разворачиваются. Проверка выполняется значением внутри и значением снаружи.

Если квадратное неравенство для t даёт, например, $t \leq 1$ или $t \geq 4$, пересечение с $t > 0$ превращает первую часть в $0 < t \leq 1$. При $t = 2^x$ это соответствует $x \leq 0$, а вторая — $x \geq 2$. Нулевую границу нельзя логарифмировать, но она и не достигается; область значений решает этот вопрос.

В обратном переходе из промежутка для t следите за открытостью границ. Строгое $t < 4$ превращается в строгое условие для x ; равенство не появляется при логарифмировании. Отдельно проверьте, достижима ли каждая граница показательной функцией.

$$\begin{aligned}t &= a^x > 0, & a^{2x} &= t^2 \\1 \leq 2^x &\leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2\end{aligned}$$

Ключевые правила

- Замена всегда сопровождается $t > 0$.
- Сначала решается неравенство для t , затем выполняется возврат к x .
- Умножать на t можно без изменения знака только после указания $t > 0$.

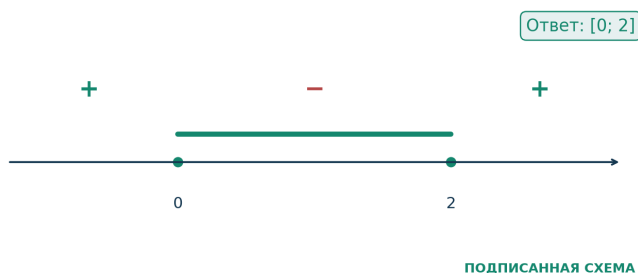
Разбор 3. Замена и двойной переход

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Решите $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$.

Знаки выражения $4^x - 5 \cdot 2^x + 4$



Показательная задача 3. Замена и двойной переход.



1. Положим $t = 2^x > 0$, тогда $4^x = t^2$.
2. Получаем $t^2 - 5t + 4 \leq 0$, то есть $(t - 1)(t - 4) \leq 0$.
3. Отсюда $1 \leq t \leq 4$.
4. Возвращаемся: $1 \leq 2^x \leq 4$.
5. Так как функция возрастает, $0 \leq x \leq 2$.

ОТВЕТ.

$[0; 2]$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$.

$t = 3^x > 0$.

$(t - 1)(t - 3) \leq 0$, значит $1 \leq t \leq 3$.

$0 \leq x \leq 1$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$[0; 1]$

4. ОДЗ логарифмического неравенства

До любых преобразований аргумент каждого логарифма должен быть строго положительным. ОДЗ становится отдельным неравенством или системой. В конце результат функционального сравнения пересекается с этой областью.

Если аргумент является дробью, требуется положительность всей дроби, а не отдельная положительность числителя и знаменателя. Дробь положительна, когда числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки; это решается методом интервалов.

При нескольких логарифмах каждый исходный аргумент положителен отдельно. После объединения в произведение может получиться положительное выражение даже при двух отрицательных множителях, но такие точки не входят в исходную ОДЗ. Поэтому свойства применяются только внутри уже записанной области.

ОДЗ часто определяет открытую левую границу ответа. Например, из $\log_3 (x - 1) \leq 2$ функциональная часть даёт $x \leq 10$, а ОДЗ даёт $x > 1$. Итог: $(1; 10]$.

ОДЗ логарифмического неравенства записывают до свойств логарифмов. Каждый исходный аргумент строго положителен. После объединения суммы или разности нельзя заменить эти условия одной положительностью произведения или дроби.

Основание логарифма положительно и не равно единице. Его положение относительно единицы определяет монотонность. Отрицательное значение логарифма при дробном основании нормально и не является причиной отбрасывать решение.

Для нескольких логарифмов ОДЗ можно упростить после записи. Условия $x > 0$ и $x - 2 > 0$ вместе дают $x > 2$. Сокращённая форма удобна для пересечения, но исходные условия полезно оставить строкой выше: по ней видно, что существование каждого логарифма проверено.



