

Урок 6. Рациональные и иррациональные уравнения

При решении уравнения важно найти все корни и исключить посторонние. Начнём с линейных и квадратных уравнений, затем перейдём к дробям с неизвестным в знаменателе и квадратным корням. Для каждого вида разберём ограничения и способ проверки.

В уроке восемь подробных разборов: от раскрытия скобок до уравнений в задачах на движение. Отдельный тест содержит 40 заданий, включая короткое повторение и знакомство с логарифмами и тригонометрическими значениями.

01. Что значит решить уравнение

Уравнение - равенство с неизвестным. Корень уравнения - значение неизвестного, при котором обе части определены и равны. Решить уравнение означает найти все корни или доказать, что их нет. Одного подходящего числа недостаточно, если возможны другие.

Область допустимых значений (ОДЗ) - все значения неизвестного, при которых выражения в исходной записи имеют смысл. У дроби знаменатель не равен нулю; у квадратного корня подкоренное выражение неотрицательно. ОДЗ записывают до сокращения дробей и других преобразований.

Какие преобразования сохраняют корни

К обеим частям можно прибавить одно и то же выражение, определённое на рассматриваемой области. Обе части можно умножить или разделить на одно и то же ненулевое число. «Перенос слагаемого со сменой знака» - краткая запись такого прибавления или вычитания.

С выражением, содержащим неизвестное, нужна осторожность. Если разделить $x(x - 3) = 0$ на x , потеряется корень $x = 0$. Правильный путь - приравнять каждый множитель к нулю: $x = 0$ или $x = 3$.

02. Линейные и квадратные уравнения

Линейное уравнение приводят к виду $ax = b$. Если $a \neq 0$, единственный корень равен $x = \frac{b}{a}$. Если $a = 0$, проверьте правую часть: при $b = 0$ равенство верно для всех допустимых x , при $b \neq 0$ решений нет. Например, из $2(x + 1) = 2x + 5$ получится $2 = 5$, поэтому корней нет.

Квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Сначала проверьте, нельзя ли вынести общий множитель или разложить выражение на множители. Для $x^2 - 5x = 0$ сразу получается $x(x - 5) = 0$.

Дискриминант и формула корней

Для общего случая вычисляют $D = b^2 - 4ac$.

Дискриминант	Действительные корни
$D > 0$	Два корня: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D = 0$	Один корень: $x = -\frac{b}{2a}$
$D < 0$	Действительных корней нет

Коэффициент берут вместе со знаком. В уравнении $2x^2 - 5x - 3 = 0$ значение b равно -5 . Поэтому $-b = 5$, а $b^2 = (-5)^2 = 25$. Знаменатель $2a$ относится ко всему числителю формулы.

Для проверки корней используют теорему Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Например, для $x^2 - 7x + 12 = 0$ подходят 3 и 4: сумма равна 7, произведение - 12.

03. Дробно-рациональные уравнения

Рациональное уравнение составлено из рациональных выражений. Если неизвестное находится в знаменателе, уравнение называют дробно-рациональным. Главная опасность - получить значение, при котором исходная дробь не определена.

Порядок решения:

1. Выпишите все ненулевые знаменатели и найдите запрещённые значения.
2. Разложите знаменатели на множители, если это помогает найти общий знаменатель.
3. На ОДЗ умножьте обе части на общий знаменатель.
4. Решите полученное уравнение.
5. Отберите допустимые корни и подставьте их в исходную запись.

Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Например, $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$ допускает $x = -3$, но не $x = 3$. После сокращения множителя $x - 3$ запрет $x \neq 3$ сохраняется.

04. Уравнения с квадратным корнем

Квадратный корень $\sqrt{A}$ по определению неотрицателен. Поэтому в уравнении $\sqrt{A(x)} = B(x)$ необходимы условия $A(x) \geq 0$ и $B(x) \geq 0$. После этого можно перейти к $A(x) = B(x)^2$.

Возведение в квадрат без учёта знаков может добавить посторонний корень: числа 3 и -3 имеют одинаковые квадраты, но сами не равны. Проверять нужно исходное уравнение, а не только уравнение после возведения в квадрат.

