



Итоговый тренировочный вариант

Ответы и пошаговые решения

Базовая тренировка: задания 1-12

Задание 1

Тренировка. Площадь трапеции

Основания трапеции равны 18 и 26, высота равна 4. Найдите площадь трапеции по рисунку.

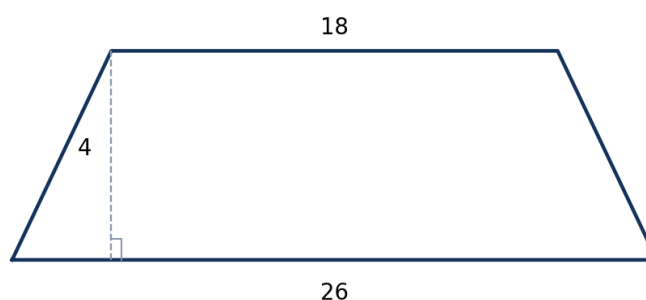


Рисунок к заданию.

Решение

$$1. S = \frac{(18 + 26) \cdot 4}{2} = 88.$$

ОТВЕТ: 88

Задание 2

Тренировка. Векторы

Найдите длину вектора AB , если $A(-2; 1)$, $B(4; 9)$.

Решение

$$1. \text{Координаты вектора: } AB = (4 - (-2); 9 - 1) = (6; 8).$$

$$2. \text{Длина: } |AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: 10



Задание 3

Тренировка. Объём тела

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 4, 7 и 11. Найдите его объём.

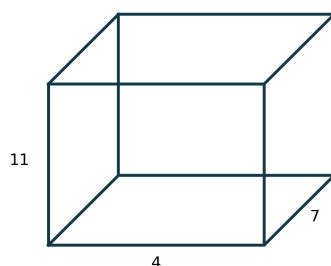


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = 4 \cdot 7 \cdot 11 = 308$.

ОТВЕТ: 308

Задание 4

Тренировка. Вероятность

В партии 20 ламп две неисправны. Случайно выбирают одну лампу. Найдите вероятность выбрать исправную.

Решение

1. Исправны 18 ламп: $P = \frac{18}{20} = 0,9$.

ОТВЕТ: 0,9

Задание 5

Повторение. Вероятность

Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6.

Ответ округлите до сотых.

Решение

1. Ни одной шестёрки: $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

2. $P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Округляем найденную вероятность до сотых: 0,31.

Ответ: 0,31



Задание 6

Повторение. Уравнение

Решите уравнение $\sqrt{x+5} = 4$.

Решение

1. $x + 5 = 16$, поэтому $x = 11$.

ОТВЕТ: 11

Задание 7

Повторение. Модель и проверка

Найдите 35% от 240.

Решение

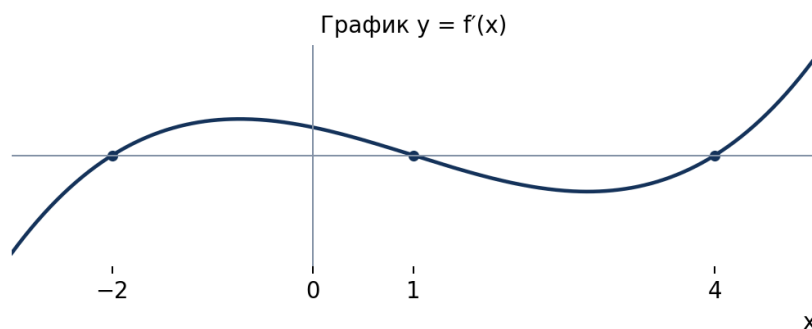
1. $0,35 \cdot 240 = 84$.

ОТВЕТ: 84

Задание 8

Повторение. Знак производной

На рисунке изображён график производной функции; её нули имеют абсциссы -2, 1, 4. Сколько точек экстремума имеет функция на показанном интервале?



Решение

1. Экстремум возникает в каждом нуле производной, где её знак меняется.
2. Знак меняется при $x = -2$, $x = 1$ и $x = 4$, поэтому точек экстремума три.

