



ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА · УРОК 34

Практикум: финансовые и целочисленные задачи

Ответы и пошаговые решения

Базовая тренировка: задания 1-12

Задание 1

Тренировка. Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике катеты равны 7 и 24. Найдите гипотенузу. Используйте рисунок.

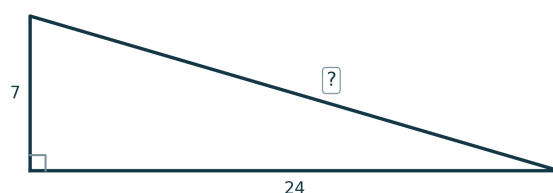


Рисунок к заданию.

Решение

1. По теореме Пифагора $c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$.

ОТВЕТ: 25

Задание 2

Тренировка. Векторы

При каком k векторы $(k; 2)$ и $(3; -6)$ перпендикулярны?

Решение

1. Для перпендикулярных векторов $3k + 2 \cdot (-6) = 0$.

2. $3k = 12$, поэтому $k = 4$.

ОТВЕТ: 4



Задание 3

Тренировка. Объём цилиндра

Радиус основания цилиндра равен 6, высота — 7. Найдите $\frac{V}{\pi}$.

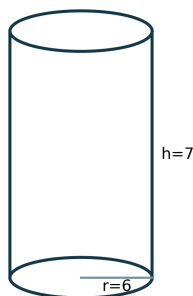


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 7 = 252\pi$, поэтому $\frac{V}{\pi} = 252$.

ОТВЕТ: 252

Задание 4

Тренировка. Вероятность

Бросают правильный игральный кубик. Найдите вероятность выпадения числа больше 4.

Решение

1. Подходят исходы 5 и 6: $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

ОТВЕТ: $\frac{1}{3}$

Задание 5

Повторение. Вероятность

Пассажир выбирает автобус с вероятностью 0,35 или трамвай с вероятностью 0,25; одновременно выбрать оба нельзя. Найдите вероятность выбрать один из этих видов транспорта.

Решение

1. Несовместимые вероятности складываются: $P = 0,35 + 0,25 = 0,6$.

ОТВЕТ: 0,6



Задание 6

Повторение. Уравнение

Решите уравнение $\log_2 (x - 1) = 3$.

Решение

1. $x - 1 = 2^3 = 8$.

2. $x = 9$ удовлетворяет ОДЗ.

ОТВЕТ: 9

Задание 7

Повторение. Модель и проверка

Вычислите $\log_2 32 + \log_3 27$.

Решение

1. $5 + 3 = 8$.

ОТВЕТ: 8

Задание 8

Повторение. Знак производной

На рисунке изображён график производной функции; её нули имеют абсциссы -3, 1, 3. Сколько точек минимума имеет функция на показанном интервале?

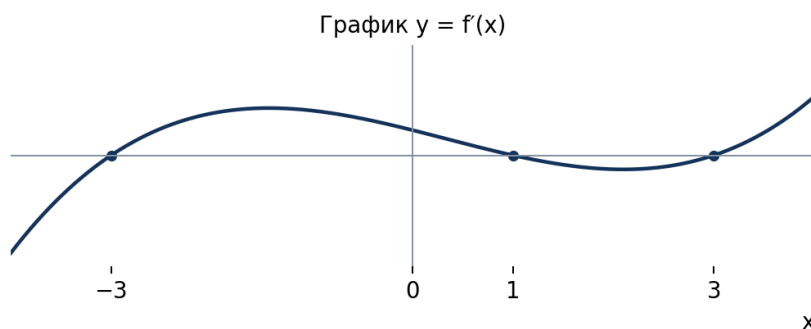


Рисунок к заданию.

Решение

1. Ищем переходы производной от минуса к плюсу.

2. Они происходят при $x = -3$ и $x = 3$, поэтому точек минимума две.

ОТВЕТ: 2



Задание 9

Тренировка. Модель и проверка

Кинетическая энергия равна $E = \frac{mv^2}{2}$. Найдите E при $m = 4$ кг и $v = 3$ м/с.

Решение

1. $E = \frac{4 \cdot 3^2}{2} = 18$ Дж.

ОТВЕТ: 18

Задание 10

Тренировка. Движение

Собственная скорость лодки 15 км/ч, скорость течения 3 км/ч. Какое расстояние лодка пройдёт за 2 часа по течению?

