



Урок 20. Планиметрия первой части

Планиметрия первой части. Правила, способы проверки и восемь пошаговых разборов.

01. От данных чертежа к свойству

Геометрический рисунок помогает увидеть конфигурацию, но не заменяет условие. Равные на вид стороны не обязаны быть равными; почти прямой угол не даёт права применять теорему Пифагора. Достоверны подписи, специальные отметки и доказанные следствия.

Начните с обозначений. Угол ABC имеет вершину в B , а отрезок AB соединяет две точки. Если спрашивают угол при вершине равнобедренного треугольника, сначала найдите, какие равные стороны сходятся в этой вершине. Основание лежит напротив неё.

Главное правило. Перед каждой формулой назовите свойство, которое разрешает её применить: параллельность, равнобедренность, прямой угол, подобие или касание.

02. Длина, площадь и коэффициент подобия

При подобии с коэффициентом k соответствующие длины и периметры меняются в k раз, площади - в k^2 раз. Если площадь выросла в 9 раз, соответствующая сторона выросла в 3 раза, а не в 9. Соответствие вершин устанавливают до составления пропорции.

В формуле площади треугольника $S = ah/2$ высота должна быть перпендикулярна выбранному основанию или его продолжению. Наклонная боковая сторона не заменяет высоту. В формуле площади параллелограмма множителя $1/2$ нет, а у трапеции используется полусумма двух оснований.

03. Как проверять решение

Углы треугольника положительны и дают в сумме 180° . Гипотенуза длиннее любого катета. Длина положительна, площадь неотрицательна. Найденное значение должно соответствовать единицам вопроса: квадратные сантиметры для площади и обычные сантиметры для длины.

В задачах об окружности определите положение вершины угла. Центральный угол равен градусной мере своей дуги, вписанный - половине дуги, на которую он опирается. Радиус к точке касания перпендикулярен касательной. Эти признаки нельзя применять только из-за похожего изображения.

Если в ответе появляется корень, сохраните точную запись до конца. Проверка возведением в квадрат или обратной подстановкой должна возвращать исходную длину либо площадь. Дополнительное построение полезно, когда оно создаёт знакомую фигуру: высоту, прямоугольный треугольник или пару подобных треугольников.

04. Как читать чертёж и не придумывать лишнего

Планиметрическая задача начинается не с формулы, а с чтения условия. На одном рисунке одновременно могут быть показаны точки, отрезки, углы, параллельные прямые, равные

стороны и окружность. Ученик часто смотрит на фигуру целиком и пытается угадать знакомую формулу. Надёжнее разбирать чертёж послойно. Сначала называем все фигуры, которые действительно заданы: например, треугольник ABC, точка D на стороне BC, отрезок AD, окружность с центром O. Затем переносим на рисунок только данные из текста. После этого отдельно отмечаем то, что можно строго вывести. Такой порядок не позволяет принять внешнее сходство за доказанный факт.

Чертёж в экзаменационной задаче может быть выполнен не в масштабе. Сторона, которая кажется длиннее, не обязана быть длиннее по условию; угол, похожий на прямой, не равен 90° , пока нет значка прямого угла или соответствующего текста. Равенство отрезков показывают одинаковыми штрихами. Параллельность двух прямых - одинаковыми стрелками. Перпендикулярность - маленьким квадратом. Равенство углов - одинаковыми дугами. Если отметки нет, свойство нельзя использовать только потому, что рисунок выглядит симметричным.

Полезно различать данные и следствия цветом или видом подписи. Числа и отметки из условия - первый слой. Вычисленные углы, найденные равные отрезки и построенные вспомогательные линии - второй слой. Например, если $AB = AC$, это данное. Из него следует равенство углов при основании B и C - это уже следствие. Если из вершины A проведена медиана к BC, то $BD = DC$ по определению медианы. Но перпендикулярность AD и BC появится только в особом случае, например в равнобедренном треугольнике с вершиной A; для произвольного треугольника медиана не обязана быть высотой.

Перед вычислениями сформулируйте вопрос своими словами. Слова «найдите угол» требуют понять, какие углы с ним связаны: вертикальные, смежные, углы треугольника, углы при параллельных прямых, центральный или вписанный угол. Слова «найдите длину» направляют к равенству отрезков, подобию, теореме Пифагора или свойству касательной. Слова «найдите площадь» заставляют искать основание и соответствующую ему высоту либо диагонали, угол между сторонами, радиус. Искомая величина определяет маршрут, но формулу выбирают лишь после того, как на рисунке найдена нужная конфигурация.

Рабочий алгоритм чтения состоит из семи коротких действий. Первое: выписать, что дано. Второе: отметить искомое вопросительным знаком. Третье: назвать фигуру или маленькую конфигурацию, в которой находится искомое. Четвёртое: расшифровать все условные обозначения. Пятое: записать одно свойство словами. Шестое: превратить свойство в равенство или формулу. Седьмое: выполнить вычисление и проверить результат по рисунку. На первых занятиях этот алгоритм проговаривают вслух. Постепенно действия сокращаются, но порядок сохраняется.

Проверка ответа в геометрии обязательна и часто занимает меньше минуты. Длина должна быть положительной. Катет короче гипотенузы. Угол треугольника лежит между 0° и 180° , а сумма трёх углов равна 180° . Площадь положительна и имеет квадратные единицы. Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, вдвое меньше центрального. Если в подобных фигурах коэффициент подобия больше единицы, соответствующие длины увеличиваются в это число раз, а площади - в квадрат этого числа. Такая смысловая проверка ловит неверную формулу быстрее повторного счёта.

Мини-пример

Нарисованная почти горизонтально прямая не становится параллельной другой без одинаковых стрелок или явного условия. Сначала выпишите данные словами, затем используйте только подтверждённые свойства.

Ключевые правила

- Не доверяй масштабу рисунка: используй только текст и условные отметки.
- Сначала подпиши данные, затем выводи свойства, потом считай.
- В сложном рисунке ищи маленькую рабочую фигуру вокруг искомого.
- Любой числовой ответ проверь по геометрическому смыслу.

05. Углы, пересекающиеся и параллельные прямые

Угол образован двумя лучами с общим началом. Полный оборот равен 360° , развёрнутый угол - 180° , прямой - 90° . Острый угол меньше 90° , тупой больше 90° , но меньше 180° . Эти определения нужны не ради терминов: они дают первую проверку результата. Если по рисунку и отметкам искомый угол должен быть тупым, ответ 48° показывает ошибку ещё до просмотра вычислений. При записи угла средняя буква всегда обозначает вершину: в записи $\angle ABC$ вершина - B, а стороны угла - лучи BA и BC.