ОТВЕТ: 3



Задание 9

Тренировка. Модель и проверка

Тормозной путь вычисляется по формуле $s = \frac{v^2}{2a}$. Найдите s при $v = 20$ м/с и $a = 5$ м/с².

Решение

1. $s = \frac{20^2}{2 \cdot 5} = 40$ м.

ОТВЕТ: 40

Задание 10

Тренировка. Движение

Автомобиль проехал одинаковые расстояния со скоростями 60 и 40 км/ч. Найдите среднюю скорость на всём пути.

Решение

1. Для равных расстояний $v_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$.

2. $v_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 40}{100} = 48$ км/ч.

ОТВЕТ: 48

Задание 11

Тренировка. Линейная функция

На рисунке изображён график линейной функции, проходящей через точки $(0; 4)$ и $(1; 8)$. Найдите значение функции при $x = 4$.

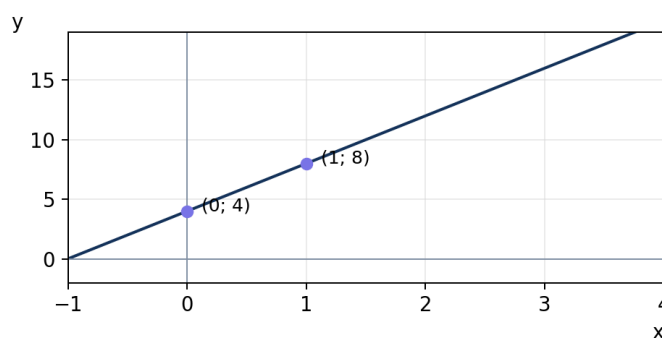


Рисунок к заданию.

Решение

1. По графику или по уравнению прямой $y = 4x + 4$ получаем $y(4) = 20$.

ОТВЕТ: 20



Задание 12

Тренировка. Модель и проверка

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 5 + 4 \sin x$.

Решение

1. Так как $\sin x \leq 1$, то $f(x) \leq 9$.
2. Значение 9 достигается.

ОТВЕТ: 9

Подготовительные и экзаменационные задачи: задания 13–36

Задание 13

Тренировка. Уравнение

а) Решите уравнение $4^x - 40 \cdot 2^x + 256 = 0$. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[2; 4]$.

Решение

1. Положим $t = 2^x > 0$. Получаем $t^2 - 40t + 256 = 0$.
2. Корни квадратного уравнения: $t = 8$ и $t = 32$.
3. Следовательно, $x = 3$ или $x = 5$.
4. Условию пункта б удовлетворяет только $x = 3$.

Ответ: а) $x = 3; 5$; б) $x = 3$

Задание 14

Тренировка. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 3) \geq 3$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 3$.
2. На ОДЗ объединяем логарифмы: $\log_2 ((x - 1)(x - 3)) \geq \log_2 8$.
3. Получаем $(x - 1)(x - 3) \geq 8$, то есть $(x - 5)(x + 1) \geq 0$.
4. Пересечение $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ с ОДЗ даёт $[5; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[5; +\infty)$



Задание 15

Тренировка. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 1 300 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 15%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Ежегодное уменьшение основного долга: $\frac{1300}{5} = 260$ тыс. рублей.
2. Проценты начисляются на остатки 1300, 1040, ..., 260; это арифметическая прогрессия.
3. Сумма остатков: $\frac{5(1300 + 260)}{2} = 3900$ тыс. рублей.
4. Все проценты: $0,15 \cdot 3900 = 585$ тыс. рублей.
5. Общая сумма выплат: $1300 + 585 = 1885$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 1 885 тыс. рублей

Задание 16

Тренировка. Чётность

Может ли сумма квадратов трёх нечётных чисел делиться на 8? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Квадрат нечётного числа сравним с 1 по модулю 8.
2. Сумма трёх квадратов сравнима с 3 по модулю 8.

ОТВЕТ: Нет



Задание 17

Тренировка. Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике катеты равны 18 и 24. Найдите гипотенузу. Используйте рисунок.

