



ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА · УРОК 36

Итоговое повторение и дальнейший план

Ответы и пошаговые решения

Базовая тренировка: задания 1-12

Задание 1

Тренировка. Площадь трапеции

Основания трапеции равны 12 и 17, высота равна 6. Найдите площадь трапеции по рисунку.

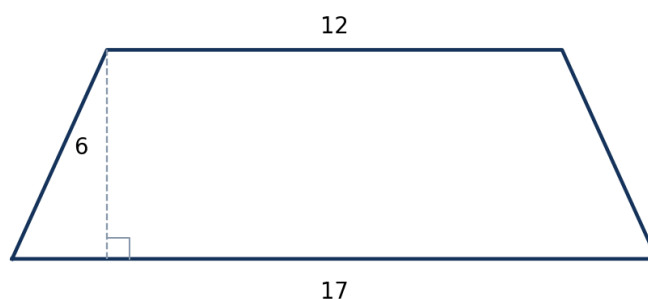


Рисунок к заданию.

Решение

$$1. S = \frac{(12 + 17) \cdot 6}{2} = 87.$$

ОТВЕТ: 87

Задание 2

Тренировка. Векторы

Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = (1; 0)$ и $\vec{b} = (1; \sqrt{3})$.

Решение

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = 1.$$

$$2. |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \text{ поэтому } \cos \varphi = \frac{1}{2}.$$

ОТВЕТ: 0,5



Задание 3

Тренировка. Объём тела

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6, 8 и 12. Найдите его объём.

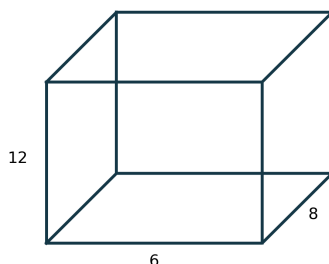


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 576$.

ОТВЕТ: 576

Задание 4

Тренировка. Вероятность

В группе 18 учеников, из них 12 девушек. Случайно выбирают одного ученика. Найдите вероятность выбрать юношу.

Ответ округлите до сотых.

Решение

1. Юношей $18 - 12 = 6$, поэтому $P = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Округляем найденную вероятность до сотых: 0,33.

Ответ: 0,33

Задание 5

Повторение. Вероятность

Три независимых сигнализатора отказывают каждый с вероятностью 0,1. Найдите вероятность, что хотя бы один работает.

Решение

1. Все три откажут с вероятностью $0,1^3 = 0,001$.

2. $P = 1 - 0,001 = 0,999$.

ОТВЕТ: 0,999



Задание 6

Повторение. Уравнение

Решите уравнение $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$.

Решение

1. При $x \neq 1$ получаем $x - 1 = 3$, откуда $x = 4$.

ОТВЕТ: 4

Задание 7

Повторение. Модель и проверка

Вычислите $\frac{6!}{4!2!}$.

Решение

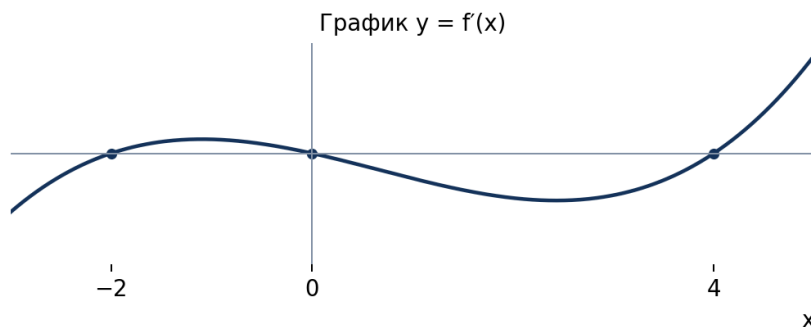
1. $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

ОТВЕТ: 15

Задание 8

Повторение. Знак производной

На рисунке изображён график производной функции; её нули имеют абсциссы -2, 0, 4. Сколько точек минимума имеет функция на показанном интервале?