При пересечении двух прямых возникают две основные связи. Вертикальные углы расположены напротив друг друга и равны. Смежные углы имеют общую сторону, а две другие стороны образуют прямую; их сумма равна 180° . Поэтому по одному известному углу можно сразу восстановить остальные три. Если один угол равен α , вертикальный ему тоже равен α , а два соседних равны $180^\circ - \alpha$. В задачах с переменной смежность превращается в уравнение: выражение первого угла плюс выражение второго равно 180° .

Параллельные прямые никогда не пересекаются. Когда их пересекает третья прямая - секущая, появляется система из восьми углов. Не нужно запоминать рисунок как фотографию: положение секущей может измениться. Лучше понимать пары. Соответственные углы занимают одинаковое положение у двух точек пересечения и равны. Накрест лежащие углы находятся между параллельными прямыми по разные стороны секущей и равны. Односторонние внутренние углы находятся между параллельными прямыми по одну сторону секущей; их сумма равна 180° .

Эти утверждения работают и в обратную сторону. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные или накрест лежащие углы равны, прямые параллельны. Если сумма односторонних внутренних углов равна 180° , прямые также параллельны. В первой части чаще требуется найти число, но обратные признаки помогают понять, почему внутри треугольника появляется параллельный отрезок и откуда затем возникает подобие.

При решении задачи с параллельными прямыми полезно сначала выделить известный угол одной дугой и буквально перенести его равенство к соответствующему или накрест лежащему углу. Только затем, если нужен соседний угол, вычесть значение из 180° . Типичная ошибка - сразу отнимать от 180° , хотя искомый угол вертикальный или соответственный и должен быть равен данному. Вторая ошибка - считать любые два угла около параллельных прямых равными. Название пары должно быть произнесено до вычисления.

Углы часто связывают отдельные темы. В треугольнике они дают сумму 180° . При параллельной стороне помогают доказать подобие. В окружности угол связывается с дугой. Поэтому короткая задача на углы - это тренировка чтения конфигурации. На черновике допустимо продлить сторону, отметить вертикальный угол или провести стрелки параллельности, если так связь становится видимой. Вспомогательная линия должна помогать применить известное свойство, а не просто усложнять рисунок.

Мини-пример

Если один из вертикальных углов равен 37° , противоположный ему тоже 37° , а каждый соседний равен $180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$. Четыре угла дают быструю проверку полной суммы вокруг точки.

Ключевые правила

- Вертикальные углы равны.
- Сумма смежных углов равна 180° .
- При параллельных прямых соответственные и накрест лежащие углы равны.
- Односторонние внутренние углы при параллельных прямых в сумме дают 180° .

Разбор 1. Односторонние углы без угадывания по рисунку

Условие. Прямые AB и CD параллельны. Секущая PQ пересекает их в точках P и Q. Угол BPQ равен 60° . Найдите угол DQP.

Решение

1. Углы BPQ и DQP лежат между параллельными прямыми по одну сторону секущей PQ.

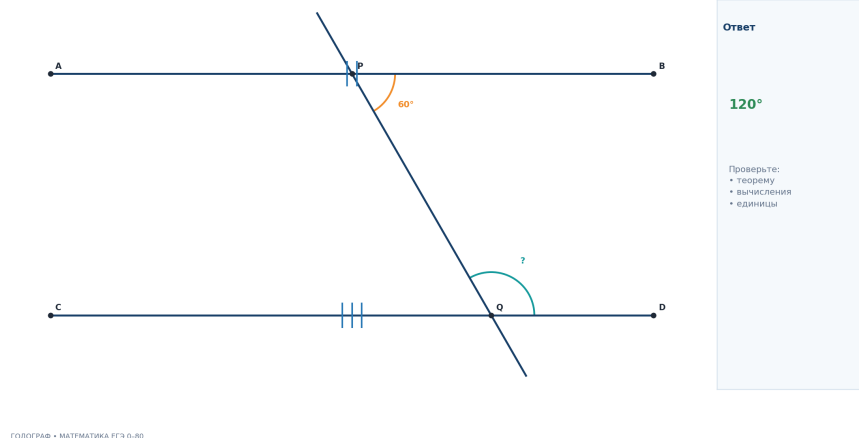


Figure 1: Разбор 1. Односторонние углы без угадывания по рисунку

2. Односторонние внутренние углы при параллельных прямых в сумме дают 180° .

3. Поэтому $\angle DQP = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

4. Проверка: искомый угол на чертеже тупой, и 120° действительно больше 90° .

Ответ: 120°

Дополнительный пример для самопроверки

Прямые m и n параллельны, а секущая образует с первой прямой внутренний угол 47° . Найдите внутренний односторонний с ним угол у второй прямой.

Маршрут самопроверки: Односторонние внутренние углы составляют 180° . $\rightarrow$ Искомый угол равен $180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$. $\rightarrow$ Проверка: сверим величину и единицы ответа с рисунком и исходными геометрическими ограничениями.

Ответ для быстрой проверки: 133°

06. Треугольник: сумма углов, стороны и равенство фигур

В любом треугольнике сумма внутренних углов равна 180° . Это первое свойство, которое проверяют, если в условии даны два угла или отношения между углами. Если углы относятся как $2 : 3 : 4$, их удобно обозначить $2x$, $3x$ и $4x$. Тогда $9x = 180^\circ$, откуда $x = 20^\circ$. Внешний угол треугольника образуется стороной и продолжением соседней стороны. Он равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, и одновременно дополняет внутренний угол при той же вершине до 180° .

Стороны треугольника подчиняются неравенству треугольника: каждая сторона меньше суммы двух других и больше их разности. Для трёх положительных чисел достаточно проверить, что самая длинная сторона меньше суммы двух остальных. Например, стороны 4, 7 и 12 не образуют треугольник, потому что $12 > 4 + 7$. Это свойство редко требует длинного решения, но служит хорошей проверкой. Если после вычислений получилась сторона, нарушающая неравенство, значит, отношение или формула применены неверно.

Два треугольника равны, если их можно совместить наложением. Тогда все соответствующие стороны и углы равны. Для доказательства не нужно сравнивать шесть элементов: достаточно одного из трёх признаков. Первый - две стороны и угол между ними. Второй - сторона и два прилежащих к ней угла. Третий - три стороны. Ключевое слово «соответствующие» означает правильный порядок вершин. Если $\triangle ABC = \triangle DEF$, то A соответствует D, B - E, C - F; следовательно, $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$.

