



Степени и корни

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Степени с целыми показателями	2
02. Корень: смысл, ограничения и свойства	4
03. Дробные показатели и отрицательное основание	7
04. Преобразование и сравнение степенных выражений	10
05. Вложенные корни	11
06. Модуль и допустимые преобразования	13
07. Рационализация знаменателя	15
08. Разобранные примеры и порядок действий	16
09. Ошибки при работе со степенями и корнями	17
10. Проверка понимания	18
11. Как исследовать корни с параметром	19

01. Степени с целыми показателями

Степень начинается с повторного умножения. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. При умножении $2^3 \cdot 2^2$ всего получается пять двоек, поэтому ответ 2^5 . Это объясняет сложение показателей.

При делении $2^3 : 2^3 = 1$. Чтобы правило вычитания показателей оставалось согласованным, получаем $2^{3-3} = 2^0 = 1$. Отрицательная степень также определяется через деление: $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Основание в этих двух случаях не должно быть нулём.

Натуральная степень — повторное умножение

Определение. Для натурального n

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ множителей}}.$$

Из определения доказываются три базовых закона.

Произведение степеней с одинаковым основанием

Теорема.

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доказательство. В первом произведении m множителей a , во втором - n . После объединения получается $m + n$ множителей.

Степень степени

Теорема.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доказательство. Выражение a^m умножается само на себя n раз. Каждая копия содержит m множителей a , всего их mn .

Степень произведения

Теорема.

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Доказательство.

$$(ab)^n = (ab)(ab) \cdots (ab).$$

По сочетательности и переместительности умножения все a можно собрать вместе, как и все b .

Эти доказательства не нужно учить текстом. Достаточно развернуть определение и посчитать множители.

Почему нулевая степень равна единице

Для $a \neq 0$ доказанный закон частного должен иметь вид

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

При $m = n$ левая часть равна 1:

$$\frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Чтобы сохранить закон показателей, правая часть должна быть a^0 . Поэтому единственное согласованное определение:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

Почему 0^0 не определяют этим правилом? Вывод использовал деление $\frac{0^n}{0^n}$, которое не существует. Кроме того, разные закономерности тянут значение в разные стороны: $a^0 = 1$ для $a \neq 0$, а $0^n = 0$ для $n > 0$. Однозначного продолжения нет.

Почему отрицательная степень означает обратное число

Сохраним закон $a^m a^n = a^{m+n}$. Для положительного n

$$a^n a^{-n} = a^0 = 1.$$

Следовательно, a^{-n} обязано быть числом, обратным к a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

Это вывод, а не условный знак. Из него следует

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

если $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Частное степеней

Теорема. Для $a \neq 0$ и целых m, n

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Доказательство. Умножаем на обратную степень:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

Условие $a \neq 0$ необходимо из-за знаменателя и отрицательных показателей.

Знак степени отрицательного числа

Из определения повторного умножения:

$$(-a)^{2k} = a^{2k},$$

$$(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}.$$

Доказательство. В чётной степени отрицательные множители разбиваются на пары, каждая пара положительна. В нечётной остаётся один непарный отрицательный множитель.

Отсюда видно, почему записи $-a^2$ и $(-a)^2$ различны: в первой минус не входит в основание степени.

02. Корень: смысл, ограничения и свойства

Корень отвечает на обратный вопрос. Не «чему равен квадрат числа», а «какое неотрицательное число после возведения в квадрат даст 9». Ответ: $\sqrt{9} = 3$.

Уравнение $x^2 = 9$ имеет два корня, 3 и -3 , но знак $\sqrt{}$ обозначает одно число — неотрицательное. Поэтому $\sqrt{(-3)^2} = 3$, а не -3 . Отсюда возникает модуль в формуле $\sqrt{x^2} = |x|$.

Корень как обратная операция к степени

Нечётный корень

Определение. $\sqrt[2k+1]{a}$ - единственное действительное число x , для которого

$$x^{2k+1} = a.$$

Нечётная степенная функция принимает все действительные значения и строго возрастает, поэтому корень существует и единственен для любого действительного a .

