



Урок 16. Прогрессии как инструмент

Арифметическая прогрессия описывает постоянную прибавку, геометрическая отвечает за изменение в одно и то же число раз. Научимся находить член и сумму прогрессии, считать число переходов и составлять уравнения в текстовых задачах.

01. Перед изучением: номер, переход и сумма

В прогрессиях часто ошибаются не в вычислениях, а в выборе объекта. Номер n сообщает место элемента; a_n - значение на этом месте; S_n - сумма первых n значений. Фразы «за десятый день» и «за первые десять дней» требуют разных формул.

От первого члена до десятого девять переходов. Поэтому в формуле члена стоит $n - 1$. Но если дано значение **до первого изменения**, после десяти изменений множитель применяется десять раз. Например, $N_0 q^{10}$ описывает десять периодов роста от начального момента; $b_1 q^9$ - десятый член ряда с первым значением b_1 .

Правило выбора. «На одно и то же число больше» означает постоянную разность. «В одно и то же число раз больше» означает постоянное отношение.

Проверьте формулу при $n = 1$: она обязана возвращать первый член. Проверьте ещё один известный член. Это обнаруживает смещение показателя или ошибку знака разности.

02. Особые случаи и проверка суммы

Арифметическая прогрессия может убывать: отрицательная разность допустима. В геометрической прогрессии отрицательный знаменатель чередует знаки членов; из условия о положительных членах такой вариант исключается. Если при нахождении знаменателя получилось $q^2 = 9$, нельзя оставлять только 3 без проверки исходных ограничений.

При $q = 1$ все члены одинаковы и $S_n = nb_1$. Дробную формулу суммы с делителем $q - 1$ применять нельзя. При остальных значениях обе записи $b_1(q^n - 1)/(q - 1)$ и $b_1(1 - q^n)/(1 - q)$ дают один результат: у второй одновременно изменены знаки числителя и знаменателя.

Для положительных возрастающих членов сумма лежит между na_1 и na_n . В арифметической прогрессии она точно равна числу членов, умноженному на среднее первого и последнего. Проверка порядка величины помогает заметить потерянный множитель n .

03. Последовательность: как читать запись и замечать закономерность

Последовательность - это набор чисел, поставленных в определённом порядке. У каждого числа есть номер: первое число обозначают a_1 , второе - a_2 , число на месте n - a_n . Номер и значение нельзя путать. В записи $a_7 = 19$ число 7 сообщает место члена, а 19 - его значение. Если в задаче спрашивают «каким по счёту будет число 43», неизвестен именно номер n . Если спрашивают «чему равен двадцатый член», известен номер, а неизвестно значение a_{20} .

Эта простая языковая проверка предотвращает большую часть ошибок начинающих учеников.

Несколько первых чисел не задают продолжение однозначно. Например, после 2, 4, 6 можно поставить 8 или 10, если выбрать разные правила. В задаче должно быть указано правило или тип прогрессии.

Полезно различать два способа задания. Формула n -го члена сразу даёт любой элемент: например, $a_n = 3n - 1$, поэтому $a_1 = 2$, $a_5 = 14$. Рекуррентное правило объясняет, как получить следующий член из предыдущего: $a_{n+1} = a_n + 3$. Для вычисления далёкого члена рекуррентная запись неудобна: пришлось бы выписать все промежуточные значения. Прогрессии дают возможность перейти от пошагового движения к формуле и сразу найти нужный член или сумму большого числа членов.

- a_n - значение члена, n - его порядковый номер; это разные величины.
- Сначала установите тип связи: постоянная разность или постоянное отношение.
- Закономерность проверяют на всех данных соседних парах, а не только на первой.
- При подстановке номера обязательно заключайте отрицательные числа и выражения в скобки.

04. Арифметическая прогрессия и формула n -го члена

Арифметическая прогрессия - последовательность, в которой каждый следующий член получается прибавлением одного и того же числа d . Это число называют разностью прогрессии. Формально $a_{n+1} = a_n + d$. Разность находят вычитанием предыдущего члена из следующего: $d = a_{n+1} - a_n$. Порядок вычитания важен. Для ряда 14, 10, 6 имеем $d = 10 - 14 = -4$. Если вычесть наоборот, получится 4 и направление изменения будет потеряно.