Признаки равенства полезны не только в доказательствах. Они объясняют симметрию равнобедренного треугольника, равенство отрезков после проведения диагонали в параллелограмме и многие скрытые связи. На стартовом уровне достаточно увидеть два

маленьких треугольника, отметить общую сторону и проверить ещё два элемента. Общая сторона равна самой себе - это допустимое данное, которое ученики часто забывают записать. В задаче первой части обычно не требуется оформлять полное доказательство, но внутренний маршрут остаётся доказательным. Нельзя объявить два отрезка равными только потому, что фигура симметрична на глаз. Нужно назвать свойство: стороны равнобедренного треугольника; половины диагоналей параллелограмма; касательные из одной точки; соответствующие стороны равных треугольников. Одно точное предложение делает решение устойчивым.

Если в треугольнике появляется дополнительный отрезок, сначала определите его роль. Он может быть медианой, биссектрисой, высотой, средней линией или просто отрезком без особых свойств. Название даёт право на конкретное утверждение и только на него. Медиана делит сторону пополам; биссектриса делит угол пополам; высота перпендикулярна стороне; средняя линия соединяет середины двух сторон и параллельна третьей. Подмена одного определения другим - одна из самых частых ошибок базовой геометрии.

Мини-пример

В треугольнике с углами 48° и 67° третий угол равен $180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$. Равных углов нет, поэтому делать вывод о равнобедренности по внешнему виду нельзя.

Ключевые правила

- Сумма углов треугольника равна 180° .
- Внешний угол равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.
- Самая длинная сторона треугольника меньше суммы двух остальных.
- В записи равных треугольников соблюдай соответствие вершин.

07. Равнобедренный и прямоугольный треугольники

Равнобедренным называют треугольник с двумя равными сторонами. Эти стороны - боковые, третья сторона - основание. Углы при основании равны. Обратное утверждение тоже верно: если два угла треугольника равны, то равны лежащие напротив них стороны. В числовой задаче вершину важно определить до вычислений. Если $AB = AC$, вершина находится в точке А, основание - ВС, а равны углы В и С. Если дан угол при вершине α , каждый угол при основании равен $\frac{(180^\circ - \alpha)}{2}$.

В равнобедренном треугольнике отрезок, проведённый из вершины к основанию и являющийся хотя бы медианой, биссектрисой или высотой, одновременно обладает всеми тремя свойствами. Например, если AD - медиана к основанию BC в треугольнике $AB = AC$, то $BD = DC$, AD перпендикулярна BC и $\angle BAD = \angle DAC$. Это сильное свойство создаёт два равных прямоугольных треугольника. Но оно относится именно к линии из вершины к основанию; медиана к боковой стороне таких дополнительных свойств не получает.

Прямоугольный треугольник имеет один угол 90° . Стороны, образующие этот угол, называют катетами, противоположную сторону - гипотенузой. Гипотенуза всегда самая длинная. Теорема Пифагора связывает длины: $c^2 = a^2 + b^2$, где c - гипотенуза. Если нужно найти катет, из квадрата гипотенузы вычитают квадрат известного катета: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Перед подстановкой обязательно определить, какая сторона является гипотенузой; выбирать её просто как «самое большое данное число» опасно, если часть длин ещё неизвестна.

Полезно узнавать несколько пифагоровых троек: 3-4-5, 5-12-13, 6-8-10, 8-15-17, 7-24-25. Их кратные также образуют прямоугольные треугольники. Это не заменяет теорему, а ускоряет вычисления и помогает проверке. Например, при катетах 9 и 12 гипотенуза равна 15, потому что все числа тройки 3-4-5 умножены на 3. Если в ответе получилось 13, быстрый пересчёт квадратов выявит ошибку.

В прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, лежащий напротив этого угла, равен половине гипотенузы. Обратное также верно. Это особенно удобно, когда на рисунке указаны 30° и гипотенуза. Медиана, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе, тоже равна половине гипотенузы. Следовательно, середина гипотенузы равноудалена от всех трёх

вершин. Эти два свойства внешне похожи, но имеют разные условия: одно использует угол 30° , другое - медиану к гипотенузе.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов: $S = \frac{ab}{2}$. Та же

площадь через гипотенузу c и высоту h к ней равна $\frac{ch}{2}$. Приравнивая записи, получаем $h = \frac{ab}{c}$.

Такой способ позволяет найти высоту без подобия. В равнобедренном треугольнике высота к основанию делит его пополам, после чего длину высоты часто находят по теореме Пифагора. В обоих случаях полезно сначала дорисовать прямой угол и подписать получившиеся катеты.

Типичная ошибка в специальных треугольниках - использовать верное свойство в неверном месте. Равенство углов при основании не означает, что все три угла равны. Высота не всегда делит сторону пополам. Медиана не всегда перпендикулярна стороне. Формула $c^2 = a^2 + b^2$ работает только при прямом угле. Перед применением свойства произнесите его полное условие. Если в условии задачи нет нужного признака, ищите другой маршрут.

Мини-пример

У прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12 гипотенуза равна 13. Обратная проверка $5^2 + 12^2 = 13^2$ доказывает наличие прямого угла, если изначально были известны только три стороны.

Ключевые правила

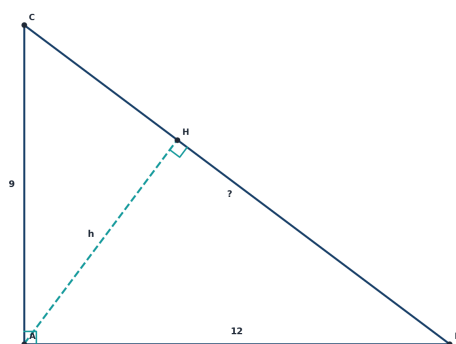
- В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
- Линия из вершины к основанию равнобедренного треугольника совмещает медиану, биссектрису и высоту.
- В прямоугольном треугольнике $c^2 = a^2 + b^2$.
- Катет напротив 30° и медиана к гипотенузе равны половине гипотенузы.

Разбор 2. Теорема Пифагора и высота к гипотенузе

Условие. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 90° , $AB = 12$, $AC = 9$. Высота AH опущена на гипотенузу BC. Найдите BC и AH.

Показательная задача 2. Теорема Пифагора и высота к гипотенузе

РАЗБОР



Ответ

$$BC = 15; AH = \frac{36}{5}$$

Проверьте:

- теорему
- вычисления
- единицы

ГОДОВАЯ • МАТЕМАТИКА ЕГЭ 9-10

Figure 2: Разбор 2. Теорема Пифагора и высота к гипотенузе

Решение

1. По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.
2. Гипотенуза положительна, поэтому $BC = \sqrt{225} = 15$.

3. Площадь через катеты: $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54$.

4. Та же площадь через гипотенузу и высоту: $S = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{15 \cdot AH}{2}$.

5. Приравниваем: $\frac{15 \cdot AH}{2} = 54$, значит $AH = \frac{108}{15} = \frac{36}{5}$.