Решение

1. Скорость по течению $15 + 3 = 18$ км/ч.

2. Путь $18 \cdot 2 = 36$ км.

ОТВЕТ: 36

Задание 11

Тренировка. Линейная функция

На рисунке изображён график линейной функции, проходящей через точки $(0; 3)$ и $(1; 4)$. Найдите значение функции при $x = 1$.

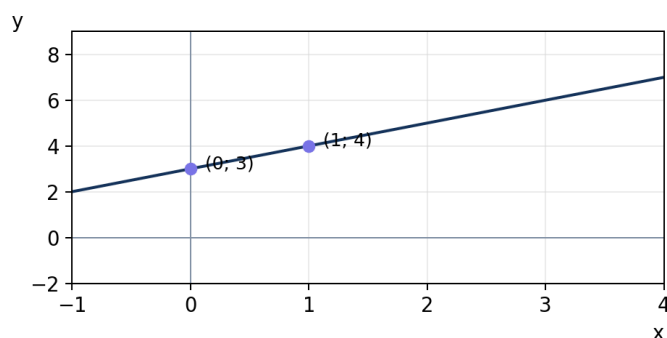


Рисунок к заданию.

Решение

1. По графику или по уравнению прямой $y = 1x + 3$ получаем $y(1) = 4$.

ОТВЕТ: 4



Задание 12

Тренировка. Модель и проверка

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-2; 0]$.

Решение

1. $f'(x) = 3x^2 - 3$, критическая точка на отрезке: $x = -1$.
2. $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$.
3. Наибольшее значение равно 2.

ОТВЕТ: 2

Подготовительные и экзаменационные задачи: задания 13–36

Задание 13

Тренировка. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 1 300 тыс. рублей на 4 года. Каждый январь долг увеличивается на 15%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Ежегодное уменьшение основного долга: $\frac{1300}{4} = 325$ тыс. рублей.
2. Проценты начисляются на остатки 1300, 975, ..., 325; это арифметическая прогрессия.
3. Сумма остатков: $\frac{4(1300 + 325)}{2} = 3250$ тыс. рублей.
4. Все проценты: $0,15 \cdot 3250 = 487,5$ тыс. рублей.
5. Общая сумма выплат: $1300 + 487,5 = 1787,5$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 1787,5 тыс. рублей

Задание 14

Тренировка. Делимость

Всегда ли число $10^n - 1$ делится на 9 при натуральном n ? Докажите.

Решение

1. По модулю 9 имеем $10 \equiv 1$.
2. Поэтому $10^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod{9}$.

ОТВЕТ: Да



Задание 15

Тренировка. Площадь трапеции

Основания трапеции равны 16 и 22, высота равна 9. Найдите площадь трапеции по рисунку.



Рисунок к заданию.

Решение

$$1. S = \frac{(16 + 22) \cdot 9}{2} = 171.$$

ОТВЕТ: 171

Задание 16

Тренировка. Векторы

Даны векторы $\vec{a} = (8; 4)$ и $\vec{b} = (4; 7)$. Найдите их скалярное произведение.

Решение

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 4 + (4) \cdot 7 = 60.$$

ОТВЕТ: 60



Задание 17

Тренировка. Объём тела

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 9, 6 и 10. Найдите его объём.

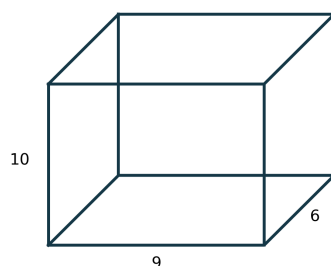


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = 9 \cdot 6 \cdot 10 = 540$.

ОТВЕТ: 540

Задание 18

Тренировка. Векторы

При каком k векторы $(2; k)$ и $(5; -1)$ перпендикулярны?

Решение

1. Их скалярное произведение равно $2 \cdot 5 - k$.

2. Из $10 - k = 0$ получаем $k = 10$.

ОТВЕТ: 10

Задание 19

Формат егэ. Вероятность

Вероятности попадания двух независимых стрелков равны 0,7 и 0,8. Найдите вероятность хотя бы одного попадания.

Решение

1. Вероятность двух промахов: $(1 - 0,7)(1 - 0,8) = 0,06$.