Если ОДЗ состоит из нескольких промежутков, не сворачивайте его в неясную фразу. Запишите объединение явно и пересекайте каждую ветвь с результатом основного неравенства. Пустые пересечения сразу удаляйте из финального ответа.

$$\log_a f(x) \text{ существует} \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Ключевые правила

- Аргумент логарифма строго положителен.
- ОДЗ вычисляется по исходной записи.
- Итог — пересечение ОДЗ и решения после сравнения.

Разбор 4. Логарифм и ОДЗ

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Решите $\log_3 (x - 1) \leq 2$.

ОДЗ и функциональная граница

Ответ: $(1; 10]$



ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Показательная задача 4. Логарифм и ОДЗ.

1. ОДЗ: $x - 1 > 0$, то есть $x > 1$.
2. Основание $3 > 1$, логарифм возрастает.
3. Поэтому $x - 1 \leq 3^2 = 9$, то есть $x \leq 10$.
4. Пересекаем $x > 1$ и $x \leq 10$.
5. Получаем $(1; 10]$.

ОТВЕТ.

$(1; 10]$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\log_2 (x + 2) > 3$.

ОДЗ: $x > -2$.

Функция возрастает: $x + 2 > 8$.

$x > 6$.

**ОТВЕТ К АНАЛОГУ.** $(6; +\infty)$ **5. Логарифм при основании больше единицы**

При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает. Поэтому $\log_a f(x) > c$ равносильно $f(x) > a^c$ внутри ОДЗ. Для сравнения двух логарифмов одного основания сохраняется знак между аргументами.

Даже если новое условие $f(x) > a^c$ уже обеспечивает положительность аргумента, ОДЗ полезно оставить в записи. Она показывает корректность применения логарифма и помогает в более сложных задачах, где итоговое условие не поглощает все ограничения.

При нестрогом знаке граница $f(x) = a^c$ может войти, потому что аргумент остаётся положительным. Граница ОДЗ $f(x) = 0$ никогда не входит.

Сравнение аргументов может привести к рациональному неравенству. Тогда после функционального шага применяется метод интервалов, а полученный ответ пересекается с исходной ОДЗ.

При $a > 1$ из $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ следует $f(x) > g(x)$ вместе с ОДЗ. Для сравнения с числом представляют число как $\log_a a^c$. Если справа ноль, используют $0 = \log_a 1$.

Даже когда полученное сравнение автоматически обеспечивает положительность одного аргумента, полезно объяснить это в записи. Остальные условия ОДЗ решают отдельно и пересекают с основным ответом.

При основании больше единицы задача $\log_a f(x) \leq c$ даёт $0 < f(x) \leq a^c$. Это двойное условие, а не только верхняя граница. Если $f(x)$ линейна, решение получается системой; если квадратична или рациональна, каждую часть решают подходящим методом.

При сравнении с единицей табличные значения основания дают быструю проверку: для $a > 1$ положительные логарифмы соответствуют аргументам больше единицы, отрицательные — между нулём и единицей. Нулевое значение достигается только при аргументе 1.

$$a > 1: \log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v, \quad u > 0, v > 0$$

Ключевые правила

- При $a > 1$ знак между аргументами сохраняется.
- Нулевая граница аргумента всегда исключена.
- После функционального шага используйте обычные алгебраические методы.



6. Логарифм при основании между нулём и единицей

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает. Поэтому знак между аргументами меняется. Например, $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -1$ равносильно $x+2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ при условии $x+2 > 0$.

Результат получается пересечением двух условий: $x > -2$ и $x < 0$. Запись только второго неравенства ошибочна, потому что логарифм не определён при неположительном аргументе.

Если сравниваются два логарифма с одинаковым основанием меньше единицы, большему значению логарифма соответствует меньший аргумент. Основание нужно выписать отдельной строкой: $0 < \frac{1}{3} < 1$, значит знак меняется.

Проверка возможна на простых числах: для основания $\frac{1}{2}$ значения $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$. Аргумент растёт, а логарифм уменьшается.

При $0 < a < 1$ знак между аргументами разворачивается. Например, $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}} 4$ даёт $0 < x+1 < 4$: слева записано ОДЗ, справа — результат сравнения. Одной верхней границы недостаточно.

Сравнение с нулём также разворачивается: $\log_{\frac{1}{2}} f(x) \geq 0$ соответствует $0 < f(x) \leq 1$. Проверка числами проста: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, а $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$.