Чётный корень

Определение. Для $a \geq 0$ число $\sqrt[2k]{a}$ - **неотрицательное** число x , для которого

$$x^{2k} = a.$$

При $a > 0$ из двух противоположных корней выбирают неотрицательный. При $a = 0$ единственный корень равен 0.

Например, уравнение $x^2 = 9$ имеет два решения $x = \pm 3$, но символ $\sqrt{9}$ обозначает только 3.

Почему $\sqrt{a^2} = |a|$

Теорема. Для любого действительного a

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доказательство. Число $|a|$ неотрицательно и

$$(|a|)^2 = a^2.$$

По определению арифметического квадратного корня это и есть $\sqrt{a^2}$.

Запись $\sqrt{a^2} = a$ верна только при $a \geq 0$. Контрпример $a = -3$ даёт $\sqrt{9} = 3$, а не -3 .

Более общий результат:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n \text{ чётно,} \\ a, & n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Корень из произведения: доказательство и ограничения

Теорема. Для $a \geq 0$ и $b \geq 0$ выполняется $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доказательство. Правая часть неотрицательна. Её квадрат равен $(\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab$. По определению арифметического квадратного корня единственное неотрицательное число с квадратом ab равно $\sqrt{ab}$. Поэтому обе части совпадают.

Условия $a \geq 0$ и $b \geq 0$ необходимы для существования обоих корней в действительных числах. Формальный пример $a = b = -1$ разрушает запись: слева $\sqrt{1} = 1$, а корни справа не определены.

Корень из частного

При $a \geq 0$ и $b > 0$ аналогично доказывается $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Правая часть неотрицательна, а её квадрат равен $\frac{a}{b}$. Условие $b > 0$ одновременно обеспечивает существование корня и ненулевой знаменатель.

Вынесение множителя

Задача. Упростите $\sqrt{18x^3}$. ОДЗ исходного корня требует $x \geq 0$. Представим подкоренное выражение как $9x^2 \cdot 2x$:

$$\sqrt{18x^3} = \sqrt{9x^2} \cdot \sqrt{2x} = 3x\sqrt{2x}.$$

Модуль у x не появляется в финальной записи, потому что ОДЗ уже даёт $x \geq 0$. Без этого условия промежуточное равенство $\sqrt{x^2} = |x|$ потребовало бы модуль.

Почему корень суммы не раскладывается

Контрпример. Равенство $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ неверно. При $a = b = 1$ слева $\sqrt{2}$, справа 2. После возведения предполагаемого равенства в квадрат возник бы лишний член $2\sqrt{ab}$, который обычно не равен нулю.

Критерий применения. Перед разложением корня ученик называет операцию под корнем. Свойство есть у произведения и частного при указанных условиях, но нет у суммы и разности.

Вынесение множителя из-под корня

Для чётного корня:

$$\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}, \quad b \geq 0.$$

Вывод.

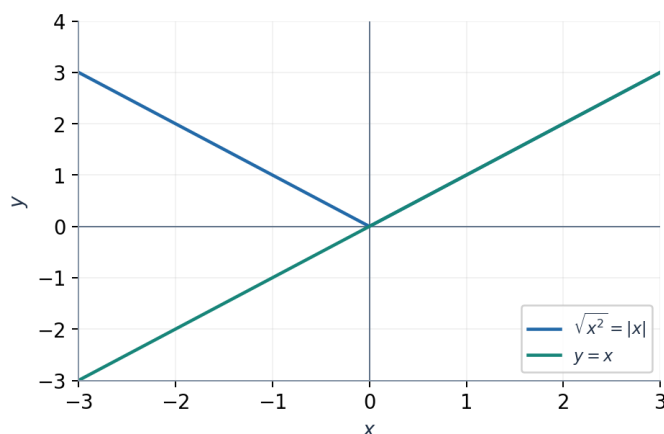
$$\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = |a|\sqrt{b}.$$

Модуль нельзя удалять без дополнительного условия $a \geq 0$.

Пример. Если известно $a < 0$, то

$$\sqrt{9a^2} = 3|a| = -3a.$$

Знак определяется условием, а не желанием получить положительный коэффициент.



При отрицательном x корень из x^2 равен $-x$, а не x .

