



Функции и графики

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Свойства и базовые методы: задания 1–10

Задание 1

Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Чётный корень определён ровно при неотрицательном подкоренном выражении. Условие $x-2 \geq 0$ равносильно $x \geq 2$. В точке 2 корень равен нулю и существует; все большие аргументы допустимы. **Ответ.** $[2; +\infty)$.

Задание 2

Найдите область определения функции $f(x) = \frac{1}{x+4}$.

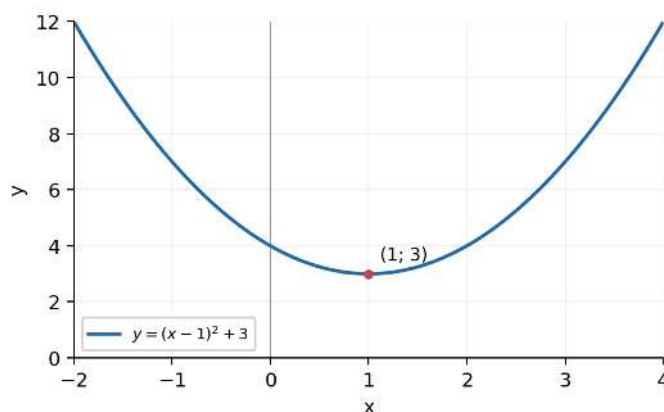
Деление определено при $x+4 \neq 0$. Поэтому исключаем только $x = -4$; при любом другом аргументе знаменатель ненулевой. **Ответ.** $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

Задание 3

Найдите область значений функции.

$$y = (x - 1)^2 + 3$$

Квадрат $(x - 1)^2$ неотрицателен, поэтому $y \geq 3$. Граница достигается при $x = 1$. Для любого $y \geq 3$ существует аргумент $x = 1 + \sqrt{y - 3}$. Так доказана достижимость всех значений. **Ответ.** $[3; +\infty)$.



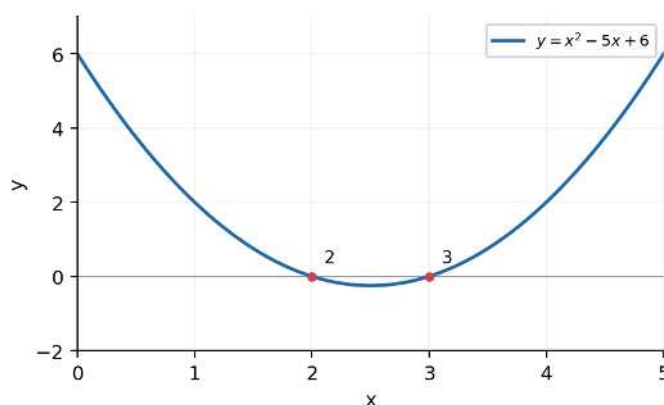
Задание 3. Минимум 3 достигается при $x=1$.

Задание 4

Найдите нули функции.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

Разложение $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ даёт $x = 2$ или $x = 3$. Оба значения допустимы и обращают исходную функцию в ноль. Других корней нет, поскольку произведение двух ненулевых множителей ненулевое. **Ответ.** 2; 3.



Задание 4. Нули параболы: $x=2$ и $x=3$.

Задание 5

Решите неравенство и укажите, где функция положительна.

$$(x - 2)(x + 1) > 0$$

Нули множителей -1 и 2 делят прямую на три промежутка. Знаки произведения слева направо: плюс, минус, плюс. Строгое неравенство исключает оба нуля. **Ответ.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.