Решение

1. Минимум соответствует переходу производной от отрицательных значений к положительным.

2. Такой переход происходит при $x = -2$ и $x = 4$, поэтому точек минимума две.

ОТВЕТ: 2



Задание 9

Тренировка. Модель и проверка

Сумма с простыми процентами вычисляется по формуле $A = P(1 + rt)$. Найдите A , если $P = 50000$, $r = 0,08$, $t = 2$.

Решение

1. $A = 50000 (1 + 0,08 \cdot 2) = 58000$.

ОТВЕТ: 58 000

Задание 10

Тренировка. Модель и проверка

Цех планировал выпустить 200 деталей, но перевыполнил план на 15%. Сколько деталей выпустил цех?

Решение

1. $200 \cdot 1,15 = 230$.

ОТВЕТ: 230

Задание 11

Тренировка. Линейная функция

На рисунке изображён график линейной функции, проходящей через точки $(0; 5)$ и $(1; 6)$. Найдите значение функции при $x = 6$.

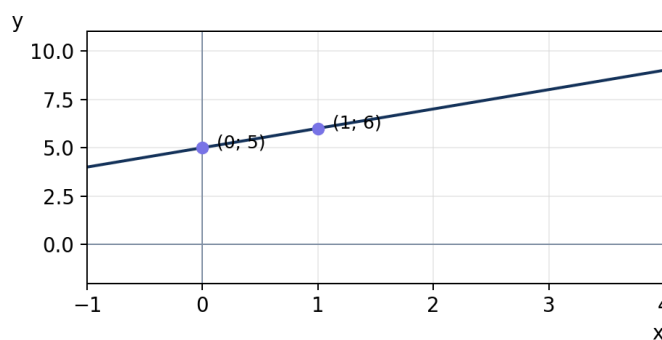


Рисунок к заданию.

Решение

1. По графику или по уравнению прямой $y = 1x + 5$ получаем $y(6) = 11$.

ОТВЕТ: 11



Задание 12

Тренировка. Модель и проверка

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x - 4| + 2$.

Решение

1. $|x - 4| \geq 0$, равенство достигается при $x=4$.
2. Минимум равен 2.

ОТВЕТ: 2

Подготовительные и экзаменационные задачи: задания 13-36

Задание 13

Тренировка. Уравнение

а) Решите уравнение $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

Решение

1. Положим $t = 2^x > 0$. Получаем $t^2 - 9t + 8 = 0$.
2. Корни квадратного уравнения: $t = 1$ и $t = 8$.
3. Следовательно, $x = 0$ или $x = 3$.
4. Условию пункта б удовлетворяет только $x = 0$.

Ответ: а) $x = 0; 3$; б) $x = 0$

Задание 14

Тренировка. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\log_2(x - 0) \geq 3$.

Решение

1. ОДЗ: $x > 0$.
2. Так как основание 2 больше единицы, знак неравенства сохраняется: $x - 0 \geq 2^3$.
3. С учётом ОДЗ получаем $[8; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[8; +\infty)$



Задание 15

Тренировка. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 1 100 тыс. рублей на 4 года. Каждый январь долг увеличивается на 10%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Ежегодное уменьшение основного долга: $\frac{1100}{4} = 275$ тыс. рублей.
2. Проценты начисляются на остатки 1100, 825, ..., 275; это арифметическая прогрессия.
3. Сумма остатков: $\frac{4(1100 + 275)}{2} = 2750$ тыс. рублей.
4. Все проценты: $0,1 \cdot 2750 = 275$ тыс. рублей.
5. Общая сумма выплат: $1100 + 275 = 1375$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 1 375 тыс. рублей

Задание 16

Тренировка. Делимость

Может ли число, записанное только цифрами 1, делиться на 3? Приведите пример или докажите невозможность.

Решение

1. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.
2. Число 111 имеет сумму цифр 3 и делится на 3.