Чтобы дойти от первого члена до второго, делают один шаг d ; до третьего - два шага; до n -го - $n - 1$ шагов. Отсюда $a_n = a_1 + d(n - 1)$. Число шагов на единицу меньше номера члена. Типичная ошибка - написать dn . Её легко заметить проверкой $n = 1$: правильная формула должна вернуть a_1 , а выражение $a_1 + d$ даёт уже второй член. Такая подстановка - короткая и надёжная самопроверка любой полученной формулы.

Если известны два не соседних члена, разность находят по числу промежутков между их номерами. Из a_k и a_m следует $a_m - a_k = d(m - k)$, поэтому $d = \frac{(a_m - a_k)}{(m - k)}$. Например, между a_3 и a_8 не восемь и не пять членов, а пять равных шагов: $8 - 3 = 5$. После нахождения d любой из известных членов используют, чтобы восстановить a_1 . Лучше затем подставить полученные a_1 и d во второй исходный член и убедиться, что он восстановился.

- $d = a_{n+1} - a_n$.
- $a_n = a_1 + d(n - 1)$.
- По двум членам: $d = \frac{(a_m - a_k)}{(m - k)}$.
- Номер члена n должен быть натуральным; дробный номер означает, что заданного значения в прогрессии нет.

Разбор 1. Восстановление арифметической прогрессии

Условие. В арифметической прогрессии $a_3 = 11$, $a_7 = 27$. Найдите a_1 , разность d и десятый член a_{10} .

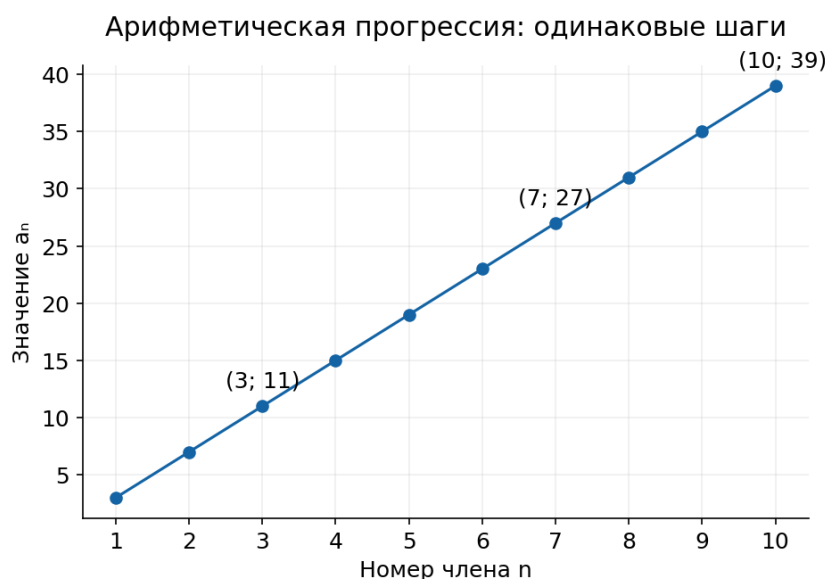


Рис. 1: Разбор 1. Восстановление арифметической прогрессии.

Решение

1. Между третьим и седьмым членами $7 - 3 = 4$ одинаковых шага.

2. $a_7 - a_3 = 4d$, поэтому $27 - 11 = 4d$ и $d = 4$.

3. $a_3 = a_1 + 2d$: $11 = a_1 + 8$, откуда $a_1 = 3$.

4. $a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 36 = 39$.

5. $a_7 = 3 + 6 \cdot 4 = 27$, исходные данные восстановлены.

Ответ: $a_1 = 3$; $d = 4$; $a_{10} = 39$.

05. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Сумму первых n членов обозначают $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Складывать десятки членов по одному долго и опасно. В арифметической прогрессии первый и последний члены дают ту же сумму, что второй и предпоследний: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$. Если записать сумму один раз слева направо, второй раз справа налево и сложить строки, получится n одинаковых пар.