03. Дробные показатели и отрицательное основание

Дробный показатель — короткая запись корня. При положительном основании $16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$. Знаменатель показателя задаёт степень корня, числитель — степень результата.

Условия нельзя отбрасывать. Для положительных оснований общие законы рациональных степеней работают согласованно. Отрицательное основание нужно разбирать отдельно; механическое сокращение показателя может привести к записи, которая имеет другой смысл или не определена в действительных числах.

Дробный показатель выводится из корня

Мы хотим сохранить закон

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

Следовательно, $a^{\frac{1}{n}}$ должно быть n -м корнем из a :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Для универсального применения законов дробных степеней в ЕГЭ безопасное условие - $a > 0$. При отрицательном основании отдельные значения с нечётным знаменателем могут существовать, но привычные законы при произвольных преобразованиях требуют дополнительной проверки.

Почему дробь показателя нужно сократить? Значение показателя — рациональное число, а не способ его записи. Например,

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

При отрицательном основании несокращённая запись может искусственно создать чётный корень. Поэтому сначала показатель приводят к несократимому виду и только затем анализируют существование.

Законы рациональных степеней

При $a > 0$, $b > 0$ и рациональных r, s :

$$a^r a^s = a^{r+s},$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$(a^r)^s = a^{rs},$$

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

Схема доказательства. Представить показатели с общим положительным знаменателем, перейти к корням и применить доказанные свойства корня из произведения и степени. Условие положительности гарантирует существование всех промежуточных выражений и однозначность корней.

Пример вывода первого закона. Пусть $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{k}{n}$. Тогда

$$a^r a^s = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{r+s}.$$

Почему дробный показатель не зависит от записи дроби

Определение $a^{\frac{m}{n}}$ через корень будет корректным только тогда, когда равные дроби дают одинаковый результат. Например, $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$ должны приводить к одному числу. Докажем это для положительного основания a .

Пусть $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, где n и q положительны. Тогда $mq = np$. Обозначим $u = \sqrt[n]{a^m}$ и $v = \sqrt[q]{a^p}$. Оба числа положительны. Возведём их в степень nq :

$$u^{nq} = a^{mq}, \quad v^{nq} = a^{pn}.$$

Так как $mq = np$, правые части равны. Положительное число однозначно определяется своей положительной степенью nq , поэтому $u = v$. Значит, значение $a^{\frac{m}{n}}$ не зависит от того, сократили мы дробь или домножили её числитель и знаменатель на одно и то же число.

Проверка на примере. Для $a = 16$ записи $16^{\frac{1}{2}}$ и $16^{\frac{2}{4}}$ дают 4: квадратный корень из 16 равен 4, а корень четвёртой степени из $16^2 = 256$ также равен 4.

Ограничение. В общей теории рациональной степени основание берут положительным. Для отрицательного основания отдельные значения можно понимать через нечётный корень, но нельзя механически переносить на них все законы степеней.

Отрицательное основание и сокращение показателя

Выражение с отрицательным основанием нужно сначала перевести на язык корней и сократить дробь в показателе. Знаменатель сокращённой дроби определяет, существует ли действительное значение.

Пример с нечётным знаменателем

Задача. Вычислите $(-8)^{\frac{2}{3}}$. Сначала берём кубический корень, который существует для отрицательного числа, затем возводим в квадрат:

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4.$$

Пример, где запись необходимо сократить

Задача. Обсудите $(-16)^{\frac{2}{4}}$. Дробь $\frac{2}{4}$ сокращается до $\frac{1}{2}$. В действительных числах это квадратный корень из -16 , поэтому выражение не имеет действительного значения. Нельзя сначала вычислить четвертую степень некоторого отрицательного корня: арифметический корень чётной степени из отрицательного числа не определён.

Почему одинаковые на вид законы могут сломаться

Контрпример. Формальный переход $(ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$ нельзя применять при $a = b = -1$ в действительных числах: левая часть равна 1, а обе части справа не определены. Каждое свойство корней требует своей ОДЗ.

Важно. Перед преобразованием ученик вслух отвечает на три вопроса: какова сокращённая дробь в показателе, чётен или нечётен её знаменатель, положительно ли основание там, где требуется чётный корень.