Например, $\sqrt{x+1} = x-1$ требует $x \geq 1$. После возведения в квадрат получаем $x+1 = x^2 - 2x + 1$, затем $x(x-3) = 0$. Кандидаты 0 и 3; подходит только 3. При $x = 0$ правая часть отрицательна.

Модуль и смысл корней в задаче

Модуль - расстояние до нуля. Поэтому $|x - a| = b$ при $b > 0$ даёт два случая: $x - a = b$ или $x - a = -b$. При $b = 0$ корень один, при $b < 0$ корней нет.

В текстовой задаче неизвестное сначала нужно определить словами и указать единицу. Если x - меньшая скорость, найденное x ещё не обязательно является ответом: могут спрашивать большую скорость $x + 9$. Отрицательное время и отрицательная длина обычно не подходят по смыслу, даже если решают полученное алгебраическое уравнение.

05. Повторение для заданий урока

В тесте встречаются короткие задания из соседних тем. Логарифм $\log_a b$ - показатель степени, в которую нужно возвести a , чтобы получить b : $\log_2 32 = 5$, потому что $2^5 = 32$. Основание положительно и не равно 1, аргумент положителен.

Для углов используем радианы: π соответствует 180° . Табличные значения: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Подробно степени и логарифмы изучаются в уроке 7, а тригонометрические значения - в уроке 8.

06. Примеры с пошаговыми решениями

Разбор 1. Линейное уравнение со скобками

Условие

Решите уравнение.

$$3(2x - 1) - 5 = x + 8$$

Короткое правило.

Раскрываем скобки, собираем слагаемые с x в одной части, числа - в другой. В конце делим обе части на коэффициент при x .

До решения.

После раскрытия скобок слева будет $6x - 8$. Коэффициент при x останется ненулевым, значит, ожидается один корень.

1. Раскрываем скобки

$$6x - 3 - 5 = x + 8$$

Число 3 умножается на каждое слагаемое в скобках.

2. Приводим подобные

$$6x - 8 = x + 8$$

Слева объединяем числа -3 и -5 .

3. Переносим слагаемые

$$6x - x = 8 + 8$$

При переносе через знак равенства знак слагаемого меняется.

4. Делим на 5

$$5x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

Делим обе части равенства на одно и то же ненулевое число.

Проверка. Подстановка: $3(32/5-1)-5=56/5$, а $16/5+8=56/5$. Левая и правая части равны.

Типичная ошибка. Раскрыть $3(2x-1)$ как $6x-1$ и не умножить второе слагаемое на 3.

Ответ.

$$x = \frac{16}{5}$$

Разбор 2. Квадратное уравнение через вынесение множителя

Условие

Решите уравнение.

$$x^2 - 5x = 0$$

Короткое правило.

Если каждое слагаемое содержит x , выносим x за скобки и используем правило: произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю.

До решения.

Свободного члена нет, поэтому $x=0$ сразу является корнем. Второй корень найдём из оставшегося множителя.

1. Выносим общий множитель

$$x(x - 5) = 0$$

Оба слагаемых делятся на x .

2. Приравниваем множители к нулю

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x - 5 = 0$$

Нулевое произведение даёт две отдельные возможности.

3. Находим второй корень

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 5$$

Из $x-5=0$ прибавляем 5 к обеим частям.

Проверка. $0^2-5\cdot 0=0$; $5^2-5\cdot 5=25-25=0$. Оба числа подходят.

Типичная ошибка. Разделить уравнение на x и потерять корень $x=0$.

Ответ.

$$x = 0; 5$$

Разбор 3. Полное квадратное уравнение

Условие

Решите уравнение.

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Короткое правило.

Для $ax^2+bx+c=0$ вычисляем дискриминант $D=b^2-4ac$. Если $D>0$, получаем два корня.

До решения.

Произведение корней равно $c/a=-3/2$, значит, корни должны иметь разные знаки.

1. Выписываем коэффициенты

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = -3$$

Знак входит в коэффициент: b именно -5 .

2. Считаем дискриминант

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$$

Минус перед отрицательным произведением превращается в плюс.