ОТВЕТ: Да; 111



Задание 17

Тренировка. Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике катеты равны 14 и 48. Найдите гипотенузу. Используйте рисунок.

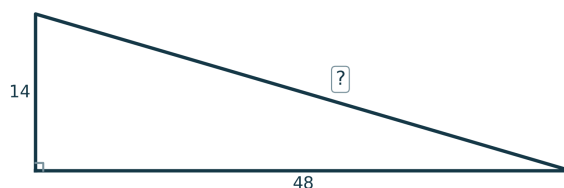


Рисунок к заданию.

Решение

1. По теореме Пифагора $c = \sqrt{14^2 + 48^2} = 50$.

ОТВЕТ: 50

Задание 18

Тренировка. Векторы

Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = (1; 1)$ и $\vec{b} = (1; -1)$.

Решение

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 1 = 0$.

2. Нулевое скалярное произведение означает, что косинус угла равен 0.

ОТВЕТ: 0



Задание 19

Формат егэ. Объём цилиндра

Радиус основания цилиндра равен 6, высота — 10. Найдите $\frac{V}{\pi}$.

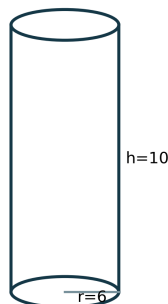


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 360\pi$, поэтому $\frac{V}{\pi} = 360$.

ОТВЕТ: 360

Задание 20

Формат егэ. Вероятность

На полке 30 книг, из них 8 научно-популярных. Случайно выбирают одну книгу. Найдите вероятность выбрать научно-популярную.

Ответ округлите до сотых.

Решение

1. $P = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

Округляем найденную вероятность до сотых: 0,27.

Ответ: 0,27

Задание 21

Формат егэ. Вероятность

Независимые события А и В имеют вероятности 0,4 и 0,5. Найдите вероятность их одновременного наступления.

Решение

1. Для независимых событий $P(A \cap B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$.

ОТВЕТ: 0,2



Задание 22

Формат егэ. Уравнение

Решите уравнение $\frac{x+2}{x-1} = 2$.

Решение

1. При $x \neq 1$ имеем $x + 2 = 2x - 2$.

2. Отсюда $x = 4$.

ОТВЕТ: 4

Задание 23

Формат егэ. Модель и проверка

Вычислите $\frac{5!}{3!2!}$.

Решение

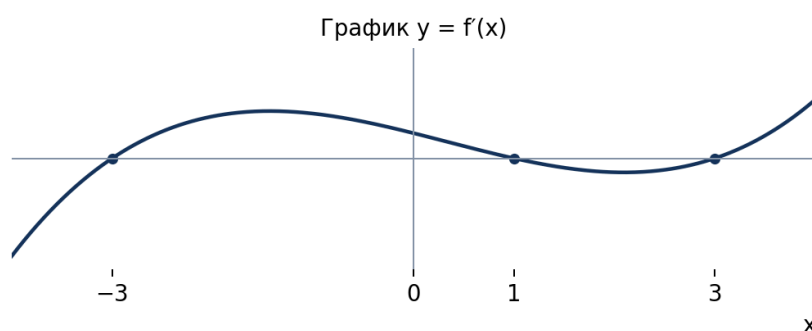
1. $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

ОТВЕТ: 10

Задание 24

Формат егэ. Знак производной

На рисунке изображён график производной функции; её нули имеют абсциссы -3, 1, 3. Сколько точек экстремума имеет функция на показанном интервале?



Решение

1. Во всех трёх нулях производная меняет знак.

2. Следовательно, исходная функция имеет три точки экстремума.

ОТВЕТ: 3



Задание 25

Формат егэ. Модель и проверка

Температуры связаны формулой $C = \frac{5}{9} (F - 32)$. Найдите C , если $F = 86$.

Решение

1. $C = \frac{5}{9} \cdot 54 = 30$.

ОТВЕТ: 30

Задание 26

Формат егэ. Модель и проверка

После скидки 20% товар стоит 2 400 рублей. Найдите первоначальную цену.