Полный разбор: отрицательное основание и дробная степень

Рассмотрим

$$(-8)^{\frac{2}{3}}.$$

Показатель уже несократим, знаменатель 3 нечётный. Поэтому действительный кубический корень существует:

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4.$$

Теперь рассмотрим внешне похожую запись

$$(-8)^{\frac{1}{2}}.$$

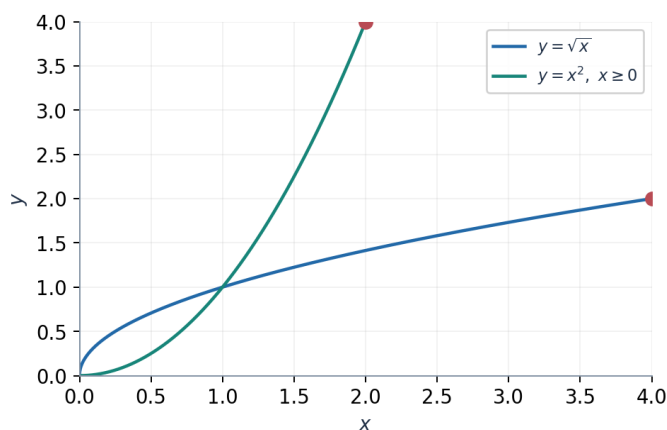
Она требует квадратного корня из отрицательного числа и не имеет действительного значения.

Почему нельзя бездумно применять все законы. Если разрешать отрицательные основания без проверки, запись одной и той же рациональной дроби разными способами может породить конфликт.

Например, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, но несокращённый знаменатель 6 ошибочно подталкивает к чётному корню. Поэтому порядок обязателен:

1. сократить рациональный показатель;
2. проверить чётность знаменателя;
3. только затем переходить к корню.

Для длинных цепочек преобразований программа использует безопасное условие $a > 0$.



Корень и квадрат при неотрицательном аргументе — взаимно обратные операции.

04. Преобразование и сравнение степенных выражений

Сначала приведите основания к общему виду. Например,

$\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{2^2} = \frac{(2^3)^{\frac{2}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{2}}}{2^2} = \frac{2^2 \cdot 2}{2^2} = 2$. Каждое основание здесь положительно, поэтому использованные законы применимы.

Сравнение выражений начинайте с их знаков и области определения. Неравенство между положительными числами можно проверять сравнением квадратов; для чисел разных знаков этот переход без проверки неверен.

Согласование оснований

Большие числа не вычисляются напрямую. Их представляют степенями общего основания.

Пример.

$$8^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^2 \cdot 2^{-1} = 2.$$

Каждый переход опирается на закон степени степени. Условия положительности основания выполняются автоматически, потому что основание 2 положительно.

Почему степенные выражения можно сравнивать**Натуральная степень на положительных числах**

Теорема. Если $0 < x < y$ и n — натуральное число, то $x^n < y^n$.

Доказательство. Используем разность степеней:

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Первый множитель положителен, и каждое слагаемое во второй скобке положительно. Поэтому разность положительна, а значит, $y^n > x^n$.

Корень сохраняет порядок

Если $0 \leq u < v$, то $\sqrt[n]{u} < \sqrt[n]{v}$. Иначе предположим $\sqrt[n]{u} \geq \sqrt[n]{v}$ и возведём обе неотрицательные части в степень n . По только что доказанной монотонности получили бы $u \geq v$, что противоречит условию.

Следствие. При положительном основании и одинаковом положительном показателе можно сравнивать основания. При одинаковом основании больше 1 можно сравнивать показатели. Для основания между 0 и 1 направление меняется, потому что такое основание является обратным числу больше 1.

Задача. Сравните $5^{\frac{3}{2}}$ и $4^{\frac{3}{2}}$. Показатель положителен, основания положительны и $5 > 4$, поэтому первое число больше. Вычислять оба значения не требуется.

05. Вложенные корни

Ищем квадрат суммы. $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$. Для $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ получается $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$, поскольку $\sqrt{2} > 1$.

Подбор объясняется системой: если $\sqrt{u} + \sqrt{v}$ подходит, то $u + v$ должно совпасть с обычной частью подкоренного выражения, а uv — с числом под внутренним корнем. После подбора обязательно проверьте знак.