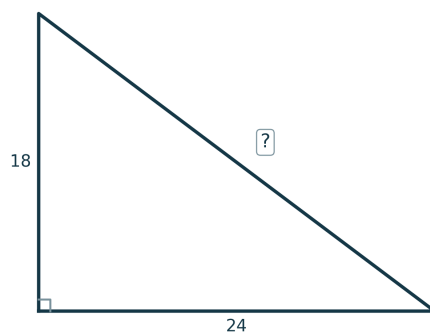


Рисунок к заданию.

Решение

1. По теореме Пифагора $c = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30$.

ОТВЕТ: 30

Задание 18

Тренировка. Модель и проверка

Точки $A(1; -3)$ и $B(7; 5)$ заданы координатами. Найдите длину отрезка АВ.

Решение

1. $\overrightarrow{AB} = (6; 8)$.

2. $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

ОТВЕТ: 10



Задание 19

Формат егэ. Объём цилиндра

Радиус основания цилиндра равен 4, высота — 9. Найдите $\frac{V}{\pi}$.

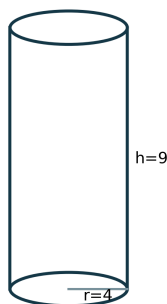


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 9 = 144\pi$, поэтому $\frac{V}{\pi} = 144$.

ОТВЕТ: 144

Задание 20

Формат егэ. Вероятность

Из 25 деталей три имеют дефект. Случайно выбирают одну деталь. Найдите вероятность дефекта.

Решение

1. $P = \frac{3}{25} = 0,12$.

ОТВЕТ: 0,12

Задание 21

Формат егэ. Вероятность

Монету бросают дважды. Найдите вероятность получить ровно один орёл.

Решение

1. Подходят два из четырёх равновероятных исходов: ОР и РО.

2. $P = \frac{2}{4} = 0,5$.

ОТВЕТ: 0,5



Задание 22

Формат егэ. Уравнение

Решите уравнение $\sqrt{2x-1} = 5$.

Решение

1. $2x - 1 = 25$, поэтому $x = 13$.

ОТВЕТ: 13

Задание 23

Формат егэ. Модель и проверка

Увеличьте 75 на 20%.

Решение

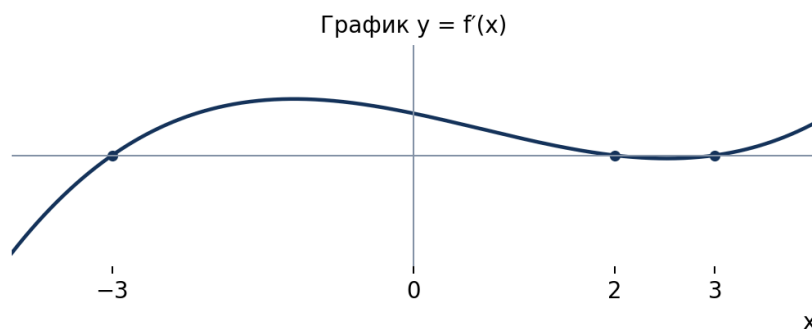
1. $75 \cdot 1,2 = 90$.

ОТВЕТ: 90

Задание 24

Формат егэ. Знак производной

На рисунке изображён график производной функции; её нули имеют абсциссы -3, 2, 3. Сколько точек максимума имеет функция на показанном интервале?



Решение

1. Точка максимума функции соответствует переходу производной от положительных значений к отрицательным.

2. На графике такой переход происходит один раз — в средней отмеченной точке.

ОТВЕТ: 1



Задание 25

Формат егэ. Модель и проверка

Из формулы $s = \frac{v^2}{2a}$ найдите a , если $v = 30$ м/с и $s = 45$ м.

Решение

1. $a = \frac{v^2}{2s} = \frac{900}{90} = 10$ м/с².

ОТВЕТ: 10

Задание 26

Формат егэ. Движение

Автомобиль проехал 120 км со скоростью 60 км/ч и 120 км со скоростью 80 км/ч. Найдите общее время движения.