6. Проверка: высота $\frac{36}{5} = 7,2$ меньше обоих катетов и гипотенузы.

Ответ: $BC = 15$; $AH = \frac{36}{5}$

Дополнительный пример для самопроверки

Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите гипотенузу и высоту, проведённую к ней.

Маршрут самопроверки: Гипотенуза $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. $\rightarrow$ Площадь равна $\frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ и

одновременно $\frac{13h}{2}$. $\rightarrow \frac{13h}{2} = 30$, поэтому $h = \frac{60}{13}$.

Ответ для быстрой проверки: 13; $\frac{60}{13}$

08. Медиана, биссектриса, высота и средняя линия

Медиана треугольника соединяет вершину с серединой противоположной стороны. Если AM - медиана в треугольнике ABC, то $BM = MC$. Отсюда $BC = 2BM$ и $BM = \frac{BC}{2}$. Все три медианы пересекаются в одной точке - центре тяжести. Эта точка делит каждую медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины: если G лежит на медиане AM, то $AG : GM = 2 : 1$. Значит, $AG = \frac{2AM}{3}$, а $GM = \frac{AM}{3}$.

Биссектриса делит угол на два равных угла. Если AD - биссектриса $\angle A$, то $\angle BAD = \angle DAC$. Кроме углового свойства, биссектриса делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Эта теорема особенно полезна, когда даны три из четырёх длин. Например, при $AB : AC = 2 : 3$ отрезки BD и DC также относятся как $2 : 3$. Нельзя автоматически считать их равными, если боковые стороны не равны.

Высота - перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную сторону или её продолжение. В остроугольном треугольнике все высоты лежат внутри, в прямоугольном два катета уже являются высотами, а в тупоугольном некоторые высоты выходят за фигуру. Для площади неважно, находится основание высоты внутри стороны или на её продолжении: используется расстояние между вершиной и прямой, содержащей выбранное основание.

Средняя линия треугольника соединяет середины двух сторон. Она параллельна третьей стороне и равна её половине. Если M - середина AB, N - середина AC, то $MN \parallel BC$ и $MN = \frac{BC}{2}$. Маленький треугольник AMN подобен ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому его

площадь составляет $\frac{1}{4}$ площади большого. Обратное наблюдение тоже полезно: прямая через середину одной стороны, параллельная второй стороне, пересекает третью сторону в её середине.

Чтобы не путать четыре линии, задайте вопрос к условию. Сказано «середина стороны» - появляется медиана или средняя линия. Сказано «делит угол пополам» - биссектриса. Есть

значок 90° - высота или перпендикуляр. Даны середины двух сторон - средняя линия. Если линия названа только буквой, никаких специальных свойств у неё пока нет. В решении полезно выписать определение рядом с рисунком одной короткой строкой.

В комбинированной задаче один отрезок иногда получает несколько ролей. Классический случай - линия из вершины равнобедренного треугольника к основанию. Другой случай - диагональ ромба: она делит угол пополам и перпендикулярна второй диагонали, а точка пересечения делит обе диагонали пополам. Но совмещение свойств всегда объясняется типом фигуры. Нельзя переносить его на произвольный треугольник или параллелограмм.

Мини-пример

Средняя линия треугольника соединяет середины двух сторон, параллельна третьей стороне и вдвое короче её. Если третья сторона равна 18, средняя линия равна 9; обратный переход выполняется умножением на 2.

Ключевые правила

- Медиана делит сторону пополам; центр тяжести делит медиану как $2 : 1$ от вершины.
- Биссектриса делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон.
- Высота перпендикулярна прямой, содержащей противоположную сторону.
- Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна её половине.

09. Площадь: как выбрать основание, высоту или другую формулу

Площадь измеряет часть плоскости внутри фигуры. Единицы площади квадратные: см^2 , м^2 , км^2 . Если длины даны в разных единицах, их приводят к одной системе до вычислений. Основная

формула треугольника $S = \frac{ah}{2}$, где a - выбранная сторона, а h - высота именно к этой стороне.

Любую из трёх сторон можно взять за основание, но высота должна быть ей перпендикулярна. Частая ошибка - перемножить сторону и произвольный внутренний отрезок.

Для прямоугольного треугольника катеты взаимно перпендикулярны, поэтому один катет можно считать основанием, другой - высотой: $S = \frac{ab}{2}$. Для треугольника с известными

двумя сторонами a , b и углом γ между ними используется $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$. Слово «между» существенно: если дан другой угол, нельзя сразу подставлять его в эту формулу. На базовом уровне особенно часто встречаются углы 30° , 45° , 60° и 90° , значения синуса которых известны.

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту к этой стороне: $S = ah$. Также можно использовать $S = ab \sin \alpha$ для двух соседних сторон и угла между ними. У прямоугольника $S = ab$. У квадрата $S = a^2$. Площадь ромба можно найти как ah , как $a^2 \sin \alpha$ или как половину произведения диагоналей: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$. Выбор зависит не от любимой формулы, а от данных на рисунке.

Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту: $S = \frac{(a+b)h}{2}$.

Полусумма оснований - это длина средней линии m , поэтому $S = mh$. Основания трапеции параллельны; высота - расстояние между ними. Боковая сторона, даже если выглядит почти вертикальной, не является высотой без прямого угла. В равнобедренной трапеции высоты, опущенные с концов меньшего основания, отсекают по краям равные прямоугольные треугольники.

Площадь круга равна πr^2 , а длина окружности - $2\pi r$. Эти величины нельзя путать: площадь имеет квадратные единицы, длина окружности - обычные. Площадь сектора с центральным углом α равна $\frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$. Для базовой первой части обычно достаточно круга и простых долей:

полуокружность, четверть круга, сектор 60° или 90° . Если фигура составная, её разбивают на знакомые части или вычитают лишнюю площадь из большей.

Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. Если все длины увеличили в 3 раза, площадь увеличилась в 9 раз. Это объясняется тем, что в формуле площади перемножаются две линейные величины. Отношение площадей нельзя использовать как отношение сторон. Если $S_1 : S_2 = 25 : 49$, коэффициент подобия длин равен $5 : 7$, а не $25 : 49$.

Полезный метод - найти одну площадь двумя способами. В прямоугольном треугольнике $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$, откуда можно найти высоту к гипотенузе. В треугольнике с биссектрисой площадь разбивается на две части с общей высотой к одной прямой, поэтому их площади относятся как основания. В параллелограмме разные пары «сторона - высота» дают одно число: $ah_a = bh_b$. Такой двойной расчёт часто превращает сложный чертёж в одно простое уравнение.

Мини-пример

У параллелограмма с основанием 9 и высотой 4 площадь равна 36. Наклонная боковая сторона не заменяет высоту: высота должна быть перпендикулярна выбранному основанию.