Вложенные корни

При $a \geq 0$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Доказательство. Оба выражения являются неотрицательными, а возведение в степень mn даёт a . Единственность арифметического корня завершает доказательство.

Если появляются переменные и чётные корни, до преобразования выписывается область допустимых значений. Например,

$$\sqrt{\sqrt{x-2}}$$

требует $x \geq 2$.

Полный разбор: вложенные корни и ОДЗ

Упростим

$$\sqrt[3]{\sqrt{x-2}}.$$

Внутренний квадратный корень требует

$$x - 2 \geq 0.$$

При $x \geq 2$ выражение неотрицательно и

$$\sqrt[3]{\sqrt{x-2}} = (x-2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x-2}.$$

Здесь объединение показателей законно, потому что основание $x-2$ на ОДЗ неотрицательно.

В выражении

$$\sqrt{\sqrt[3]{x-2}}$$

кубический корень существует для всех x , но внешний квадратный требует

$$\sqrt[3]{x-2} \geq 0,$$

то есть снова $x \geq 2$. Порядок корней может менять промежуточные условия, поэтому ОДЗ проверяется изнутри наружу.

06. Модуль и допустимые преобразования

Модуль показывает расстояние до нуля. При $x = 1$ выражение $\sqrt{(x-3)^2}$ равно 2. Запись $x - 3$ дала бы -2 , поэтому без условия она неверна. Верно $|x - 3|$: при $x \geq 3$ это $x - 3$, а при $x < 3$ это $3 - x$.

При нескольких модулях отметьте точки, в которых выражения под модулями меняют знак, и рассматривайте получившиеся промежутки отдельно.

Полный разбор: модуль нельзя угадывать

Упростим

$$\sqrt{(x-4)^2}.$$

По доказанной теореме

$$\sqrt{(x-4)^2} = |x-4|.$$

Дальнейшая запись зависит от x :

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & x \geq 4, \\ 4-x, & x < 4. \end{cases}$$

Если в условии сказано $x < 1$, то сразу получаем $4 - x$. Если условия о знаке нет, ответ с модулем является окончательным.

Проверьте себя. Почему нельзя оставить знак $\pm$? Символ квадратного корня обозначает одно неотрицательное число. Знак выбирает модуль, а $\pm$ появляется при решении уравнения $t^2 = A$.

Полный разбор: параметр под корнем

Для каких a выражение

$$\sqrt{x^2 - 2ax + a^2}$$

тождественно равно $x - a$ для всех действительных x ?

Подкоренное выражение — полный квадрат:

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Поэтому левая часть равна

$$|x - a|.$$

Равенство $|x - a| = x - a$ выполняется только при $x \geq a$. Невозможно, чтобы все действительные x удовлетворяли $x \geq a$ при конечном a . Следовательно, таких значений параметра нет.

Этот пример показывает, как потеря модуля создаёт ложный ответ «любое a ».

Возведение в квадрат: равносильность только при контроле знаков

Из равенства $A = B$ всегда следует $A^2 = B^2$. Обратный переход неверен без дополнительных условий: из $A^2 = B^2$ следует $A = B$ или $A = -B$. Поэтому при решении уравнений с корнями возведение в квадрат создаёт кандидатов, которые обязательно проверяются в исходном уравнении.

Полный разбор простого иррационального уравнения

Задача. Решите $\sqrt{x+6} = x$.

Шаг 1. Левая часть неотрицательна, поэтому правая также должна быть неотрицательной: $x \geq 0$. При этом $x+6 \geq 0$ выполняется автоматически.