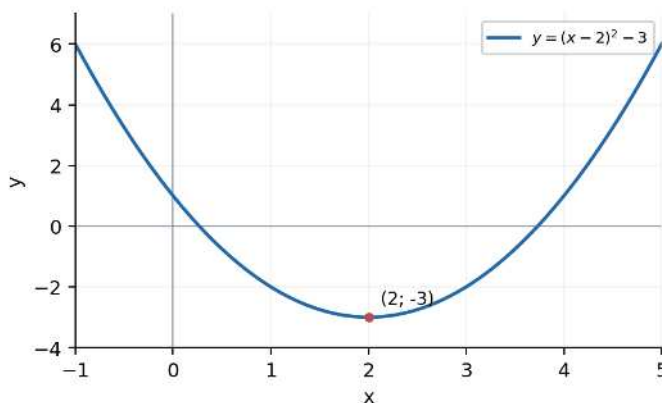
Задание 5. Положительный знак вне корней -1 и 2 .

Задание 6

Найдите абсциссу вершины и наименьшее значение функции.

$$y = x^2 - 4x + 1$$

Выделим полный квадрат: $x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$. Квадрат неотрицателен и равен нулю только при $x = 2$. Значит вершина $(2; -3)$ и никакого меньшего значения функция не принимает. **Ответ.** Абсцисса 2 ; наименьшее значение -3 .



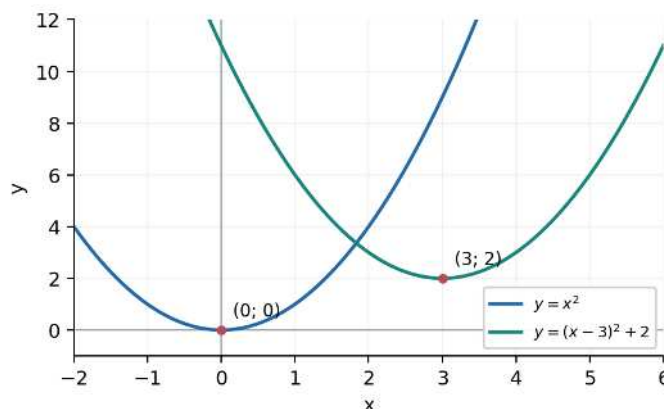
Задание 6. Вершина $(2; -3)$.

Задание 7

Опишите преобразование графика $y = x^2$, после которого получается график $y = (x - 3)^2 + 2$.

Исходная точка $(u; u^2)$ переходит в $(u + 3; u^2 + 2)$: при $x = u + 3$ новый аргумент $x - 3$ равен u . Такое обратимое соответствие переносит весь график и вершину.

Ответ. Сдвиг на 3 вправо и на 2 вверх.



Задание 7. Сдвиг на 3 вправо и на 2 вверх.

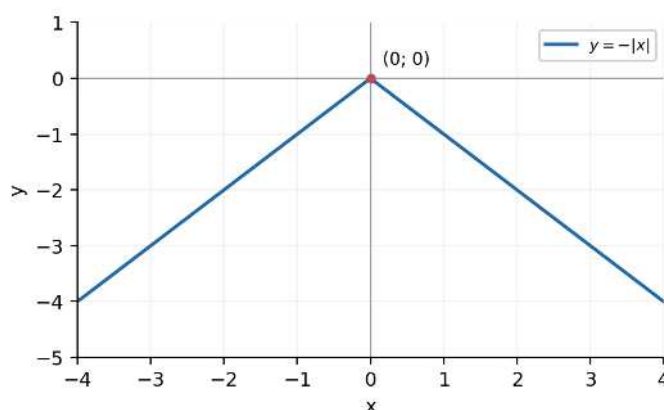
Задание 8

Укажите область значений и наибольшее значение функции.

$$y = -|x|$$

Модуль $|x| \geq 0$, поэтому $-|x| \leq 0$. Значение 0 достигается при $x = 0$, любое $y < 0$ достигается при $x = -y$. Это доказывает весь образ и максимум. **Ответ.**

$E(f) = (-\infty; 0]$; наибольшее значение 0.



Задание 8. Максимум 0; остальные значения отрицательны.

Задание 9

Определите, является ли функция чётной, нечётной или ни той ни другой.

$$f(x) = x^4 + 2x^2$$

Подставим $-x$.

$$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 = x^4 + 2x^2 = f(x)$$

Область определения симметрична относительно нуля.