Ключевые правила

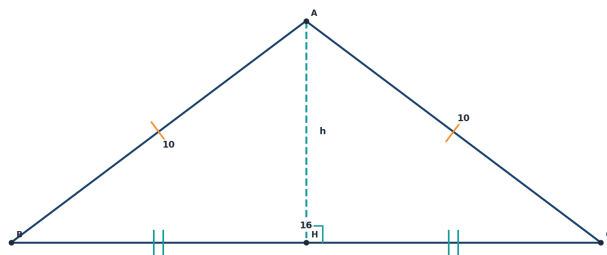
- В $S = \frac{ah}{2}$ высота должна быть проведена к выбранному основанию.
- $S_{\text{треугольника}} = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ только для угла между сторонами а и b.
- $S_{\text{параллелограмма}} = ah$; $S_{\text{трапеции}} = \frac{(a+b)h}{2}$.
- Площади подобных фигур относятся как k^2 .

Разбор 3. Площадь равнобедренного треугольника

Условие. В равнобедренном треугольнике ABC стороны AB и AC равны 10, а основание BC равно 16. Найдите высоту AH, проведённую к основанию, и площадь треугольника.

Показательная задача 3. Площадь равнобедренного треугольника

РАЗБОР



Ответ

AH = 6; S = 48

Проверьте:
• теорему
• вычисления
• единицы

ГОДОВАЯ • МАТЕМАТИКА ЕГЭ 9-10

Figure 3: Разбор 3. Площадь равнобедренного треугольника

Решение

1. В равнобедренном треугольнике высота из вершины A является медианой, поэтому $BH = HC = \frac{16}{2} = 8$.

2. Треугольник АВН прямоугольный: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$.

3. Длина положительна, поэтому $AH = 6$.

4. Площадь $S = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{16 \cdot 6}{2} = 48$.

5. Проверка: площадь меньше площади прямоугольника $16 \cdot 6 = 96$ и равна ровно его половине.

Ответ: $AH = 6$; $S = 48$

Дополнительный пример для самопроверки

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 13, основание равно 10. Найдите высоту к основанию и площадь.

Маршрут самопроверки: Высота делит основание на отрезки по 5. $\rightarrow h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. $\rightarrow S = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60$.

Ответ для быстрой проверки: 12; 60

10. Подобие: соответствие сторон и квадрат масштаба

Подобные треугольники имеют одинаковую форму: соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Коэффициент подобия k показывает, во сколько раз длина во второй фигуре больше соответствующей длины в первой. Если $\triangle ABC$ подобен $\triangle DEF$ и А соответствует D, В - E, С - F, то $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$. Порядок букв в записи подобия фиксирует соответствие и защищает от случайного отношения несоответствующих сторон.

Первый признак подобия - по двум углам. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого, третьи углы тоже равны по сумме 180° . Это самый частый путь в задачах с параллельным отрезком: соответственные углы равны. Второй признак - две стороны пропорциональны и углы между ними равны. Третий - три пары сторон пропорциональны. Для первой части чаще всего достаточно первого признака и аккуратной пропорции.

Если в треугольнике ABC точки D и E лежат на AB и AC, а DE параллельна BC, то $\triangle ADE$ подобен $\triangle ABC$. Малому отрезку AD соответствует вся сторона AB, AE - AC, DE - BC. Коэффициент малого треугольника к большому равен $\frac{AD}{AB}$. Ошибка возникает, когда к части AD по ошибке подбирают часть DB. Сначала нужно назвать две сравниваемые фигуры, затем записать пары соответствующих сторон и только после этого составлять пропорцию.

Длины в подобных фигурах меняются в k раз. Периметры, медианы, биссектрисы, высоты, радиусы вписанных и описанных окружностей - тоже линейные величины, поэтому их отношения равны k . Площади меняются в k^2 раз. Если коэффициент длин $\frac{2}{3}$, отношение площадей $\frac{4}{9}$. Если известно отношение площадей $\frac{9}{16}$, отношение соответствующих длин равно $\frac{3}{4}$. На стартовом уровне полезно каждый раз подписывать рядом: «длины - k , площади - k^2 ».

Подобие появляется в практических задачах о тени, высоте недоступного объекта и масштабе. Вертикальные предметы образуют прямые углы с землёй, а солнечные лучи в одной ситуации считаются параллельными. Поэтому треугольники «высота - тень - луч» подобны по двум углам. Отношение высоты к длине тени одинаково. Такой рисунок превращает текстовую ситуацию в простую пропорцию и одновременно показывает, какие величины соответствуют друг другу.

В прямоугольном треугольнике высота к гипотенузе образует два меньших треугольника, каждый из которых подобен исходному и друг другу. Из этого следуют соотношения для проекций и высоты. В траектории 0-80 важнее сначала уверенно видеть сам факт подобия и

использовать простую пропорцию. Более сложные формулы не нужно запоминать отдельно: при необходимости их можно восстановить из правильно записанного соответствия вершин.

Проверка пропорции выполняется по направлению изменения. Если большой треугольник действительно больше, найденная сторона большого должна превосходить соответствующую сторону малого. Все отношения в одной пропорции записывают в одинаковом порядке: малое к большому или большое к малому. Смешивание порядка - главная вычислительная ошибка. Второй контроль - коэффициент подобия должен одинаково переводить минимум две известные пары.

Мини-пример

При коэффициенте подобия 3 соответствующие длины различаются в 3 раза, периметры тоже в 3 раза, а площади - в 9 раз. Эти три масштаба полезно проговаривать отдельно.

Ключевые правила

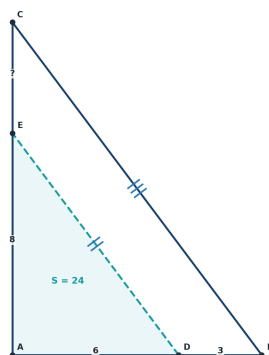
- Сначала установи соответствие вершин, затем записывай пропорцию.
- Параллельный отрезок в треугольнике обычно создаёт подобные треугольники.
- Все линейные величины относятся как k , площади - как k^2 .
- Во всех дробях пропорции сохраняй один порядок: малое/большое или большое/малое.

Разбор 4. Параллельный отрезок, длина и площадь

Условие. В треугольнике ABC точка D лежит на AB, точка E - на AC, причём $DE \parallel BC$. Известно: $AD = 6$, $DB = 3$, $AE = 8$, $S(ADE) = 24$. Найдите EC и $S(ABC)$.