Шаг 2. На области $x \geq 0$ обе части неотрицательны, поэтому возведение в квадрат равносильно:

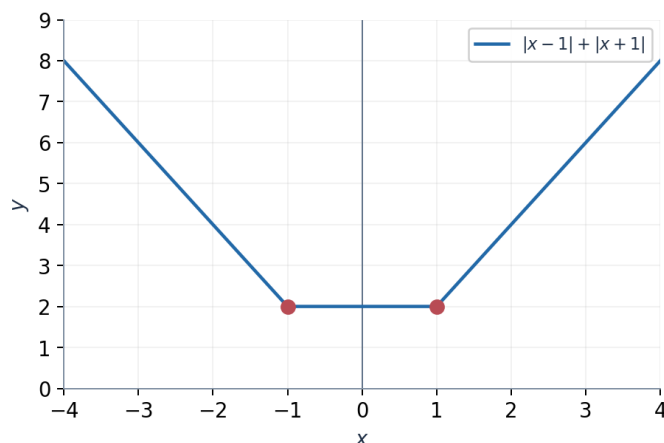
$$x+6 = x^2, \quad x^2 - x - 6 = 0, \quad (x-3)(x+2) = 0.$$

Получаем кандидаты $x = 3$ и $x = -2$. Второй нарушает условие $x \geq 0$. Проверка $x = 3$ в исходном уравнении: $\sqrt{9} = 3$. Ответ: 3.

Уравнение с двумя радикалами

Задача. Решите $\sqrt{x+1} = \sqrt{7-x}$. ОДЗ задаёт $-1 \leq x \leq 7$. Обе части неотрицательны, поэтому равенство квадратов равносильно исходному: $x+1 = 7-x$, откуда $x = 3$. Проверка ОДЗ завершает решение.

Критерий преобразования. Перед возведением в чётную степень нужно либо доказать неотрицательность обеих частей, либо после преобразования проверить все найденные значения в исходном уравнении.



Сумма расстояний до -1 и 1 постоянна между этими точками.

07. Рационализация знаменателя

Сопряжённое выражение использует разность квадратов. Для $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{5}+2$. Внизу получается $5-4=1$, а ответ равен $\sqrt{5}+2$.

Это не изменение значения дроби: мы умножили её на $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=1$. В буквенных примерах нужно проверить, что множитель и исходный знаменатель ненулевые.

Рационализация знаменателя как равносильное преобразование

Например,

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

умножают на единицу

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

если $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0$. В знаменателе по разности квадратов получается

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b.$$

Нужно сохранить условия существования корней и ненулевого исходного знаменателя.

Полный разбор: сопряжённое выражение

Упростим

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}.$$

Умножаем на единицу в виде сопряжённой дроби:

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2.$$

Знаменатель $\sqrt{5}+2$ ненулевой, поэтому умножение действительно выполнялось на единицу. Ключевой шаг — доказанная разность квадратов.

Для кубических корней используется сумма или разность кубов. Например,

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b.$$

Это не новая формула рационализации: это подстановка в разность кубов.

08. Разобранные примеры и порядок действий

Метод решения выражений со степенями и корнями

1. Выписать ОДЗ всех знаменателей и чётных корней.
2. Сократить рациональные показатели.
3. Разложить числовые основания на простые множители.
4. Перейти к общему основанию.
5. Применять только тот закон, условия которого проверены.
6. Модуль раскрывать после анализа знака.
7. Десятичное приближение использовать только для финальной проверки.

Четыре развёрнутых примера на преобразования

Модуль из квадратного корня

Задача. Упростите $\sqrt{(x-2)^2}$. По определению арифметический квадратный корень неотрицателен, поэтому результат равен $|x-2|$. Если $x \geq 2$, это $x-2$; если $x < 2$, это $2-x$. Замена на $x-2$ без разбора знака теряет половину допустимых значений.

Рационализация знаменателя

Задача. Упростите $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$. Умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое выражение $\sqrt{5}+2$. Это разрешено, потому что $\sqrt{5}+2$ не равно нулю.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2.$$

Согласование оснований

Задача. Решите $2^{x+1} = 8^{2x-1}$. Так как $8 = 2^3$, правая часть равна 2^{6x-3} . Функция 2^t строго возрастает, поэтому равенство степеней с одинаковым основанием равносильно равенству показателей:

$$x+1 = 6x-3, \quad x = \frac{4}{5}.$$

Вложенный корень

Задача. Упростите $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$ при $a \geq 1$. Ищем представление подкоренного выражения как квадрат суммы. Пусть $(\sqrt{u} + \sqrt{v})^2 = u + v + 2\sqrt{uv}$. Нужно $u + v = a$ и $uv = a - 1$. Подходят $u = a - 1$ и $v = 1$.