Ответ. чётная

Задание 10

Функция задана кусочно:

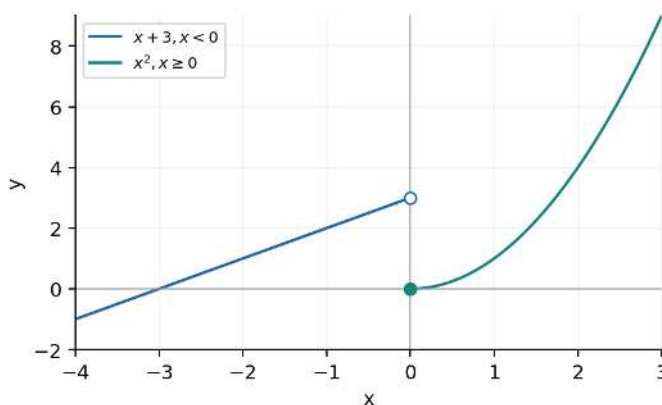
$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найдите $f(-2)$, $f(0)$ и область значений. Объясните, какой точкой задаётся значение при $x = 0$.

Шаг 1. При $x = -2 < 0$ используем первую ветвь: $f(-2) = -2 + 3 = 1$. При $x = 0$ действует вторая: $f(0) = 0$.

Шаг 2. Первая ветвь даёт $(-\infty; 3)$: число 3 ею не достигается. Вторая даёт $[0; +\infty)$. Объединение этих множеств - вся числовая прямая.

Ответ. $f(-2) = 1$, $f(0) = 0$, $E(f) = \mathbb{R}$. На графике $(0; 3)$ исключена, $(0; 0)$ включена.



Задание 10. В нуле включена точка $(0; 0)$, исключена $(0; 3)$.

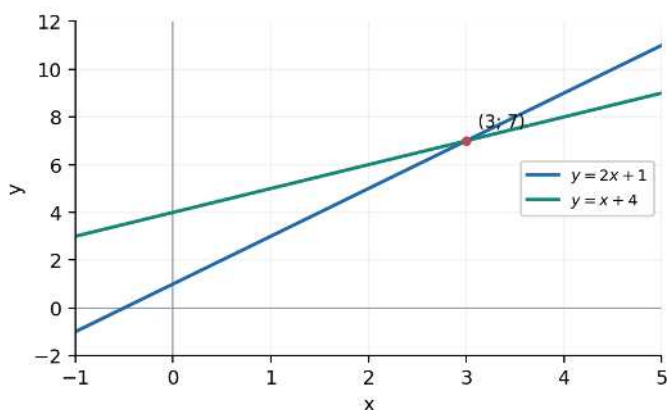
02. Графики и связка методов: задания 11–16

Задание 11

Найдите абсциссу точки пересечения графиков.

$$y = 2x + 1, \quad y = x + 4$$

На пересечении ординаты равны: $2x + 1 = x + 4$, откуда $x = 3$. Подстановка даёт общую ординату 7. Линейное уравнение с ненулевым коэффициентом имеет единственное решение. **Ответ.** Абсцисса 3.



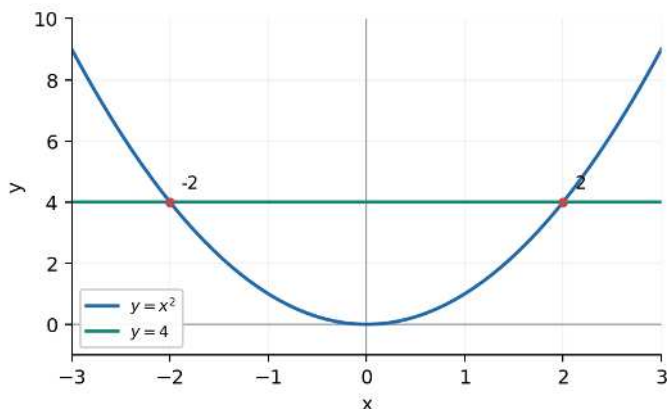
Задание 11. Пересечение в точке (3; 7).