2. Искомая вероятность: $1 - 0,06 = 0,94$.

ОТВЕТ: 0,94



Задание 20

Формат егэ. Вероятность

Бросают правильный игральный кубик. Найдите вероятность выпадения простого числа.

Решение

1. Подходят 2, 3 и 5: $P = \frac{3}{6} = 0,5$.

ОТВЕТ: 0,5

Задание 21

Формат егэ. Вероятность

Вероятность события «сегодня состоится контрольная по математике и ученик получит пятёрку» равна 0,4. Вероятность аналогичного события для физики равна 0,3. В этот день проводится не более одной из этих контрольных. Найдите вероятность получить пятёрку на одной из них.

Решение

1. События несовместимы: в один день не могут состояться обе контрольные.
2. Вероятность их объединения равна сумме: $0,4 + 0,3 = 0,7$.

Ответ: 0,7

Задание 22

Формат егэ. Уравнение

Решите уравнение $\log_3 (2x + 1) = 2$.

Решение

1. $2x + 1 = 3^2 = 9$.
2. $x = 4$ удовлетворяет ОДЗ.

ОТВЕТ: 4

Задание 23

Формат егэ. Модель и проверка

Вычислите $\log_5 125 - \log_2 8$.

Решение

1. $3 - 3 = 0$.

ОТВЕТ: 0



Задание 24

Формат егэ. Движение

Автомобиль ехал 2 ч со скоростью 50 км/ч и затем 3 ч со скоростью 45 км/ч. Найдите весь путь.

Решение

1. $S = 50 \cdot 2 + 45 \cdot 3 = 235$ км.

ОТВЕТ: 235

Задание 25

Формат егэ. Движение

По формуле $E = \frac{mv^2}{2}$ найдите скорость, если $E = 100$ Дж и $m = 8$ кг.

Решение

1. $100 = 4v^2$, значит $v^2 = 25$.

2. Скорость положительна, поэтому $v = 5$ м/с.

ОТВЕТ: 5

Задание 26

Формат егэ. Движение

Собственная скорость катера 18 км/ч, скорость течения 2 км/ч. Какой путь катер пройдёт за 3 часа против течения?

Решение

1. Скорость против течения $18 - 2 = 16$ км/ч.

2. Путь $16 \cdot 3 = 48$ км.

ОТВЕТ: 48



Задание 27

Формат егэ. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 1 400 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 20%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Ежегодное уменьшение основного долга: $\frac{1400}{5} = 280$ тыс. рублей.
2. Проценты начисляются на остатки 1400, 1120, ..., 280; это арифметическая прогрессия.
3. Сумма остатков: $\frac{5(1400 + 280)}{2} = 4200$ тыс. рублей.
4. Все проценты: $0,2 \cdot 4200 = 840$ тыс. рублей.
5. Общая сумма выплат: $1400 + 840 = 2240$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 2 240 тыс. рублей

Задание 28

Формат егэ. Модель и проверка

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 12x$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение

1. $f'(x) = 3x^2 - 12$, критическая точка $x = 2$.
2. $f(0) = 0$, $f(2) = -16$, $f(3) = -9$.
3. Наибольшее значение равно 0.

ОТВЕТ: 0



Задание 29

Формат егэ. Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 и 16. Найдите гипотенузу. Используйте рисунок.

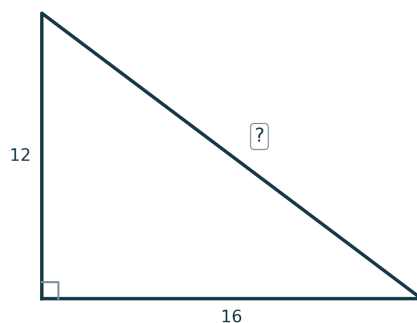


Рисунок к заданию.

Решение

1. По теореме Пифагора $c = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

ОТВЕТ: 20

Задание 30

Формат егэ. Векторы

Даны векторы $\vec{a} = (2; -2)$ и $\vec{b} = (4; 8)$. Найдите их скалярное произведение.

Решение

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 8 = -8$.

ОТВЕТ: -8



Задание 31

Формат егэ. Объём цилиндра

Радиус основания цилиндра равен 2, высота — 8. Найдите $\frac{V}{\pi}$.