Решение

1. После скидки осталось 80% цены: $0,8x = 2400$.

2. $x = 3000$ рублей.

ОТВЕТ: 3 000

Задание 27

Формат егэ. Линейная функция

На рисунке изображён график линейной функции, проходящей через точки $(0; 6)$ и $(1; 8)$. Найдите значение функции при $x = 7$.

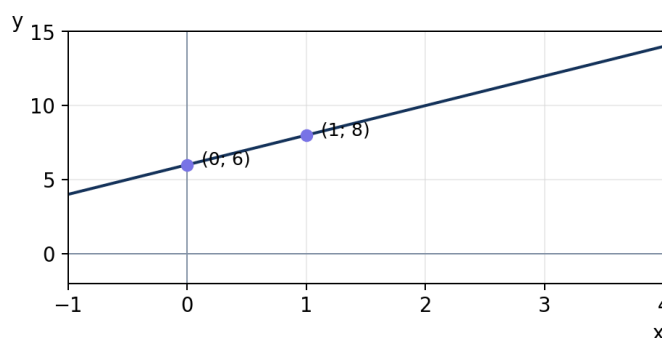


Рисунок к заданию.

Решение

1. По графику или по уравнению прямой $y = 2x + 6$ получаем $y(7) = 20$.

ОТВЕТ: 20



Задание 28

Формат егэ. Модель и проверка

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |2x + 6| - 5$.

Решение

1. Модуль равен нулю при $x = -3$.
2. Минимальное значение функции равно -5.

ОТВЕТ: -5

Задание 29

Формат егэ. Уравнение

а) Решите уравнение $2 \sin^2(x - 3\pi) - 3 \sin(x - 3\pi) + 1 = 0$. **б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку** $\left[\frac{5\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Решение

1. Обозначим $y = x - 3\pi$. Разложим: $(2 \sin y - 1)(\sin y - 1) = 0$.
 2. Получаем $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ или $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
 3. Возвращаемся к x и выполняем отбор на данном отрезке.
 4. Подходящие корни: $\frac{19\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{23\pi}{6}$.
- Полное решение пункта а: $x = \frac{19\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{23\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{7\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \frac{19\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{23\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{7\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; **б)** $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{23\pi}{6}$

Задание 30

Формат егэ. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\frac{(x+1)(x-5)}{x-2} \geq 0$.

Решение

1. Критические точки: -1, 2 и 5; точка 2 не входит в ОДЗ.
2. Знаки слева направо: минус, плюс, минус, плюс.
3. Получаем $[-1; 2) \cup [5; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[-1; 2) \cup [5; +\infty)$



Задание 31

Формат егэ. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 1 200 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 15%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Ежегодное уменьшение основного долга: $\frac{1200}{5} = 240$ тыс. рублей.
2. Проценты начисляются на остатки 1200, 960, ..., 240; это арифметическая прогрессия.
3. Сумма остатков: $\frac{5(1200 + 240)}{2} = 3600$ тыс. рублей.
4. Все проценты: $0,15 \cdot 3600 = 540$ тыс. рублей.
5. Общая сумма выплат: $1200 + 540 = 1740$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 1 740 тыс. рублей

Задание 32

Формат егэ. Чётность

Может ли число, оканчивающееся цифрой 5, быть квадратом чётного числа? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Квадрат чётного числа чётен и оканчивается чётной цифрой, тогда как число с последней цифрой 5 нечётно.

ОТВЕТ: Нет



Задание 33

Формат егэ. Площадь трапеции

Основания трапеции равны 14 и 21, высота равна 8. Найдите площадь трапеции по рисунку.