Для дробного основания условие $\log_a f(x) \leq c$ превращается в $f(x) \geq a^c$, и эта нижняя граница уже положительна, поэтому ОДЗ включено автоматически. В решении нужно явно отметить этот факт, иначе исчезновение условия $f(x) > 0$ выглядит необоснованным.

Для $0 < a < 1$ картина обратная. Значение логарифма положительно на аргументах между нулём и единицей, отрицательно на аргументах больше единицы. Это удобно проверять на a и $\frac{1}{a}$. Такая оценка заранее подсказывает ожидаемый промежуток аргумента.

$$0 < a < 1: \log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u < v$$

Ключевые правила

- При $0 < a < 1$ знак меняется.
- Функциональное сравнение всегда пересекается с ОДЗ.
- Проверяйте убывание по значениям $1, a, a^2$.

Разбор 5. Логарифм с основанием одна вторая

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Решите $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -1$.



Убывающий логарифм

Ответ: $(-2; 0)$ 

ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Показательная задача 5. Логарифм с основанием одна вторая.

1. ОДЗ: $x + 2 > 0$, то есть $x > -2$.
2. Логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{2}$ убывает, поэтому знак неравенства меняется.
3. $x + 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, значит $x < 0$.
4. Пересечение: $-2 < x < 0$.
5. Проверка при $x = -1$: $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0 > -1$.

ОТВЕТ. $(-2; 0)$ **Близкий аналог для самостоятельной работы**Решите $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) \leq -1$.ОДЗ: $x > \frac{1}{2}$.Функция убывает: $2x - 1 \geq 3$. $x \geq 2$.**ОТВЕТ К АНАЛОГУ.** $[2; +\infty)$

7. Сумма и разность логарифмов в неравенстве

Свойства логарифмов применяются только на ОДЗ каждого исходного аргумента. После объединения суммы в логарифм произведения или разности в логарифм отношения выполняется функциональное сравнение с учётом основания.

Из $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) > 3$ на ОДЗ $x > 1$ получаем $\log_2 (x^2 - 1) > 3$, затем $x^2 - 1 > 8$. Алгебра даёт два луча, но пересечение с $x > 1$ оставляет только $x > 3$.

В разности логарифмов отношение рассматривается на области, где оба исходных аргумента положительны. Это часто делает знаменатель положительным и позволяет безопасно умножить после явной записи условия.



Если основание меньше единицы, знак меняется уже после объединения. Не меняйте знак на этапе применения свойства: свойство является равенством, направление меняется только при сравнении аргумента логарифма с другим значением.

Сумму логарифмов объединяют в логарифм произведения, разность — частного. До этого фиксируют ОДЗ всех исходных аргументов. После монотонности может появиться рациональное неравенство; его решают методом интервалов и пересекают с ОДЗ.

Коэффициент перед логарифмом переносят в степень аргумента только с сохранением области. Выражения $\log_a (x^2)$ и $2 \log_a x$ имеют разные ОДЗ, поэтому не взаимозаменяемы на всей прямой.

При объединении логарифмов неравенство может изменить алгебраический тип. Сумма двух логарифмов линейных аргументов даёт произведение и квадратное неравенство; разность даёт рациональное. Метод выбирают уже для новой модели, но окончательный ответ всё равно пересекают с первоначальным ОДЗ.

После свойства логарифмов перепроверьте, какой знак стоял между исходными членами. Ошибка «сумма вместо частного» меняет степень нового выражения и обычно заметна по ОДЗ или оценке. Обратное разложение объединённого логарифма служит быстрой проверкой.

$$\log_a u + \log_a v = \log_a (uv)$$

$$\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}$$

Ключевые правила

- ОДЗ записывается до объединения логарифмов.
- Свойства логарифмов знак не меняют; монотонность меняет.
- Алгебраический ответ пересекается с исходной ОДЗ.

Разбор 6. Сумма логарифмов

УРОВЕНЬ. Основной

УСЛОВИЕ

Решите $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) > 3$.



Пересечение с ОДЗ

Ответ: $(3; +\infty)$ 

ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Показательная задача 6. Сумма логарифмов.