Поэтому $2S_n = n(a_1 + a_n)$, а значит $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Когда последний член не дан, его можно сначала найти по формуле $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

После подстановки получается вторая форма: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n - 1))}{2}$. Обе формулы равноправны. Первая удобна, если известны крайние члены; вторая - если известны a_1 , d и n . Не стоит заучивать их как две несвязанные строки: вторая получается из первой заменой a_n , поэтому её всегда можно восстановить.

В задачах про ряды кресел, ступени, ежедневный выпуск или накопления отдельный член отвечает одному конкретному ряду или дню, а S_n - общему количеству за несколько рядов

или дней. Слова «в последнем ряду» указывают на a_n , слова «всего», «за все дни», «общее число» - на S_n . Перед выбором формулы полезно спросить: требуется один элемент или накопленный итог? Неверный выбор часто даёт правдоподобное число, поэтому смысловая проверка обязательна.

- $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.
- $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.
- Один ряд или один день - член прогрессии; итог за все ряды или дни - сумма.
- Количество членов между крайними значениями: $n = \frac{(a_n - a_1)}{d} + 1$, если деление имеет смысл.

Разбор 2. Места в зрительном зале

Условие. В первом ряду зала 12 мест, а в каждом следующем на 2 места больше. Сколько мест в 18 рядах?

Решение

1. Число мест по рядам образует арифметическую прогрессию: $a_1 = 12$, $d = 2$, $n = 18$.

2. В последнем ряду $a_{18} = 12 + 17 \cdot 2 = 46$ мест.

3. Общее число мест $S_{18} = \frac{18(12 + 46)}{2} = 9 \cdot 58 = 522$.

4. Проверка масштаба: среднее число мест в ряду равно $\frac{(12 + 46)}{2} = 29$; $29 \cdot 18 = 522$.

Ответ: 522 места.

06. Геометрическая прогрессия и формула n-го члена

Геометрическая прогрессия - последовательность ненулевых чисел, в которой каждый следующий член получают умножением предыдущего на одно и то же число q . Число q называют знаменателем прогрессии: $b_{n+1} = b_n q$. Его находят делением следующего члена на предыдущий: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Для 3, 12, 48 знаменатель равен 4. Для 16, 8, 4 - $\frac{1}{2}$. Для 5, -10, 20 - -2, и знаки членов чередуются.

До n -го члена от первого выполняют $n - 1$ умножений на q , поэтому $b_n = b_1 q^{n-1}$. Проверка $n = 1$ снова возвращает первый член, поскольку $q^0 = 1$. Эта формула описывает не постоянную прибавку, а постоянное изменение в одно и то же число раз. Рост на 20% за период соответствует умножению на 1,2; уменьшение на 20% - умножению на 0,8. Ошибка «вычесть 0,2» смешивает процент и абсолютное число.

Если известны b_k и b_m , то $\frac{b_m}{b_k} = q^{m-k}$. Сначала находят степень знаменателя, затем q .

Нужно учитывать знак и условия задачи. Из $q^2 = 9$ математически следуют $q = 3$ и $q = -3$, но если сказано, что все члены положительны или величина растёт без смены знака, остаётся $q = 3$. Из $q^3 = -8$ получается единственное действительное $q = -2$. После выбора знаменателя полезно восстановить один промежуточный член.

- $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, если предыдущий член не равен нулю.

- $b_n = b_1 q^{n-1}$.
- Рост на $p\%$ за период: $q = 1 + \frac{p}{100}$; уменьшение на $p\%$: $q = 1 - \frac{p}{100}$.
- При извлечении корня учитывайте возможные знаки q и ограничения прикладной задачи.

Разбор 3. Два известных члена геометрической прогрессии

Условие. В положительной геометрической прогрессии $b_2 = 6$, $b_5 = 162$. Найдите b_1 , знаменатель q и b_6 .

Решение

1. От b_2 до b_5 выполнено $5 - 2 = 3$ умножения на q , поэтому $\frac{b_5}{b_2} = q^3$.