Показательная задача 4. Параллельный отрезок, длина и площадь

РАЗБОР



Ответ

EC = 4; S(ABC) = 54

Проверить:
• геометрию
• вычисления
• единицы

ГОДОГРАФ • МАТЕМАТИКА ЕГЭ 9-10

Figure 4: Разбор 4. Параллельный отрезок, длина и площадь

Решение

1. $AB = AD + DB = 6 + 3 = 9$.
2. Из $DE \parallel BC$ следует подобие $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$ по двум углам.
3. Коэффициент малого треугольника к большому: $k = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
4. $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$, поэтому $AC = \frac{AE \cdot 3}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$.
5. $EC = AC - AE = 12 - 8 = 4$.
6. Площади относятся как $k^2 = \frac{4}{9}$: $\frac{S(ADE)}{S(ABC)} = \frac{4}{9}$.

7. $S(ABC) = \frac{24 \cdot 9}{4} = 54$. Проверка: площадь большого треугольника больше 24.

Ответ: $EC = 4$; $S(ABC) = 54$

Дополнительный пример для самопроверки

В треугольнике KLM точки P и Q лежат на KL и KM, $PQ \parallel LM$. $KP = 4$, $PL = 6$, $KQ = 6$, $S(KPQ) = 18$. Найдите QM и $S(KLM)$.

Маршрут самопроверки: $KL = 4 + 6 = 10$, поэтому коэффициент малого треугольника $k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. $\rightarrow \frac{KQ}{KM} = \frac{2}{5}$, откуда $KM = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ и $QM = 15 - 6 = 9$. $\rightarrow$ Отношение площадей равно $\frac{4}{25}$, поэтому $S(KLM) = \frac{18 \cdot 25}{4} = 112,5$.

Ответ для быстрой проверки: $QM = 9$; $S(KLM) = 112,5$

11. Четырёхугольники: свойства без путаницы

Сумма внутренних углов любого выпуклого четырёхугольника равна 360° . Это общее свойство, но специальные виды фигур дают дополнительные связи. Параллелограмм - четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Его противоположные стороны равны, противоположные углы равны, соседние углы в сумме дают 180° , диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Диагонали параллелограмма в общем случае не равны и не перпендикулярны.

Прямоугольник - параллелограмм с прямыми углами. Поэтому он сохраняет все свойства параллелограмма и получает новое: диагонали равны. Они также делятся пополам. Но диагонали прямоугольника обычно не перпендикулярны и не делят углы пополам. Площадь прямоугольника $S = ab$, диагональ находится по теореме Пифагора: $d^2 = a^2 + b^2$. Квадрат является и прямоугольником, и ромбом, поэтому объединяет их свойства.

Ромб - параллелограмм, у которого все стороны равны. Его диагонали перпендикулярны, делят друг друга пополам и являются биссектрисами углов. Диагонали ромба в общем случае не равны. Половины диагоналей вместе со стороной образуют прямоугольный треугольник,

поэтому $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$. Площадь ромба равна $\frac{d_1 d_2}{2}$. Эти две связи часто используются последовательно: сначала находят сторону, затем периметр или площадь.

Квадрат - ромб с прямым углом или прямоугольник с равными сторонами. Все его стороны равны, все углы прямые, диагонали равны, перпендикулярны, делятся пополам и делят углы пополам.

Для стороны a диагональ $d = a\sqrt{2}$, площадь $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$. В задаче важно брать только то свойство, которое связано с искомым; длинный список сам по себе не является решением.

Признаки помогают распознать фигуру, если название не дано. Четырёхугольник является параллелограммом, если его противоположные стороны попарно равны; или одна пара противоположных сторон одновременно равна и параллельна; или диагонали делятся точкой пересечения пополам. Параллелограмм с равными диагоналями - прямоугольник. Параллелограмм с перпендикулярными диагоналями - ромб. Параллелограмм с равными и перпендикулярными диагоналями - квадрат.

Диагональ часто разбивает четырёхугольник на два треугольника. В параллелограмме эти треугольники равны, поэтому имеют равные площади. В прямоугольнике диагональ создаёт прямоугольные треугольники. В ромбе две диагонали создают четыре равных прямоугольных треугольника. Если задача выглядит перегруженной свойствами четырёхугольника, полезно перейти к одному из этих треугольников и применить уже знакомую теорему Пифагора, сумму углов или площадь.

Главная защита от путаницы - таблица «обязательно / не обязательно». У параллелограмма обязательно равны противоположные стороны, но не обязательно все четыре. У прямоугольника обязательно равны диагонали, но не обязательно перпендикулярны. У ромба обязательно

перпендикулярны диагонали, но не обязательно равны. У квадрата выполняются оба свойства. Перед вычислением назовите точный вид фигуры и одно нужное свойство.

Мини-пример

У прямоугольника противоположные стороны равны и все углы прямые; у ромба все стороны равны, но углы не обязаны быть прямыми. Квадрат удовлетворяет обоим наборам свойств.

Ключевые правила

- В параллелограмме противоположные стороны и углы равны, диагонали делятся пополам.
- У прямоугольника диагонали равны; у ромба - перпендикулярны и делят углы пополам.
- Квадрат обладает свойствами и прямоугольника, и ромба.
- Диагональ часто переводит задачу о четырёхугольнике в задачу о треугольнике.

12. Трапеция и её рабочие конструкции

Трапеция - четырёхугольник, у которого две стороны параллельны; их называют основаниями. Две другие стороны - боковые. Высота трапеции - перпендикуляр между прямыми, содержащими основания. Средняя линия соединяет середины боковых сторон, параллельна

основаниям и равна их полусумме: $m = \frac{(a+b)}{2}$. Поэтому площадь можно записать двумя

равными способами: $S = \frac{(a+b)h}{2} = mh$.

В произвольной трапеции высоты, опущенные с концов меньшего основания на большее, выделяют прямоугольник и два прямоугольных треугольника. Сумма горизонтальных катетов этих треугольников равна разности оснований. Если трапеция равнобедренная, боковые стороны равны, углы при каждом основании равны, диагонали равны, а два крайних прямоугольных треугольника равны. Тогда каждый горизонтальный катет равен половине разности оснований.

Например, в равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 8 разность равна 12, значит, после проведения высот по краям получаются отрезки по 6. Если боковая сторона равна 10, высота находится из прямоугольного треугольника: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Затем площадь равна $\frac{(20+8) \cdot 8}{2}$. Такой чертёж должен показывать обе высоты и прямые углы; одна только внешняя форма трапеции не объясняет, почему разность делится пополам.

Прямоугольная трапеция имеет два прямых угла, и одна боковая сторона уже является высотой. В задачах это позволяет сразу использовать формулу площади. Если дана диагональ, она образует прямоугольный треугольник с высотой и одним из оснований. В трапеции с параллельными основаниями также часто появляются подобные треугольники после продолжения боковых сторон или проведения диагоналей, но для стартового уровня сначала следует проверить более простой маршрут через высоту и площадь.