1. ОДЗ: $x - 1 > 0$ и $x + 1 > 0$, поэтому $x > 1$.
2. Объединяем: $\log_2 (x^2 - 1) > 3$.
3. Функция возрастает: $x^2 - 1 > 8$, то есть $x^2 > 9$.
4. Алгебра даёт $x < -3$ или $x > 3$.
5. Пересечение с ОДЗ оставляет $x > 3$.

ОТВЕТ. $(3; +\infty)$ **Близкий аналог для самостоятельной работы**Решите $\log_3 (x - 1) - \log_3 (x - 4) \geq 1$.ОДЗ: $x > 4$.

$$\frac{x-1}{x-4} \geq 3.$$

Так как $x - 4 > 0$, получаем $x \leq \frac{11}{2}$; ответ $(4; \frac{11}{2}]$.**ОТВЕТ К АНАЛОГУ.** $(4; \frac{11}{2}]$

8. Рациональный аргумент логарифма

Если аргумент логарифма является дробью, сначала решается условие её положительности. Нули числителя и знаменателя делят прямую на интервалы; нуль числителя не входит, потому что аргумент должен быть строго положительным.

После сравнения логарифма с нулём возникает сравнение аргумента с единицей. Например, при основании 2 условие $\log_2 \frac{x-1}{x-3} > 0$ равносильно дроби больше 1. Его удобно перенести к нулю, но ОДЗ дроби сохраняется.

Иногда функциональное условие автоматически уже ОДЗ, например дробь больше 1 обязательно положительна. Однако в полной записи всё равно полезно показать исходную область, чтобы было видно, почему логарифм существовал на каждом преобразовании.



При основании меньше единицы сравнение с нулём меняет знак: $\log_a u \geq 0$ равносильно $0 < u \leq 1$. Здесь нижняя граница $u > 0$ берётся из ОДЗ, а верхняя — из монотонности.

Рациональный аргумент требует двух уровней контроля: сама дробь положительна, а после сравнения возникает ещё одно условие для её значения. Оба множества решают методом интервалов и пересекают. Знаменатель исключается всегда.

Если логарифм дроби сравнивается с нулём, при основании больше единицы дробь сравнивают с единицей в том же направлении, при дробном — в противоположном, но положительность сохраняют в обоих случаях.

Если рациональный аргумент сравнивается с единицей, перенос выполняют одной дробью: $\frac{A}{B} - 1 = \frac{A-B}{B}$. Нельзя умножать на B без знания его знака. Затем нули $A - B$ и B становятся критическими точками обычного метода интервалов.

Рациональное условие положительности аргумента само является полноценным неравенством. Его нельзя заменить требованием положительности числителя и знаменателя по отдельности: оба могут быть отрицательными. Метод интервалов учитывает оба допустимых сочетания знаков.

$$\begin{aligned} a > 1: \log_a u > 0 &\Leftrightarrow u > 1 \\ 0 < a < 1: \log_a u \geq 0 &\Leftrightarrow 0 < u \leq 1 \end{aligned}$$

Ключевые правила

- ОДЗ рационального аргумента решается методом интервалов.
- Сравнение с нулём означает сравнение аргумента с единицей.
- Для основания меньше единицы получается двойное условие $0 < u \leq 1$.

9. Объединение ограничений на числовой прямой

Сложное решение удобно вести в нескольких строках: отдельно ОДЗ, отдельно результат монотонности, отдельно алгебраическое решение. Затем все множества переносятся на одну числовую прямую и пересекаются.

Квадратная скобка у функциональной границы возможна при нестрогом знаке, но граница ОДЗ остаётся круглой. Например, $(1; 10]$ содержит точку 10, где логарифм равен 2, но не содержит точку 1, где аргумент равен нулю.

При объединении нескольких лучей следите, не удаляет ли ОДЗ один из них полностью. В задаче с x^2 часто сначала возникают симметричные промежутки, а линейная ОДЗ оставляет только правую часть.

Проверка выполняется выбором одной точки внутри каждого компонента и анализом границ. Подставлять точку за пределами ОДЗ в логарифм нельзя; достаточно отметить, что исходное выражение там не определено.