3. Подставляем в формулу

$$x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$-b=5, \quad 2a=4, \quad \sqrt{D}=7.$$

4. Получаем два корня

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Отдельно вычисляем значение со знаком плюс и со знаком минус.

Проверка. Сумма корней $3 - 1/2 = 5/2 = -b/a$, произведение $3 \cdot (-1/2) = -3/2 = c/a$.

Типичная ошибка. Подставить $b=5$ вместо $b=-5$ или забыть скобки в $(-5)^2$.

Ответ.

$$x = 3; \quad -\frac{1}{2}$$

Разбор 4. Рациональное уравнение: один знаменатель**Условие**

Решите уравнение.

$$\frac{x+1}{x-2} = 2$$

Короткое правило.

Сначала записываем ОДЗ, затем умножаем обе части на знаменатель. Найденный корень сверяем с ограничением.

До решения.

При $x=2$ выражение не существует. Это число нельзя получить в ответе даже после верных преобразований.

1. Записываем ОДЗ

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

Деление на ноль не определено.

2. Умножаем на $x-2$

$$x + 1 = 2(x - 2)$$

На ОДЗ множитель $x-2$ ненулевой, поэтому преобразование равносильно.

3. Решаем линейное уравнение

$$x + 1 = 2x - 4 \Rightarrow x = 5$$

Переносим x в правую часть, число -4 - в левую.

4. Сверяем с ОДЗ

$$5 \neq 2$$

Корень не обращает знаменатель в ноль.

Проверка. $(5+1)/(5-2)=6/3=2$ - равенство выполняется.

Типичная ошибка. Сократить или умножить на знаменатель, не выписав запрещённое значение $x=2$.

Ответ.

$$x = 5$$

Разбор 5. Рациональное уравнение с общим знаменателем

Условие

Решите уравнение.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{x^2-1}$$

Короткое правило.

Разлагаем общий знаменатель на множители, фиксируем все запрещённые значения и только затем умножаем уравнение на общий знаменатель.

До решения.

$x^2-1=(x-1)(x+1)$, поэтому запрещены два значения: $x=-1$ и $x=1$.

1. Записываем ОДЗ

$$x \neq -1, \quad x \neq 1$$

Каждый знаменатель должен быть ненулевым.

2. Умножаем на $(x-1)(x+1)$

$$2(x+1) + (x-1) = 3$$

Все дроби сокращаются, а уравнение становится линейным.

3. Приводим подобные

$$2x + 2 + x - 1 = 3 \Rightarrow 3x = 2$$

Слева получаем $3x+1$, затем вычитаем 1.

4. Находим и проверяем корень

$$x = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \neq \pm 1$$

Полученное число входит в ОДЗ.

Проверка. После умножения на общий знаменатель при $x=2/3$ получается одно и то же равенство $3=3$.

Типичная ошибка. Считать x^2-1 равным $(x-1)^2$ или забыть одно из запрещённых значений.

Ответ.

$$x = \frac{2}{3}$$

Разбор 6. Квадратный корень: обязательная проверка

Условие

Решите уравнение.

$$\sqrt{76 - 2x} = 8$$

Короткое правило.

Если квадратный корень равен неотрицательному числу, возводим обе части в квадрат. После преобразования проверяем найденное значение в исходном уравнении.

До решения.

Правая часть 8 неотрицательна. Для существования корня нужно $76 - 2x \geq 0$, то есть $x \leq 38$.

1. Фиксируем условие существования

$$76 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 38$$

Под квадратным корнем не может быть отрицательное число.

2. Возводим обе части в квадрат

$$76 - 2x = 64$$

Обе части исходного уравнения неотрицательны.

3. Решаем линейное уравнение

$$-2x = -12 \Rightarrow x = 6$$

Вычитаем 76 и делим на -2 .

4. Проверяем

$$\sqrt{76 - 2 \cdot 6} = \sqrt{64} = 8$$

Подстановка подтверждает, что корень не посторонний.

Проверка. $x=6$ удовлетворяет и ОДЗ $x \leq 38$, и исходному равенству.