Ошибки в задачах о трапеции типичны. Боковую сторону подставляют вместо высоты без прямого угла. Среднюю линию принимают за полуразность оснований, хотя она равна полусумме. В равнобедренной трапеции всю разность оснований относят к одному краю вместо половины. Диагонали считают равными в любой трапеции, хотя это гарантировано только для равнобедренной. Каждое из этих свойств легко проверить на точном чертеже с подписями.

Если искомая величина - основание, формулу площади рассматривают как обычное уравнение.

Из $S = \frac{(a+b)h}{2}$ получаем $a+b = \frac{2S}{h}$, после чего вычитаем известное основание. Если дана средняя линия, сумма оснований равна $2m$. Такой обратный ход встречается в первой части не реже прямой подстановки, поэтому ученик должен уметь не только считать площадь, но и выражать неизвестный элемент.

Мини-пример

Средняя линия трапеции с основаниями 8 и 14 равна $\frac{(8+14)}{2} = 11$. Ответ должен лежать

между длинами оснований, что даёт простую смысловую проверку.

Ключевые правила

- Средняя линия трапеции $m = \frac{(a + b)}{2}$.
- Площадь трапеции $S = \frac{(a + b)h}{2} = mh$.
- В равнобедренной трапеции крайний отрезок равен половине разности оснований.
- Боковая сторона является высотой только при отмеченном прямом угле.

13. Окружность: дуги, углы, касательные и хорды

Окружность - множество точек, равноудалённых от центра О. Отрезок от центра до точки окружности - радиус r . Хорда соединяет две точки окружности. Диаметр - хорда, проходящая через центр, поэтому его длина $2r$. Диаметр делит окружность на две дуги по 180° . Все радиусы одной окружности равны; это часто создаёт равнобедренные треугольники, в которых можно найти углы при основании.

Центральный угол имеет вершину в центре окружности. Его градусная мера равна градусной мере меньшей дуги, на которую он опирается. Вписанный угол имеет вершину на окружности, а его стороны пересекают окружность. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Поэтому центральный угол, опирающийся на ту же дугу, вдвое больше вписанного. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Если вписанный угол опирается на диаметр, соответствующая дуга равна 180° , а угол равен 90° . Это теорема Фалеса. Она позволяет увидеть прямоугольный треугольник внутри окружности. Обратное тоже полезно: если треугольник прямоугольный и вписан в окружность, его гипотенуза является диаметром, а радиус описанной окружности равен половине гипотенузы.

Вписанный четырёхугольник - четырёхугольник, все вершины которого лежат на одной окружности. Сумма его противоположных углов равна 180° . Поэтому по одному углу сразу находится противоположный. Не следует складывать соседние углы: они не обязаны давать 180° . Признак работает и обратно: если сумма пары противоположных углов четырёхугольника равна 180° , вокруг него можно описать окружность.

Касательная имеет с окружностью ровно одну общую точку. Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Поэтому точка касания, центр и внешняя точка образуют прямоугольный треугольник. Две касательные, проведённые из одной внешней точки, равны. Если PA и PB касаются окружности в A и B , то $PA = PB$. Четырёхугольник $AOBP$ содержит два прямых угла, поэтому $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$.

Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на дугу этой хорды. Можно также сначала найти дугу: угол между касательной и хордой равен половине соответствующей дуги. Важно выбрать именно ту дугу, которая лежит внутри рассматриваемого угла. На точном рисунке полезно выделить касательную отдельным цветом, отметить прямой угол с радиусом и провести хорду до второй точки окружности.

Если две хорды AB и CD пересекаются в точке E внутри окружности, произведения их частей равны: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$. Если из внешней точки P проведены секущие PAB и PCD , то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, где в каждом произведении умножаются внешняя часть и вся секущая. Для касательной PT и секущей PAB действует $PT^2 = PA \cdot PB$. Ученик часто умножает внешнюю часть на внутреннюю; рисунок должен явно различать ближайшую и дальнюю точки.

В задачах с хордой и расстоянием от центра полезно провести перпендикуляр из центра к хорде. Он делит хорду пополам. Возникает прямоугольный треугольник с гипотенузой-радиусом и катетами: расстоянием до хорды и половиной хорды. По теореме Пифагора можно найти любой неизвестный элемент. Обратное утверждение тоже используется: линия из центра к середине хорды перпендикулярна хорде.

Алгоритм задачи об окружности начинается с определения типа угла или линии. Где находится вершина угла - в центре, на окружности или вне её? Есть ли точка касания и

радиус к ней? Пересекаются ли две хорды внутри или секущие снаружи? Затем на рисунке выделяют соответствующую дугу или части отрезков. Только после этого выбирают правило. Большинство ошибок возникает не в арифметике, а в неверном распознавании конфигурации.

Мини-пример

Вписанный угол, опирающийся на дугу 100° , равен 50° , а центральный угол той же дуги - 100° . Перед делением пополам обязательно уточните, какой именно угол рассматривается.

Ключевые правила

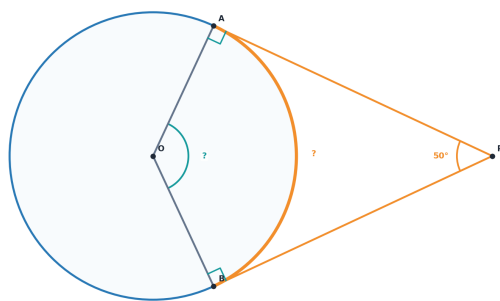
- Центральный угол равен своей дуге; вписанный - половине своей дуги.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90° .
- Радиус к точке касания перпендикулярен касательной; касательные из одной точки равны.
- Для хорд: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$; для касательной и секущей: $PT^2 = PA \cdot PB$.

Разбор 5. Две касательные и центральный угол

Условие. Из точки Р вне окружности проведены касательные РА и РВ. О - центр окружности, А и В - точки касания. Угол АРВ равен 50° . Найдите меньший центральный угол АОВ и градусную меру меньшей дуги АВ.

Показательная задача 5. Две касательные и центральный угол

РАЗБОР



Ответ

$\angle AOB = 130^\circ$; дуга АВ = 130°

Проверьте:
• теорему
• вычисления
• единицы

ГОДОГРАФ • МАТЕМАТИКА ЕГЭ 9-10

Figure 5: Разбор 5. Две касательные и центральный угол

Решение

1. Радиусы ОА и ОВ перпендикулярны касательным РА и РВ, поэтому углы ОАР и ОВР равны 90° .
2. Сумма углов четырёхугольника АОВР равна 360° .
3. $\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
4. Градусная мера меньшей дуги АВ равна центральному углу АОВ, то есть 130° .
5. Проверка: $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$, как и должно быть для двух касательных.