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} = \sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2} = \sqrt{a-1}+1.$$

Последнее равенство законно без модуля, потому что $\sqrt{a-1}+1$ положительно. Именно проверка знака завершает преобразование.

09. Ошибки при работе со степенями и корнями

Карта запрещённых переходов

Ложный переход	Контрпример	Что верно вместо него
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a = b = 1$	свойство существует для произведения при выполнении условий
$\sqrt{a^2} = a$	$a = -3$	$\sqrt{a^2} = a $
$(a+b)^n = a^n + b^n$	$a = b = 1, n = 2$	использовать бином Ньютона
$a^m + a^n = a^{m+n}$	$a = 3, m = n = 1$	показатели складываются при умножении
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ без анализа	$a < 0, n$ чётно	сначала сократить показатель и проверить основание
деление степеней при $a = 0$	знаменатель обращается в ноль	условие $a \neq 0$ обязательно

Доказательный маршрут ученика

1. Определить, какая степень или какой корень скрыты в записи.
2. Записать ОДЗ до преобразований: знаменатели, чётные корни, отрицательные показатели.
3. Назвать определение, из которого выводится используемое свойство.
4. Проверить знак основания и чётность знаменателя дробного показателя.
5. После чётной степени или сокращения вернуть ограничения и проверить кандидатов.
6. В конце выполнить короткую числовую или обратную проверку результата.

Финальная проверка. Ученик должен суметь заново вывести

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\sqrt{a^2} = |a|$ и определение $a^{\frac{m}{n}}$. Эти четыре вывода являются основой, а не дополнительным материалом.

10. Проверка понимания

Контроль вывода

1. $a^0 = 1$ для $a \neq 0$;
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
3. три закона натуральных степеней;
4. $\sqrt{a^2} = |a|$;
5. свойство корня из произведения и условия его применения;
6. определение $a^{\frac{m}{n}}$;
7. хотя бы один закон рациональных степеней через общий знаменатель;
8. контрпример к «корню из суммы».

Быстрая проверка понимания

Вопрос ученику	Критерий полного ответа
Почему $a^0 = 1$ требует $a \neq 0$?	Вывод использует деление $\frac{a^n}{a^n}$.
Откуда берётся отрицательная степень?	Из требования $a^m a^{-m} = a^0 = 1$.
Почему $\sqrt{a^2} = a $?	Арифметический корень неотрицателен.
Можно ли распределять корень по сумме?	Нет; например, $\sqrt{1+1} \neq 1+1$.
Зачем сокращать дробь показателя?	Показатель - число, а не способ записи числа.
Что проверять перед объединением степеней?	Основания, ОДЗ и допустимость выбранного закона.

Практика охватывает преобразования радикалов, ОДЗ, сравнение и доказательство оценок. В заданиях 39–40 требуется исследовать все значения параметра; методы для этих задач объяснены в следующем разделе.

11. Как исследовать корни с параметром

Сначала преобразуйте корни с учётом знака: $\sqrt{u^2} = |u|$. После этого разбейте числовую ось в нулях выражений под модулями.

Пример. $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2} = a$ — сумма расстояний до точек 0 и 2. Между ними она равна 2; слева равна $2 - 2x$, справа — $2x - 2$. Поэтому при $a < 2$ решений нет, при $a = 2$ подходит весь $[0; 2]$, при $a > 2$ корней два: $1 - \frac{a}{2}$ и $1 + \frac{a}{2}$.

Другой приём. Для суммы $\sqrt{c+x} + \sqrt{c-x}$, где $c > 0$ и $|x| \leq c$, квадрат равен $2c + 2\sqrt{c^2 - x^2}$. Отсюда видно, где функция возрастает и убывает, а значит, сколько пересечений у неё с горизонталью $y = a$. Если исходный отрезок несимметричен, значения на его концах различны и проверяются отдельно.

Для объяснения ученику. Сначала найдите минимальную и максимальную высоту графика; затем проведите горизонталь на каждой граничной высоте. Рисунок подсказывает ответ, а монотонность доказывает, что других пересечений нет.