2. $q^3 = \frac{162}{6} = 27$. Так как прогрессия положительная, $q = 3$.

3. $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$.

4. $b_6 = b_5 q = 162 \cdot 3 = 486$.

5. 2, 6, 18, 54, 162, 486 - отношение соседних членов равно 3.

Ответ: $b_1 = 2$; $q = 3$; $b_6 = 486$.

07. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Пусть $S_n = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{n-1}$. Умножим сумму на q : $qS_n = b_1 q + \dots + b_1 q^n$. При вычитании одинаковые промежуточные слагаемые сокращаются, и остаётся

$qS_n - S_n = b_1 q^n - b_1$. Поэтому при $q \neq 1$ получаем $S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{(q - 1)}$. Эквивалентная запись

$S_n = \frac{b_1 (1 - q^n)}{(1 - q)}$ часто удобнее при $0 < q < 1$. Знаки числителя и знаменателя меняются одновременно, значение суммы остаётся тем же.

Если $q = 1$, все члены одинаковы, и формула с делением на $q - 1$ неприменима. В этом отдельном случае $S_n = nb_1$. Перед использованием общей формулы знаменатель нужно проверить. При отрицательном q слагаемые чередуют знаки; формула продолжает работать, но устный контроль суммы особенно важен. Например, $8 - 4 + 2 - 1 = 5$: ответ должен лежать между частичными колебаниями, а не быть большим положительным числом.

В сюжетах про удвоение клеток, распространение сообщений или выплаты по этапам важно понять, спрашивают значение в последний момент или сумму за все моменты. Число бактерий через четыре удвоения - отдельный член. Общее количество предметов, выданных на всех этапах, - сумма. Кроме того, число периодов и номер члена могут отличаться на единицу: начальное состояние - первый член, а после четырёх изменений наблюдается пятый член.

- При $q \neq 1$: $S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{(q - 1)}$.
- При $q = 1$: $S_n = nb_1$.
- Начальное состояние считается первым членом; число изменений до b_n равно $n - 1$.
- Отдельный момент - b_n , общий итог по всем этапам - S_n .

Разбор 4. Сумма геометрической прогрессии

Условие. Найдите сумму $5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320$.

Решение

1. Это геометрическая прогрессия: $b_1 = 5$, $q = 2$, $n = 7$.

$$2. S_7 = \frac{5(2^7 - 1)}{(2 - 1)}.$$

3. $2^7 = 128$, поэтому $S_7 = 5 \cdot 127 = 635$.

4. Проверка прямым укрупнением: $5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 = 635$.

Ответ: 635.

08. Как распознать модель в тексте задачи

Главный вопрос распознавания: величина каждый раз меняется на одно и то же число или в одно и то же число раз? Фразы «на 4 больше», «ежедневно на 15 деталей больше», «в каждом следующем ряду на 2 места меньше» задают арифметическую прогрессию. Фразы «в 3 раза больше», «ежегодно увеличивается на 5%», «каждый час остаётся половина» задают геометрическую. Слово «процент» почти всегда указывает на множитель, потому что процент вычисляется от текущего значения.

Полезно построить короткую таблицу из трёх строк: номер периода, значение, переход. Например, вклад 10 000 рублей растёт на 10% ежегодно: 0 лет - 10 000; 1 год - 11 000; 2 года - 12 100. Здесь начисление за второй год уже не равно 1000, поэтому арифметической прогрессии нет. Если же человек каждый месяц откладывает на 1000 рублей больше, чем в предыдущем, сами ежемесячные взносы образуют арифметическую прогрессию, а накопленная сумма - её S_n .

- Одинаковая прибавка → арифметическая прогрессия.
- Одинаковый множитель или одинаковый процент от текущего значения → геометрическая прогрессия.
- В таблице периоды должны иметь одинаковую длительность.
- До вычислений назовите величину, которая является членом прогрессии.

Разбор 5. Рост за равные периоды

Условие. В начале наблюдения в культуре было 250 бактерий. Их число удваивается каждые 3 часа. Сколько бактерий будет через 12 часов?



Рис. 2: Разбор 5. Рост за равные периоды.