Задание 12

Сколько решений имеет уравнение?

$$x^2 = 4$$

Уравнение равносильно $(x - 2)(x + 2) = 0$. Получаем два разных корня -2 и 2 , оба лежат в области определения. Графики параболы и горизонтали имеют соответствующие две общие точки. **Ответ.** 2 решения.



Задание 12. Два пересечения: $x = -2$ и $x = 2$.

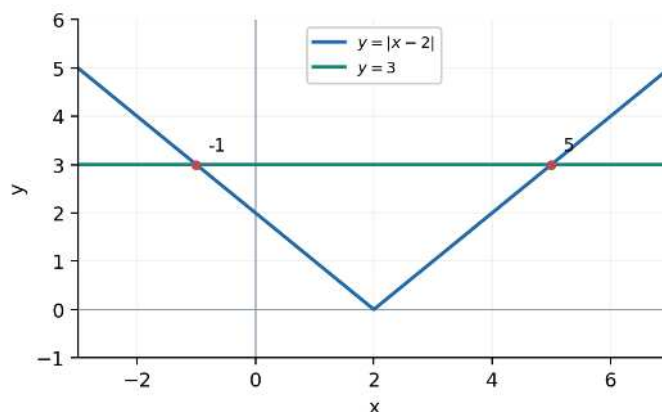
Задание 13

Решите уравнение.

$$|x - 2| = 3$$

Для положительного числа 3 равенство модуля распадается на $x - 2 = 3$ или $x - 2 = -3$. Отсюда $x = 5$ или $x = -1$. В обоих случаях расстояние до 2 равно 3.

Ответ. $-1; 5$.



Задание 13. Пересечения при $x = -1$ и $x = 5$.

Задание 14

Найдите область определения функции.

$$f(x) = \log_2(x - 1)$$

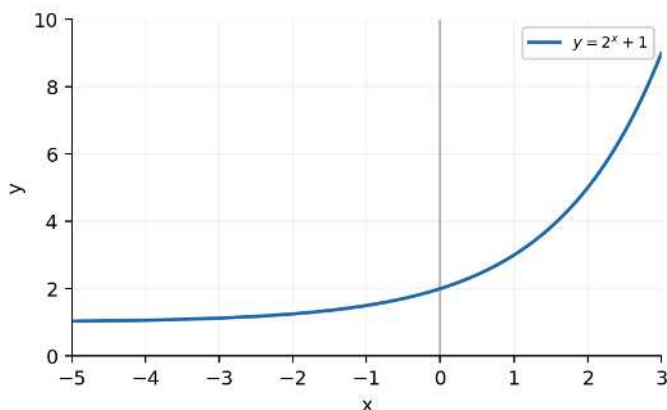
Основание 2 положительно и не равно 1. Требуется $x - 1 > 0$, то есть $x > 1$. Граница исключена: логарифм нуля не существует. **Ответ.** $(1; +\infty)$.

Задание 15

Найдите область значений функции.

$$y = 2^x + 1$$

При любом действительном x значение 2^x положительно, значит $y > 1$. Для любого $y > 1$ аргумент $x = \log_2(y - 1)$ даёт нужное значение. Число 1 не достигается. **Ответ.** $(1; +\infty)$.

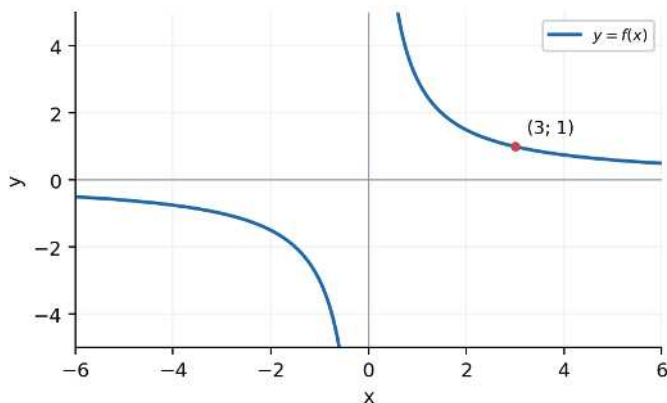


Задание 15. Значения строго больше 1; уровень $y=1$ не достигается.