Ответ: $\angle AOB = 130^\circ$; дуга АВ = 130°

Дополнительный пример для самопроверки

Из внешней точки проведены две касательные к окружности. Угол между ними равен 76° . Найдите меньший центральный угол между радиусами, проведёнными в точки касания.

Маршрут самопроверки: Два угла при точках касания прямые. → Центральный угол и угол между касательными в сумме дают 180° . → Искомый угол равен $180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.

Ответ для быстрой проверки: 104°

14. Сборка решения: от отметки на рисунке к ответу ЕГЭ

В первой части ЕГЭ длинное доказательство обычно не требуется, но задача всё равно строится как цепочка обоснованных шагов. Хороший маршрут состоит из одного основного свойства и, возможно, одного вспомогательного. Например: равнобедренная трапеция → половина разности оснований → прямоугольный треугольник → теорема Пифагора → площадь. Если решение содержит много несвязанных формул, конфигурация, вероятно, ещё не распознана.

Начните с вопроса «в какой маленькой фигуре находится искомое?». Для угла это может быть один треугольник или пара углов при секущей. Для длины - прямоугольный или подобный треугольник. Для площади - фигура с известными основанием и высотой. Для окружности - центральный или вписанный угол, прямоугольный треугольник с радиусом, две пересекающиеся хорды. Обведите рабочую часть рисунка: остальные линии временно перестанут отвлекать.

Затем составьте словесный мост: «так как прямые параллельны, углы равны»; «так как треугольник равнобедренный, высота делит основание пополам»; «так как угол прямой, применяем теорему Пифагора»; «так как треугольники подобны, соответствующие стороны пропорциональны»; «так как угол вписанный, он равен половине дуги». После такого предложения формула перестаёт быть догадкой.

При вычислениях не округляйте промежуточные корни и дроби без необходимости. Ответы первой части часто подобраны так, чтобы сокращение произошло в конце. Квадратный корень проверяют возведением в квадрат, пропорцию - обратной подстановкой, площадь - приблизительной оценкой, угол - суммой 180° или 360° . Если задача имеет единицы, итоговая длина записывается в обычных единицах, площадь - в квадратных.

После ответа задайте четыре контрольных вопроса. Все ли данные условия использованы или осознанно признаны лишними? Есть ли свойство, применённое только по внешнему виду? Соответствует ли величина типу искомого: угол, длина, площадь? Возможен ли ответ геометрически? Эта проверка должна стать частью решения, а не действием только после ошибки. Именно она превращает знание отдельных формул в надёжный экзаменационный навык.

Мини-пример

Если решение требует формулу площади, сначала обведите основание и перпендикулярную ему высоту. Если требуется отношение, найдите пару подобных треугольников и только потом составляйте пропорцию соответствующих сторон.

Ключевые правила

- Обведи маленькую рабочую конфигурацию вокруг искомого.
- Перед формулой назови свойство одним точным предложением.
- Не округляй промежуточные значения без требования условия.
- Финальная проверка: смысл, единицы, диапазон и соответствие рисунку.

15. Типичные ошибки и способы их остановить

- Принимают визуально похожие прямые за параллельные без отметки или условия.
- Применяют теорему Пифагора в треугольнике без доказанного прямого угла.
- Путают медиану, биссектрису и высоту.
- Используют отношение подобия сторон для площадей без возведения в квадрат.
- Подставляют диаметр вместо радиуса или наоборот.
- Округляют промежуточные значения и не проверяют единицы площади.

16. Дополнительные разборы

Разбор 6. Внешний угол равнобедренного треугольника

УСЛОВИЕ

В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Внешний угол при вершине B равен 107° . Найдите угол C.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Смежный с внешним внутренний угол дополняет его до 180° , а углы при основании равнобедренного треугольника равны.

ДО РЕШЕНИЯ.

Равные стороны AC и BC сходятся в C, значит основание - AB.

1. Находим внутренний угол B

$$\angle B = 180^\circ - 107^\circ = 73^\circ$$

Внутренний и внешний углы смежные.

2. Используем равнобедренность

$$\angle A = \angle B = 73^\circ$$

Это углы при основании AB.

3. Находим вершину

$$\angle C = 180^\circ - 73^\circ - 73^\circ = 34^\circ$$

Сумма углов треугольника равна 180° .

Проверка. $73 + 73 + 34 = 180$.

Типичная ошибка. Принять внешний угол 107° за внутренний угол при основании.

ОТВЕТ.

$$34^\circ$$

Разбор 7. Площадь трапеции внутри параллелограмма

УСЛОВИЕ

Площадь параллелограмма ABCD равна 28. Точка E - середина стороны AD. Найдите площадь трапеции BCDE.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Площадь трапеции равна площади параллелограмма без треугольника ABE.

ДО РЕШЕНИЯ.

AE составляет половину основания AD, а высота треугольника к AD совпадает с высотой параллелограмма.

1. Сравниваем площади

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{2} \cdot h = \frac{1}{4} ADh$$

В формуле треугольника есть коэффициент $1/2$ и половина основания.

2. Находим вырезанную часть

$$S_{ABE} = \frac{1}{4} \cdot 28 = 7$$

Площадь параллелограмма равна $AD \cdot h$.

3. **Вычитаем**

$$S_{BCDE} = 28 - 7 = 21$$

Трапеция и треугольник без перекрытий составляют весь параллелограмм.

Проверка. Трапеция занимает $3/4$ параллелограмма: $28 \cdot 3/4 = 21$.

Типичная ошибка. Считать треугольник половиной параллелограмма, забыв, что его основание уже вдвое меньше.

ОТВЕТ.

21

Разбор 8. Биссектриса и сумма углов треугольника

УСЛОВИЕ

В треугольнике ABC угол C равен 54° , AD - биссектриса, угол CAD равен 30° . Найдите угол B.
КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Биссектриса делит угол пополам, затем используем сумму углов треугольника.

ДО РЕШЕНИЯ.

AD выходит из вершины A, поэтому делит именно угол A.

1. **Восстанавливаем угол A**

$$\angle A = 2\angle CAD = 60^\circ$$

Две части угла A равны по определению биссектрисы.

2. **Используем сумму углов**

$$\angle B = 180^\circ - 60^\circ - 54^\circ$$

Сумма трёх внутренних углов равна 180° .

3. **Вычисляем**

$$\angle B = 66^\circ$$

$$180 - 114 = 66.$$

Проверка. $60 + 54 + 66 = 180$.

Типичная ошибка. Считать 30° всем углом A, не используя условие о биссектрисе.

ОТВЕТ.

66°