Решение

1. За 12 часов проходит $\frac{12}{3} = 4$ полных периода роста.
2. Начальное число умножается на 2 четыре раза: $250 \cdot 2^4$.
3. $2^4 = 16$, поэтому $250 \cdot 16 = 4000$.
4. Начальный момент - первый член, а через четыре изменения получается пятый член; степень равна числу изменений.

Ответ: 4000 бактерий.

09. Единый алгоритм решения и проверка ответа

Шаг 1 - перевести текст на язык последовательности. Выпишите a_1 или b_1 , d или q , номер n и то, что требуется: отдельный член либо сумму. Шаг 2 - определить тип прогрессии по переходу. Шаг 3 - выбрать формулу только после заполнения данных. Шаг 4 - решить полученное линейное, квадратное или показательное уравнение. Шаг 5 - вернуть ответ в сюжет: места, рубли, дни, детали. Единицы измерения в промежуточной формуле могут не писаться, но в итоговой строке они обязательны, если задача текстовая.

После нахождения параметров восстановите два соседних члена. Для арифметической прогрессии их разность должна равняться d ; для геометрической - отношение q . При нахождении суммы оцените порядок: сумма положительных членов больше каждого отдельного слагаемого. При убывающей арифметической прогрессии проверьте, не стали ли поздние члены отрицательными вопреки смыслу задачи. В прикладной модели отрицательное число мест или изделий означает, что выбранный диапазон n недопустим.

Частые ошибки имеют понятные причины. Множитель n вместо $n - 1$ появляется, когда считают номера, а не переходы. Сложение процентов появляется, когда процент

воспринимают как фиксированную сумму. Потеря единицы в числе членов появляется, когда путают точки и промежутки. Подмена b_n суммой S_n возникает из-за невнимания к словам «в последний день» и «за все дни». Каждую ошибку можно предупредить одним контрольным вопросом до расчёта.

- Дано $\rightarrow$ тип перехода $\rightarrow$ искомая величина $\rightarrow$ формула $\rightarrow$ вычисление $\rightarrow$ смысловая проверка.
- Всегда различайте n членов и $n - 1$ переходов.
- После решения восстановите хотя бы один соседний член.
- Ответ в текстовой задаче записывают с единицами и проверяют на реалистичность.

10. Типичные ошибки и способы их остановить

- Путают номер n и значение a_n или b_n .
- Используют n шагов от первого члена вместо $n - 1$.
- Вычитают члены в обратном порядке и теряют знак разности d .
- Смешивают постоянную прибавку и постоянное умножение.
- Выбирают формулу отдельного члена, когда в условии требуется общий итог.
- Принимают дробное или отрицательное значение n за допустимый номер члена.

11. Дополнительные разборы

Разбор 6. Кредит с равномерным уменьшением долга

УСЛОВИЕ

В июле планируется взять кредит 5 млн рублей на целое число лет. Каждый январь долг возрастает на 20%, с февраля по июнь вносится платёж, а к каждому июлю долг становится на одну и ту же сумму меньше. Общая сумма выплат равна 7,5 млн рублей. На сколько лет берут кредит?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

При равномерном погашении основной долг перед начислениями процентов образует арифметическую прогрессию.

ДО РЕШЕНИЯ.

Работаем в миллионах рублей. Общая переплата равна $7,5 - 5 = 2,5$ млн рублей.

1. Обозначаем срок

$$n \in \mathbb{N}, \quad d = \frac{5}{n}$$

Основной долг ежегодно уменьшается на одну и ту же величину d .

2. Складываем остатки долга

$$5 + (5 - d) + \dots + d = \frac{5(n + 1)}{2}$$

Это сумма n членов арифметической прогрессии с крайними членами 5 и $5/n$.

3. Находим все проценты

$$0,2 \cdot \frac{5(n+1)}{2} = 0,5(n+1)$$

Каждый январь начисляется 20% на соответствующий остаток.

4. Используем общую выплату

$$5 + 0,5(n+1) = 7,5 \Rightarrow n = 4$$

Все платежи возвращают 5 млн основного долга и оплачивают начисленные проценты.