Задание 16

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите $f(30)$.

Источник: задание 11 официальной демоверсии ФИПИ ЕГЭ-2026, вариант с гиперболой. Рисунок построен заново с теми же данными.



Задание 16. Гипербола проходит через отмеченную точку $(3; 1)$.

Шаг 1. По отмеченной точке получаем $f(3) = 1$, поэтому $k = 3 \cdot 1 = 3$.

Шаг 2. Значение аргумента 30 не равно нулю, значит входит в область определения. Тогда $f(30) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

Ответ. $0, 1$.

03. Повторение пройденного: задания 17-20

Задание 17

Повторение показательных неравенств. Решите $2^x > 8$.

Поскольку $8 = 2^3$ и основание $2 > 1$, функция строго возрастает. Поэтому $2^x > 2^3$ равносильно $x > 3$. При $x = 3$ получается равенство, точка исключена. **Ответ.** $(3; +\infty)$.



Задание 17. Решение $x > 3$.

Задание 18

Повторение рациональных неравенств. Решите $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$.

ОДЗ: $x \neq -2$. Критические точки -2 и 1 . Дробь положительна на внешних промежутках и отрицательна на $(-2; 1)$. Ноль 1 включаем, ноль знаменателя -2 исключаем. **Ответ.** $(-2; 1]$.

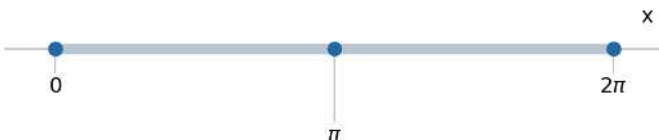


Задание 18. Знаменатель исключает -2 , ноль числителя 1 включён.

Задание 19

Повторение отбора тригонометрических корней. Сколько корней имеет $\sin x = 0$ на $[0; 2\pi]$?

Все корни имеют вид $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Условие $0 \leq \pi n \leq 2\pi$ даёт $n = 0, 1, 2$. Оба конца отрезка включены. **Ответ.** 3 корня: $0, \pi, 2\pi$.



Задание 19. На отрезке три корня: $0, \pi, 2\pi$.

Задание 20

Повторение иррациональных уравнений. Решите $\sqrt{x+1} = x-1$.

Левая часть неотрицательна, поэтому нужно $x \geq 1$; это условие также обеспечивает существование корня. На нём возведение в квадрат равносильно: $x+1 = (x-1)^2$, откуда $x(x-3) = 0$. Значение 0 не удовлетворяет ограничению.

При $x = 3$ обе части равны 2. **Ответ.** $x = 3$.



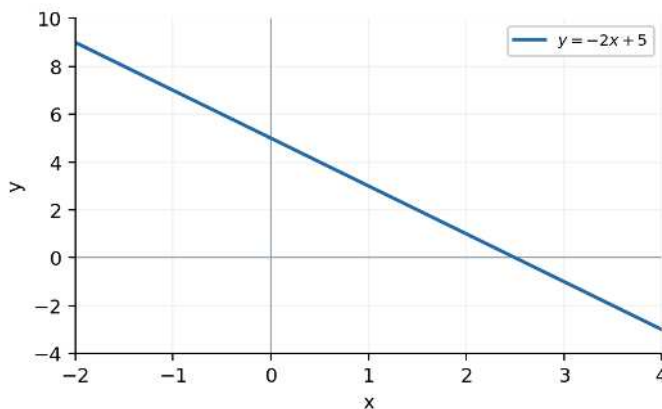
Задание 20. Из двух корней после возведения в квадрат допустим только 3.