Решение

1. $t = \frac{120}{60} + \frac{120}{80} = 2 + 1,5 = 3,5$ ч.

ОТВЕТ: 3,5

Задание 27

Формат егэ. Линейная функция

На рисунке изображён график линейной функции, проходящей через точки $(0; 5)$ и $(1; 10)$. Найдите значение функции при $x = 5$.

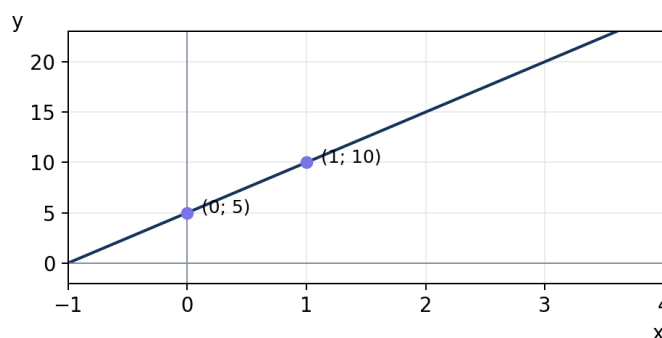


Рисунок к заданию.

Решение

1. По графику или по уравнению прямой $y = 5x + 5$ получаем $y(5) = 30$.

ОТВЕТ: 30



Задание 28

Формат егэ. Модель и проверка

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 2 - 3 \cos x$.

Решение

1. Так как $\cos x \leq 1$, наименьшее значение равно $2 - 3 = -1$.

ОТВЕТ: -1

Задание 29

Формат егэ. Уравнение

а) Решите уравнение $2 \sin^2(x - 6\pi) - 3 \sin(x - 6\pi) + 1 = 0$. **б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку** $\left[\frac{11\pi}{2}; 8\pi\right]$.

Решение

1. Обозначим $y = x - 6\pi$. Разложим: $(2 \sin y - 1)(\sin y - 1) = 0$.

2. Получаем $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ или $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Возвращаемся к x и выполняем отбор на данном отрезке.

4. Подходящие корни: $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{2}$, $\frac{41\pi}{6}$.

Полное решение пункта а: $x = \frac{37\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{41\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{13\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \frac{37\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{41\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{13\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; **б)** $\frac{37\pi}{6}; \frac{13\pi}{2}; \frac{41\pi}{6}$

Задание 30

Формат егэ. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\frac{(x+2)(x-4)}{x-1} \leq 0$.

Решение

1. Критические точки: -2, 1 и 4; точка 1 исключается.

2. Знаки слева направо: минус, плюс, минус, плюс.

3. Получаем $(-\infty; -2] \cup (1; 4]$.

ОТВЕТ: $(-\infty; -2] \cup (1; 4]$



Задание 31

Формат егэ. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 1 000 тыс. рублей на 6 лет. Каждый январь долг увеличивается на 20%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Уменьшение основного долга каждый год: $\frac{1000}{6} = \frac{500}{3}$ тыс. рублей. Промежуточные значения не округляем.
2. Остатки перед начислением процентов: $1000; \frac{2500}{3}; \frac{2000}{3}; 500; \frac{1000}{3}; \frac{500}{3}$.
3. Сумма остатков: $\frac{6}{2} \left(1000 + \frac{500}{3} \right) = 3500$.
4. Проценты за весь срок: $0,2 \cdot 3500 = 700$ тыс. рублей.
5. Общая сумма выплат: $1000 + 700 = 1700$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 1 700 тыс. рублей

Задание 32

Формат егэ. Делимость

Существует ли натуральное n , для которого $5^n + 2^n$ делится на 7? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Подходит $n = 1$: $5 + 2 = 7$.

ОТВЕТ: Да

Задание 33

Формат егэ. Уравнение

а) Решите уравнение $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. **б) Найдите все корни на отрезке** $[-2\pi; 0]$.