Проверка. Остатки 5; 3,75; 2,5; 1,25 дают сумму 12,5. Проценты - 2,5, вместе с основным долгом - 7,5.

Типичная ошибка. Считать переплату как $20\% \cdot 5 \cdot n$: остаток долга ежегодно уменьшается.

ОТВЕТ.

4 года

Разбор 7. Срок кредита через сумму арифметической прогрессии**УСЛОВИЕ**

В июле планируется взять кредит 10 млн рублей на целое число лет. Каждый январь долг возрастает на 10%, с февраля по июнь вносится платёж, а к каждому июлю долг становится на одну и ту же сумму меньше. Общая сумма выплат равна 15 млн рублей. Найдите срок кредита.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Переплата равна ставке, умноженной на сумму остатков долга до ежегодных платежей.

ДО РЕШЕНИЯ.

Переплата равна 5 млн рублей; ответ должен быть натуральным числом лет.

1. Записываем шаг погашения

$$d = \frac{10}{n}$$

За n лет долг 10 млн уменьшается до нуля равными долями.

2. Суммируем остатки

$$10 + (10 - d) + \dots + d = \frac{10(n+1)}{2} = 5(n+1)$$

Используем формулу суммы арифметической прогрессии.

3. Выражаем переплату

$$0,1 \cdot 5(n+1) = 0,5(n+1)$$

Проценты начисляются на каждый из записанных остатков.

4. Решаем уравнение

$$10 + 0,5(n + 1) = 15 \Rightarrow n = 9$$

Общая выплата состоит из основного долга и процентов.

Проверка. При $n=9$ сумма остатков равна 50 млн; 10% от неё - 5 млн, поэтому общая выплата равна 15 млн.

Типичная ошибка. Забыть остаток последнего года $10/n$ или взять $n-1$ вместо $n+1$ в формуле суммы.

ОТВЕТ.

9 лет

Разбор 8. Равные платежи и геометрическая прогрессия**УСЛОВИЕ**

Кредит погашают четырьмя равными ежегодными платежами. Каждый январь долг увеличивается на 10%, затем вносится платёж. Всего банку выплачено 292 820 рублей. Какую сумму взяли в кредит?

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Одинаковые будущие платежи приводим к моменту выдачи кредита делением на последовательные степени коэффициента роста.

ДО РЕШЕНИЯ.

Сначала найдём один платёж; начальная сумма должна быть меньше общей выплаты.

1. Находим ежегодный платёж

$$P = \frac{292820}{4} = 73205$$

Все четыре платежа равны.

2. Записываем коэффициент

$$q = 1,1 = \frac{11}{10}$$

После начисления долг умножается на 1,1.

3. Дисконтируем платежи

$$S = \frac{P}{q} + \frac{P}{q^2} + \frac{P}{q^3} + \frac{P}{q^4}$$

Каждый более поздний платёж делим на дополнительную степень q .

4. Вычисляем сумму

$$S = 232050$$

Получена сумма четырёх членов геометрической прогрессии.

5. Проверяем рекуррентно

$$232050 \rightarrow 182050 \rightarrow 127050 \rightarrow 66550 \rightarrow 0$$

На каждом шаге умножаем долг на 1,1 и вычитаем 73 205.

Проверка. Четвёртое начисление даёт $66\,550 \cdot 1,1 = 73\,205$ - ровно последний платёж.

Типичная ошибка. Вычесть 10% из каждого платежа один раз: платежи находятся на разных расстояниях от момента выдачи кредита.

ОТВЕТ.

232050 рублей

12. Вопрос по теме

Когда в степени стоит n , а когда $n - 1$?

От первого до n -го члена сделано $n - 1$ переходов. Если дано начальное значение в момент 0, после n периодов изменения множитель применяется n раз.

13. Самостоятельная работа

В тесте 40 заданий. Начните с заданий 1-20, затем переходите к 21-35 и 36-40. Решите самостоятельно и только после этого откройте объяснение. Задания на повторение отмечены отдельно.

Перейти к тестовым заданиям урока 16

Предыдущий урок: Работа, трубы и смеси.