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Укажите характер монотонности функции на всей области определения.

$$y = -2x + 5$$

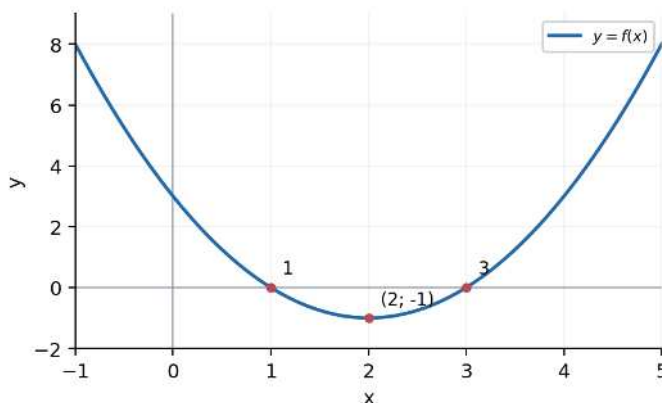
Для $x_1 < x_2$ разность $f(x_2) - f(x_1) = -2(x_2 - x_1) < 0$. Поэтому функция строго убывает на всей числовой прямой; ограничений на аргументы нет. **Ответ.** Убывает на $\mathbb{R}$.



Задание 21. Прямая убывает на всей области определения.

Задание 22

По изображённому графику найдите нули функции, координаты вершины, промежутки монотонности и область значений. График - парабола, продолженная на всю числовую прямую.



Задание 22. Нули и вершина изображённой параболы.

Шаг 1. Пересечения с осью абсцисс находятся при $x = 1$ и $x = 3$. Вершина имеет координаты $(2; -1)$.

Шаг 2. Слева от вершины график идёт вниз, справа - вверх. Функция убывает на $(-\infty; 2]$ и возрастает на $[2; +\infty)$.

Шаг 3. Наименьшая ордината равна -1 , и все большие значения достигаются. Это согласуется с формулой $y = (x - 2)^2 - 1$.

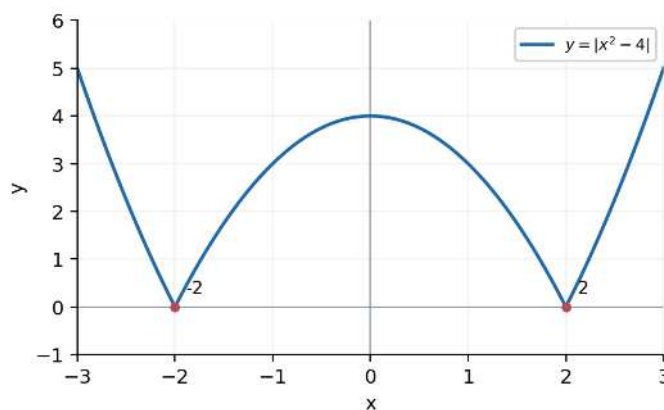
Ответ. Нули 1, 3; вершина $(2; -1)$; убывание $(-\infty; 2]$, возрастание $[2; +\infty)$; $E(f) = [-1; +\infty)$.

Задание 23

Сколько нулей имеет функция?

$$y = |x^2 - 4|$$

Модуль равен нулю ровно при нулевом выражении под ним. Поэтому $|x^2 - 4| = 0$ равносильно $x^2 = 4$. Получаем два различных допустимых корня -2 и 2 . **Ответ.** 2 нуля.



Задание 23. Отражение сохраняет два нуля.

Задание 24

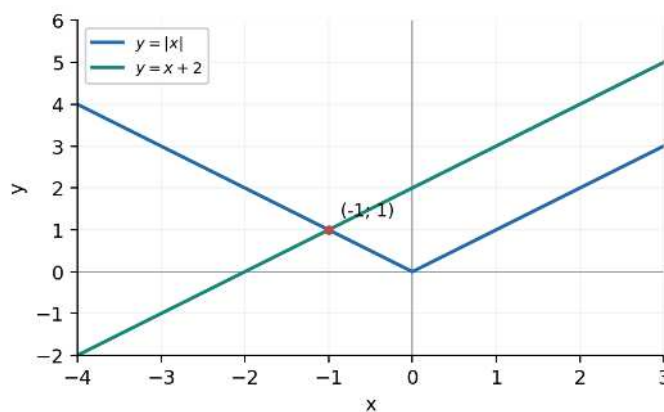
Решите уравнение $|x| = x + 2$, интерпретируя ответ как пересечение двух графиков.