Пересечение условий удобно показывать на отдельных прямых: ОДЗ, основное сравнение, ограничение замены. Под критической точкой подпишите происхождение. Это предотвращает потерю нуля аргумента или разрыва знаменателя.



Тип скобки определяется исходным смыслом: ноль аргумента исключён, допустимая граница при нестрогом знаке может включаться, бесконечность всегда открыта. Каждую конечную точку проверяют отдельно.

На итоговой прямой полезно разными значками отмечать границы разных типов: разрыв, ноль аргумента, равенство основного сравнения. В чистовом ответе остаются стандартные скобки, но черновая маркировка помогает не включить запрещённую точку только потому, что знак неравенства нестрогий.

Если после пересечения остаётся одиночная допустимая точка, проверьте, разрешает ли исходный знак равенство. Строгое неравенство никогда не оставляет точку, где обе части равны. Нестрогий знак включает её только при существовании обоих выражений.

$$X = X_{\text{ОДЗ}} \cap X_{\text{монотонности}} \cap X_{\text{алгебры}}$$

Ключевые правила

- Итог логарифмического неравенства — пересечение всех условий.
- Граница ОДЗ всегда открыта.
- Проверяйте каждый компонент решения отдельно.

10. Полная запись задания 15 и контрольная точка

В показательном неравенстве укажите основание и его монотонность, затем переход к показателям. При замене дополнительно запишите $t > 0$, решите неравенство для t и вернитесь к x . Все переходы должны быть равносильными.

В логарифмическом неравенстве первой строкой идёт ОДЗ. Затем указывается диапазон основания и направление знака, решается сравнение аргументов и выполняется пересечение. Такой порядок позволяет проверяющему увидеть, что знак изменён осознанно.

Ответ записывается точными промежутками. Не заменяйте $\sqrt{8}$ десятичным приближением, если точная граница нужна для доказательства. Одинаковые компоненты объединяются, пустые пересечения удаляются.

Контрольная точка урока соединяет задания 13 и 15: важно не только получить ответ, но и сохранить ОДЗ, ограничения замены, направление монотонности и проверяемую логику. Именно эти элементы отделяют случайно найденный ответ от полного решения.

Полное решение задания 15 строится слоями: условия существования, преобразование по монотонности, алгебраическое неравенство, пересечение и проверка. Одно ясное обоснование разворота знака обязательно.

Для независимой проверки берут точку из каждого заявленного интервала и одну из ближайшего исключённого. Подставляют в исходную функцию, сначала проверяя существование логарифма. Для замены дополнительно контролируют $t > 0$.



Проверка числом должна учитывать вычислимость. Если выбранная точка делает аргумент отрицательным, это не просто «не подходит по знаку» — исходное выражение не существует. Для допустимой точки можно сравнить значения качественно, используя монотонность и известные степени основания, без десятичного калькулятора.

В ответе не записывают ОДЗ и решение рядом без операции пересечения. Финальный набор должен быть уже упрощённым множеством промежутков, пригодным для непосредственной проверки. Повторяющиеся или соприкасающиеся части объединяют только при совместимых граничных точках. После оформления сформулируйте ответ словами: где расположены допустимые значения и какие границы исключены. Такое чтение обнаруживает переставленные скобки и случайно потерянный промежуток. Последняя подстановка выполняется именно в исходное неравенство, до всех преобразований.

ОДЗ → монотонность → алгебра → пересечение → ответ

Ключевые правила

- Монотонность объясняет направление каждого функционального перехода.
- ОДЗ и ограничения замены видны в тексте решения.
- Ответ содержит точные границы и правильные скобки.

Типичные ошибки и способы самопроверки

- Сохранять знак при основании между нулём и единицей.
- Менять знак при основании больше единицы.
- Забывать $t > 0$ в показательной замене.
- Переводить отрицательные значения t обратно к x .
- Начинать логарифмическое преобразование без ОДЗ.
- Считать, что аргумент логарифма может равняться нулю.
- Применять свойства суммы логарифмов вне исходной ОДЗ.
- Не пересекать функциональное условие с ОДЗ.
- Неверно включать границы после строгого знака.