Типичная ошибка. Возвести в квадрат только число 8 или забыть проверить кандидата после возведения в квадрат.

Ответ.

$$x = 6$$

Разбор 7. Квадратное уравнение в задаче на движение

Условие

Мотоциклист выехал из города со скоростью 60 км/ч и начал разгоняться с ускорением 32 км/ч². Расстояние задаётся формулой $S = v_0 t + at^2/2$. За какое время он удалится на 154 км? Ответ дайте в минутах.

$$154 = 60t + \frac{32t^2}{2}$$

Короткое правило.

После решения уравнения отбрасываем отрицательное время и переводим часы в минуты только в самом конце.

До решения.

За 2 часа без разгона мотоциклист проехал бы 120 км, а с разгоном - больше. Значит, положительный корень должен быть меньше 2 часов.

1. Составляем квадратное уравнение

$$16t^2 + 60t - 154 = 0 \Leftrightarrow 8t^2 + 30t - 77 = 0$$

Переносим 154 в левую часть и делим коэффициенты на 2.

2. Считаем дискриминант

$$D = 30^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-77) = 3364 = 58^2$$

Отрицательный свободный член превращает второе слагаемое в плюс.

3. Находим кандидатов

$$t = \frac{-30 \pm 58}{16} = \frac{7}{4}; -\frac{11}{2}$$

Получаем один положительный и один отрицательный корень.

4. Отбираем время и переводим единицы

$$t = \frac{7}{4} \text{ ч} = \frac{7}{4} \cdot 60 = 105 \text{ мин}$$

Отрицательное время невозможно; 1 час равен 60 минутам.

Проверка. $60 \cdot (7/4) + 16 \cdot (7/4)^2 = 105 + 49 = 154$ км.

Типичная ошибка. Записать 7/4 в ответ без перевода в минуты или оставить отрицательный корень.

Ответ. 105 минут; в краткий ответ записывается число 105.

105

Разбор 8. Рациональное уравнение в задаче о велосипедистах**Условие**

Два велосипедиста проехали 190 км. Скорость первого на 9 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл на 9 часов раньше. Найдите скорость велосипедиста, прибывшего первым.

Короткое правило.

Время равно расстоянию, делённому на скорость. Удобно обозначить меньшую скорость x , а искомую большую - $x+9$.

До решения.

Обе скорости положительны. Время медленного $190/x$ больше времени быстрого $190/(x+9)$ ровно на 9 часов.

1. Составляем уравнение

$$\frac{190}{x} - \frac{190}{x+9} = 9, \quad x > 0$$

Разность времён равна 9 часам.

2. Умножаем на $x(x+9)$

$$190(x+9) - 190x = 9x(x+9)$$

При $x > 0$ оба знаменателя ненулевые.

3. Упрощаем

$$x^2 + 9x - 190 = 0$$

Слева остаётся 1710; делим равенство на 9 и переносим 190.

4. Находим допустимую скорость

$$(x-10)(x+19) = 0 \Rightarrow x = 10$$

Корень -19 не удовлетворяет условию $x > 0$.

5. Отвечаем на вопрос

$$x+9 = 10+9 = 19$$

Спрашивают скорость первого, то есть более быстрого велосипедиста.

Проверка. $190/10=19$ ч, $190/19=10$ ч; разница 9 часов.

Типичная ошибка. Найти $x=10$ и записать его в ответ, не заметив, что x обозначал меньшую скорость.

Ответ. 19 км/ч; в краткий ответ записывается число 19.

19

07. Основные формулы

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad D = b^2 - 4ac, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Rightarrow P(x) = 0, \quad Q(x) \neq 0$$

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Rightarrow A(x) = B^2(x), \quad B(x) \geq 0$$

08. Вопросы по теме

Достаточно ли проверить корень по ОДЗ?

После равносильных преобразований обычно достаточно отбора по ОДЗ. После действий, способных добавить корни, нужна проверка исходного равенства или полный набор условий равносильности.

Почему нельзя делить уравнение на x ?

Если x может быть нулём, такое деление исключает возможный корень. Сначала рассмотрите $x = 0$ отдельно либо используйте разложение на множители.