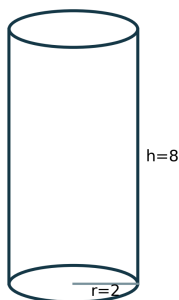


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi$, поэтому $\frac{V}{\pi} = 32$.

ОТВЕТ: 32

Задание 32

Формат егэ. Вероятность

В коробке 10 красных и 10 синих шаров. Наугад выбирают один шар. Найдите вероятность выбрать красный шар.

Решение

1. Всего 20 равновозможных исходов, благоприятных — 10.

2. $P = \frac{10}{20} = 0,5$.

ОТВЕТ: 0,5

Задание 33

Формат егэ. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 900 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 20%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите платёж в 3-й год. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Перед начислением процентов в 3-й год остаток равен 540 тыс. рублей.

2. Проценты составят $0,2 \cdot 540 = 108$ тыс. рублей.

3. Часть основного долга во всех платежах одинакова: $\frac{900}{5} = 180$.

4. Платёж: $180 + 108 = 288$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 288 тыс. рублей



Задание 34

Формат егэ. Кредит и проценты

Первоначальная сумма кредита — 1 500 тыс. рублей. Кредит выдан на 6 лет под 12% годовых. За первые 2 года основной долг равномерно уменьшается до 900 тыс. рублей, а в оставшиеся 4 года — до нуля. Найдите общую сумму выплат. Ответ дайте в тысячах рублей.

В каждом году проценты начисляются один раз перед единственным годовым платежом.

Решение

1. В первые два года долг уменьшается на $\frac{1500 - 900}{2} = 300$ тыс. рублей, затем — на $\frac{900}{4} = 225$ тыс. рублей.
2. Остатки перед начислениями равны 1 500, 1 200, 900, 675, 450 и 225 тыс. рублей.
3. Их сумма равна 4 950 тыс. рублей, поэтому проценты составят $0,12 \cdot 4950 = 594$ тыс. рублей.
4. Общая сумма выплат равна $1500 + 594 = 2094$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 2 094 тыс. рублей

Задание 35

Формат егэ. Модель и проверка

Может ли квадрат целого числа оканчиваться цифрой 2? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Последняя цифра квадрата определяется последней цифрой исходного числа.
2. Квадраты цифр 0–9 оканчиваются только на 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

ОТВЕТ: Нет

Задание 36

Формат егэ. Чётность

Может ли сумма трёх нечётных целых чисел быть равна 2026? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Сумма двух нечётных чисел чётна, а добавление третьего нечётного даёт нечётное число.
2. Число 2026 чётно.

ОТВЕТ: Нет



Повторение: задания 37-40

Задание 37

Повторение. Уравнение

а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. **б) Найдите все корни на отрезке** $[0; 2\pi]$.

Решение

1. Положим $t = \sin x$. Тогда $(2t - 1)(t + 1) = 0$.

2. Получаем $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

3. Общее решение: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

4. На отрезке $[0; 2\pi]$ лежат $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Полное решение пункта а: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$

Задание 38

Повторение. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-8)}{x-4} \geq 0$.

Решение

1. Критические точки: 1, 4, 8; точка 4 не входит в ОДЗ.

2. Расставляем знаки множителей на четырёх промежутках. Кратности всех нулей нечётные, поэтому знак меняется в каждой критической точке.

3. Выбираем нужные промежутки и получаем $[1; 4) \cup [8; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[1; 4) \cup [8; +\infty)$

Задание 39

Повторение. Уравнение

а) Решите уравнение $9^x - 13 \cdot 3^x + 36 = 0$. **б) Найдите корни, принадлежащие отрезку** $[1; 2]$.

Решение

1. Положим $t = 3^x > 0$. Тогда $t^2 - 13t + 36 = 0$.

2. Получаем $t=4$ или $t=9$.

3. Следовательно, $x = \log_3 4$ или $x = 2$.

4. Оба корня принадлежат отрезку $[1; 2]$.

Ответ: а) $x = \log_3 4; 2$; б) $x = \log_3 4; 2$



Задание 40

Повторение. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > -2$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 1$.

2. Основание $\frac{1}{2}$ лежит между 0 и 1, поэтому знак при переходе к аргументам меняется:

$$x - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$$

3. Совмещая с ОДЗ, получаем $1 < x < 5$.

ОТВЕТ: $(1; 5)$