Решение

1. Положим $t = \cos x$. Тогда $(2t + 1)(t - 1) = 0$.
2. Получаем $\cos x = -\frac{1}{2}$ или $\cos x = 1$.
3. Общее решение: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
4. На отрезке $[-2\pi; 0]$ лежат $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$ и 0.

Полное решение пункта а: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ **или** $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; **б)** $-2\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; 0$



Задание 34

Формат егэ. Уравнение

а) Решите уравнение $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$. **б) Найдите корни, принадлежащие отрезку** $[0; 3]$.

Решение

1. Положим $t = 2^x > 0$. Получаем $t^2 - 6t + 8 = 0$.
2. Корни квадратного уравнения равны 2 и 4.
3. Отсюда $x = 1$ или $x = 2$.
4. Оба корня принадлежат отрезку $[0; 3]$.

Ответ: а) $x = 1; 2$; б) $x = 1; 2$

Задание 35

Формат егэ. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-8)}{x-5} \geq 0$.

Решение

1. Критические точки: 1, 5 и 8; точка 5 исключается.
2. Знаки слева направо: минус, плюс, минус, плюс.
3. Получаем $[1; 5) \cup [8; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[1; 5) \cup [8; +\infty)$

Задание 36

Формат егэ. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\log_3 (x-2) \geq 2$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 2$.
2. Так как основание 3 больше единицы, знак неравенства сохраняется: $x - 2 \geq 3^2$.
3. С учётом ОДЗ получаем $[11; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[11; +\infty)$



Повторение: задания 37–40

Задание 37

Повторение. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 800 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на некоторый процент, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Известно, что общая сумма выплат равна 1 040 тыс. рублей. Найдите процентную ставку.

Решение

1. Сумма остатков перед начислениями равна $800 \cdot \frac{5+1}{2} = 2400$ тыс. рублей.
2. Переплата равна $1040 - 800 = 240$ тыс. рублей.
3. Из $\frac{p}{100} \cdot 2400 = 240$ получаем $p = 10$.
4. Проверка: 10% от суммы остатков равны 240 тыс. рублей.

ОТВЕТ: 10%

Задание 38

Повторение. Кредит и проценты

Первоначальная сумма кредита — 1 000 тыс. рублей. Кредит выдан на 5 лет под 15% годовых. После начисления процентов вносится один платёж. В первые 2 года основной долг уменьшается ежегодно на одну и ту же величину, и после 2-го платежа остаётся некоторая сумма. В оставшиеся 3 года долг также уменьшается равномерно до нуля. Общая сумма выплат равна 1 375 тыс. рублей. Найдите остаток после 2-го платежа.

Решение

1. Пусть H — долг после двух платежей, в тысячах рублей. В первые два года долг уменьшается на $\frac{1000-H}{2}$.
2. Остатки перед первыми двумя начислениями: 1000 и $\frac{1000+H}{2}$. Их сумма $1500 + \frac{H}{2}$.
3. Перед тремя последними начислениями остатки равны $H; \frac{2H}{3}; \frac{H}{3}$. Их сумма $2H$.
4. Все выплаты — основной долг и проценты: $1000 + 0,15 \left(1500 + \frac{5H}{2} \right) = 1375$.
5. $1225 + 0,375H = 1375$, откуда $H = 400$ тыс. рублей.
6. Проверка: сумма остатков $1500 + 2,5 \cdot 400 = 2500$; $1000 + 0,15 \cdot 2500 = 1375$.

ОТВЕТ: 400 тыс. рублей



Задание 39

Повторение. Модель и проверка

Может ли сумма квадратов двух целых чисел быть равна 2026? Приведите пример или докажите невозможность.

Решение

1. Подходит конструкция $1^2 + 45^2 = 1 + 2025 = 2026$.
2. Оба слагаемых являются квадратами целых чисел.

ОТВЕТ: Да; например, 1 и 45

Задание 40

Повторение. Делимость

Может ли число вида $n^2 - n + 2$ делиться на 4? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Возьмём $n = 2$. Тогда $n^2 - n + 2 = 4$ делится на 4.

ОТВЕТ: Да