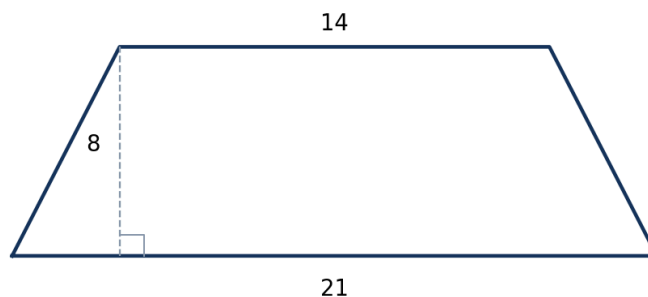


Рисунок к заданию.

Решение

$$1. S = \frac{(14 + 21) \cdot 8}{2} = 140.$$

ОТВЕТ: 140

Задание 34

Формат егэ. Векторы

Даны векторы $\vec{a} = (7; -1)$ и $\vec{b} = (5; 4)$. Найдите их скалярное произведение.

Решение

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 = 31.$$

ОТВЕТ: 31



Задание 35

Формат егэ. Объём тела

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8, 9 и 12. Найдите его объём.

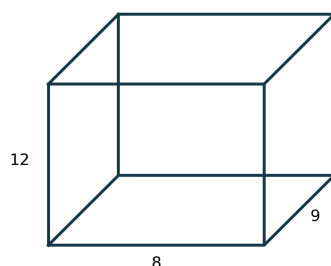


Рисунок к заданию.

Решение

1. $V = 8 \cdot 9 \cdot 12 = 864$.

ОТВЕТ: 864

Задание 36

Формат егэ. Вероятность

В коробке 7 красных и 13 синих шаров. Наугад выбирают один шар. Найдите вероятность выбрать красный шар.

Решение

1. Всего 20 равновозможных исходов, благоприятных — 7.

2. $P = \frac{7}{20} = 0,35$.

ОТВЕТ: 0,35



Повторение: задания 37-40

Задание 37

Повторение. Уравнение

а) Решите уравнение $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$. **б) Найдите все корни на отрезке** $[-2\pi; 0]$.

Решение

1. Положим $t = \cos x$. Тогда $(2t - 1)(t - 1) = 0$.

2. Получаем $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = 1$.

3. Общее решение: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. На отрезке $[-2\pi; 0]$ лежат -2π , $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ и 0.

Полное решение пункта а: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) -2π ; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; 0

Задание 38

Повторение. Неравенство и ОДЗ

Решите неравенство $\frac{(x-3)(x-11)}{x-7} \geq 0$.

Решение

1. Критические точки: 3, 7, 11; точка 7 не входит в ОДЗ.

2. Расставляем знаки множителей на четырёх промежутках. Кратности всех нулей нечётные, поэтому знак меняется в каждой критической точке.

3. Выбираем нужные промежутки и получаем $[3; 7) \cup [11; +\infty)$.

ОТВЕТ: $[3; 7) \cup [11; +\infty)$



Задание 39

Повторение. Кредит и проценты

В июле банк выдал кредит в размере 1 400 тыс. рублей на 7 лет. Каждый январь долг увеличивается на 10%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

Решение

1. Ежегодное уменьшение основного долга: $\frac{1400}{7} = 200$ тыс. рублей.
2. Проценты начисляются на остатки 1400, 1200, ..., 200; это арифметическая прогрессия.
3. Сумма остатков: $\frac{7(1400 + 200)}{2} = 5600$ тыс. рублей.
4. Все проценты: $0,1 \cdot 5600 = 560$ тыс. рублей.
5. Общая сумма выплат: $1400 + 560 = 1960$ тыс. рублей.

ОТВЕТ: 1 960 тыс. рублей

Задание 40

Повторение. Делимость

Существует ли натуральное n , для которого $3^n + 1$ делится на 8? Обоснуйте ответ.

Решение

1. Остатки степеней тройки по модулю 8 чередуются: $3^{2k} \equiv 1, 3^{2k+1} \equiv 3$.
2. Поэтому $3^n + 1$ даёт остаток 2 при чётном n и остаток 4 при нечётном n .
3. Нулевой остаток невозможен, следовательно, такого натурального n нет.

ОТВЕТ: нет