Разборы экзаменационных задач

Разбор 7. Логарифмы с переменным основанием

УРОВЕНЬ. ФИПИ • открытый банк • 1EF816

УСЛОВИЕ

Решите неравенство.

$$\log_{16} (x + 5) + \log_{x^2 + 10x + 25} 2 \geq \frac{3}{4}$$



ИСТОЧНИК. ФИПИ • открытый банк заданий ЕГЭ • идентификатор 1EF816. Условие и числовые данные сохранены; подробное объяснение и учебные акценты добавлены для курса.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. Замена $t = \log_2(x+5)$ одновременно упрощает оба логарифма, поскольку $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$.

ДО РЕШЕНИЯ. ОДЗ: $x+5 > 0$ и $(x+5)^2 \neq 1$; с учётом положительности $x \neq -4$.

1. Записываем ОДЗ

$$x > -5, \quad x \neq -4$$

Аргумент первого логарифма положителен, основание второго положительно и не равно 1.

2. Вводим замену

$$t = \log_2(x+5), \quad t \neq 0$$

Значение $t=0$ соответствует запрещённому основанию 1.

3. Переписываем логарифмы

$$\log_{16}(x+5) = \frac{t}{4}, \quad \log_{(x+5)^2} 2 = \frac{1}{2t}$$

Используем формулу перехода к основанию 2.

4. Решаем рациональное неравенство

$$\frac{t}{4} + \frac{1}{2t} - \frac{3}{4} = \frac{(t-1)(t-2)}{4t} \geq 0$$

Критические точки: 0, 1 и 2.

5. Находим t

$$t \in (0; 1] \cup [2; +\infty)$$

Ноль знаменателя исключаем, нули числителя включаем.

6. Возвращаемся к x

$$x \in (-4; -3] \cup [-1; +\infty)$$

$1 < 2^t \leq 2$ или $2^t \geq 4$, затем вычитаем 5.

Проверка. Точка $x=-4$ не входит; $x=-3$ и $x=-1$ дают равенство.

Типичная ошибка. Не выписать ограничение на переменное основание логарифма и включить $x=-4$.

ОТВЕТ. $(-4; -3] \cup [-1; +\infty)$

Разбор 8. Знак логарифма и квадратный множитель

УРОВЕНЬ. ФИПИ • открытый банк • 553848

УСЛОВИЕ

Решите неравенство.

$$x^2 \log_{243}(4-x) \leq \log_3(x-4)^2$$



ИСТОЧНИК. ФИПИ • открытый банк заданий ЕГЭ • идентификатор 553848. Условие и числовые данные сохранены; подробное объяснение и учебные акценты добавлены для курса.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. После приведения оснований обе части содержат $\log_3(4-x)$; знак произведения исследуем методом интервалов.

ДО РЕШЕНИЯ. ОДЗ определяется условием $4-x>0$, то есть $x<4$.

1. Записываем ОДЗ

$$x < 4$$

Аргумент $\log_{243}(4-x)$ должен быть положительным.

2. Приводим логарифмы

$$\log_{243}(4-x) = \frac{1}{5} \log_3(4-x)$$

$$\log_3(x-4)^2 = 2 \log_3(4-x)$$

$243=3^5$, а при $x<4$ имеем $(x-4)^2=(4-x)^2$.

3. Выносим общий множитель

$$(x^2 - 10) \log_3(4-x) \leq 0$$

Умножаем на положительное число 5 и переносим правую часть влево.

4. Отмечаем критические точки

$$-\sqrt{10}, \quad 3, \quad \sqrt{10}, \quad 4$$

Первые и третья — нули квадратичного множителя, 3 — нуль логарифма, 4 — граница ОДЗ.

5. Расставляем знаки

$$x \in [-\sqrt{10}; 3] \cup [\sqrt{10}; 4)$$

Выбираем участки, где множители имеют разные знаки или один из них равен нулю.

Проверка. $x=3$ и $x=\pm\sqrt{10}$ допустимы и дают равенство; $x=4$ исключён ОДЗ.

Типичная ошибка. Заменить $\log_3((x-4)^2)$ на $2\log_3(x-4)$: при $x<4$ выражение $\log_3(x-4)$ не существует.

ОТВЕТ. $[-\sqrt{10}; 3] \cup [\sqrt{10}; 4)$