



Наибольшее и наименьшее значение функции

Задания для самостоятельной работы

40 заданий. Записывайте ход решения в тетради. Ответы и подробные разборы находятся в отдельном PDF этого урока.

Имя: _____

Дата: _____

01. Свойства и базовые методы: задания 1-10

Задание 1

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^2 - 4x + 5$ на $[0; 5]$. Укажите, где они достигаются.

Задание 2

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^3 - 3x + 2$ на $[-2; 3]$. Укажите все точки достижения.

Задание 3

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^4 - 8x^2$ на $[-3; 2]$.

Задание 4

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x + \frac{4}{x}$ на $[1; 5]$.

Задание 5

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ на $[0; 3]$.

Задание 6

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ на $[0; 3]$.

Задание 7

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ на $[1; e^2]$.

Задание 8

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ на $[-1; 2]$.

Задание 9

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sin x + \cos x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

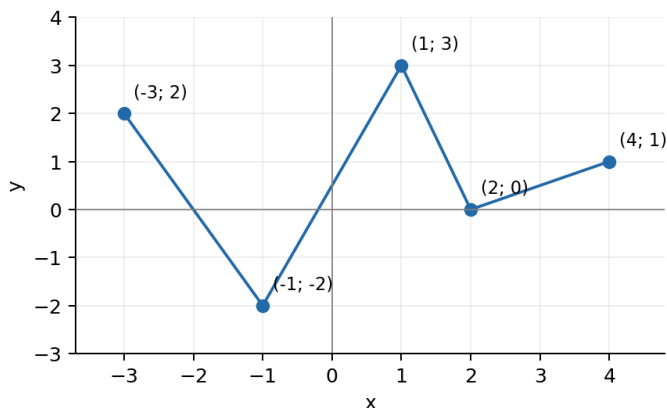
Задание 10

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^2 + |x - 1|$ на $[-1; 2]$.

02. Графики и связка методов: задания 11–16

Задание 11

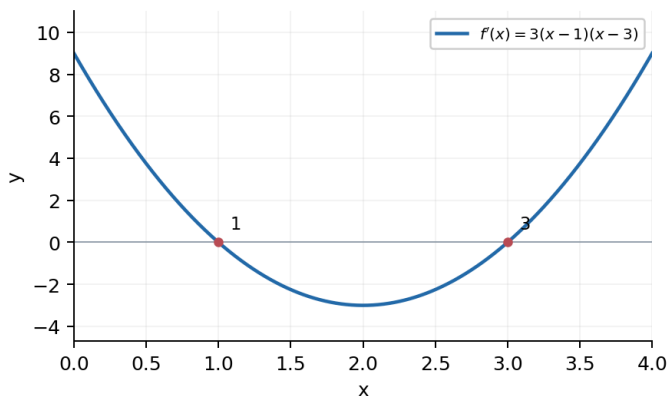
На рисунке показан график непрерывной функции на $[-3; 4]$. Он состоит из отрезков, последовательно соединяющих точки $(-3; 2)$, $(-1; -2)$, $(1; 3)$, $(2; 0)$, $(4; 1)$. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции и все точки их достижения.



Задание 11: исходный график функции; все пять вершин входят в область.

Задание 12

На рисунке изображена производная $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ на $[0; 4]$. Функция f непрерывна на отрезке и дифференцируема внутри. Известно: $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$. Найдите наименьшее и наибольшее значения f , указав все точки достижения.



Задание 12: график производной, а не исходной функции.

Задание 13

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0; 2]$, если они существуют.

Задание 14

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ на $[-8; 1]$.

Задание 15

Определите максимум $y = 7 + 12x - 4x\sqrt{x}$ при $0 \leq x \leq 12$.

Задание 16

Определите минимум $y = 9x - 9 \ln(x + 11) + 7$ при $-10,5 \leq x \leq 0$.

03. Повторение пройденного: задания 17-20**Задание 17**

Решите неравенство $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$.

Задание 18

Решите уравнение $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$.

Задание 19

Решите уравнение $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ и отберите корни на $[\pi; 3\pi]$.

Задание 20

Составьте уравнение касательной к $f(x) = x^3 - 3x$ в точке с абсциссой 2.

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Определите максимум $y = 10 \sin x - \frac{42x}{\pi} - 12$ при $-\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 0$.

Задание 22

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^3 e^{-x}$ на $[0; 6]$.

Задание 23

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ на $[1; e^2]$.

Задание 24

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ на всей области определения.

Задание 25

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задание 26

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 7$ на $[-\ln 2; \ln 3]$.

Задание 27

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$ на $[-1; 3]$.

Задание 28

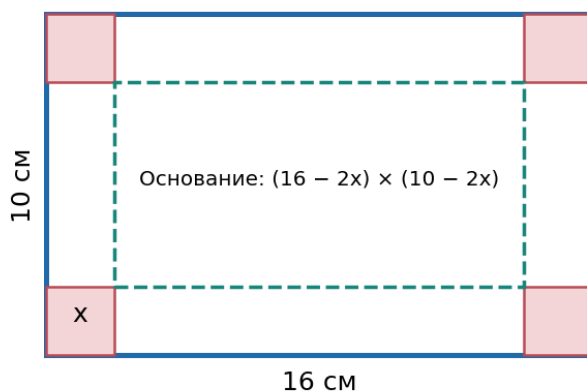
Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ на $[-2; 3]$.

Задание 29

Прямоугольник симметричен относительно оси Oy . Его нижние вершины лежат на оси Ox , а верхние на параболе $y = 12 - x^2$. Найдите наибольшую площадь и размеры прямоугольника.

Задание 30

Из листа размером 10×16 см вырезают по углам одинаковые квадраты со стороной x и сгибают открытую коробку. Найдите максимальный объём и размеры полученной коробки.



Задание 30: развёртка; красные угловые квадраты вырезают. x - сторона вырезаемого квадрата; размеры схемы условные.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34**Задание 31**

Найдите кратчайшее расстояние от $A(0; 2)$ до параболы $y = x^2$. Укажите все ближайшие точки.

Задание 32

Закрытый круговой цилиндр имеет объём 54π . Найдите радиус, высоту и наименьшую площадь полной поверхности.

Задание 33

Докажите, что $\ln x \leq \frac{x}{e}$ при всех $x > 0$. Найдите все случаи равенства.

Задание 34

Найдите наибольшее значение $f(x) = x^{1/x}$ при $x > 0$. Докажите, что оно достигается только в одной точке.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40**Задание 35**

Для каждого действительного a найдите наименьшее и наибольшее значения $f_a(x) = x^2 - 2ax + 5$ на $[-1; 2]$. Укажите точки достижения.

Задание 36

Найдите все a , при которых наибольшее значение $f_a(x) = x^3 - 3ax$ на $[-1; 1]$ равно 2.

Задание 37

Исследуйте существование наименьшего значения $f_a(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ при $x > 0$ для всех действительных a . Если оно существует, найдите его и точку достижения.

Задание 38

Для каждого действительного a найдите минимум $f_a(x) = x^4 - 2ax^2$ на $[-1; 2]$ и все точки его достижения.

Задание 39

Для всех действительных a найдите наименьшее значение $f_a(x) = x^2 - 2ax + |x - 1|$ на $[0; 2]$ и точку, где оно достигается.

Задание 40

Для действительного a обозначим

$$M(a) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - 2ax|.$$

Найдите наименьшее возможное $M(a)$, все подходящие a и точки x , в которых при оптимальном a достигается этот максимум.