Шаг 1. При $x \geq 0$ равенство имеет вид $x = x + 2$ и невозможно.

Шаг 2. При $x < 0$ получаем $-x = x + 2$, откуда $x = -1$. Ограничение ветви выполнено.

Проверка. $|-1| = -1 + 2 = 1$. Других ветвей нет.

Ответ. $x = -1$.



Задание 24. Единственное пересечение при $x = -1$.

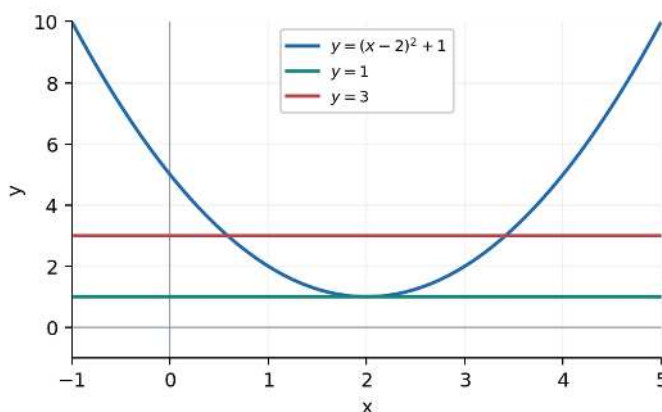
Задание 25

При каких k прямая $y = k$ пересекает график $y = x^2 - 4x + 5$ в двух различных точках?

Шаг 1. Выделим квадрат: $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. Минимум равен 1.

Шаг 2. Уравнение пересечения $(x - 2)^2 = k - 1$ даёт два различных корня только при $k - 1 > 0$. При $k = 1$ корень один, при $k < 1$ их нет.

Ответ. $k > 1$.



Задание 25. Касание при $k=1$; два пересечения при $k>1$.

Задание 26

Найдите область определения функции $f(x) = \log_2(5 - x^2)$.

Аргумент логарифма обязан быть положительным: $5 - x^2 > 0$. Основание 2 допустимо. Из $x^2 < 5$ получаем $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. На границах аргумент равен нулю, поэтому они исключены.

Ответ. $D(f) = (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.



Задание 26. Положительный аргумент логарифма между исключёнными границами.

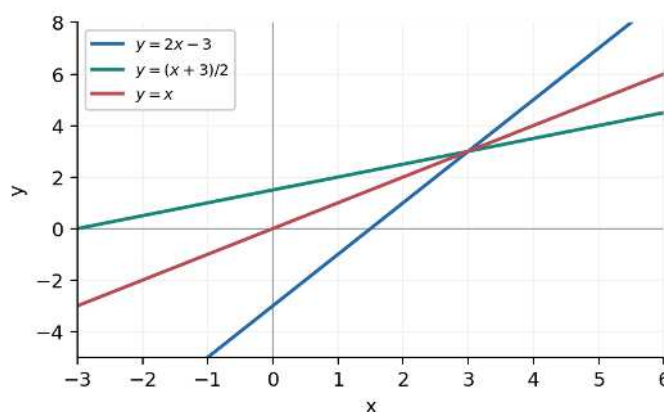
Задание 27

Найдите обратную функцию для $f(x) = 2x - 3$, заданной на $\mathbb{R}$, и докажите, что она определена на всей числовой прямой.

Функция строго возрастает и принимает каждое действительное значение ровно один раз. Из $y = 2x - 3$ выражаем $x = \frac{y+3}{2}$ и меняем обозначения.

Проверка композициями: $f\left(\frac{x+3}{2}\right) = x$ и $\frac{f(x)+3}{2} = x$ при любом x .

Ответ. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$, $D(f^{-1}) = E(f^{-1}) = \mathbb{R}$.



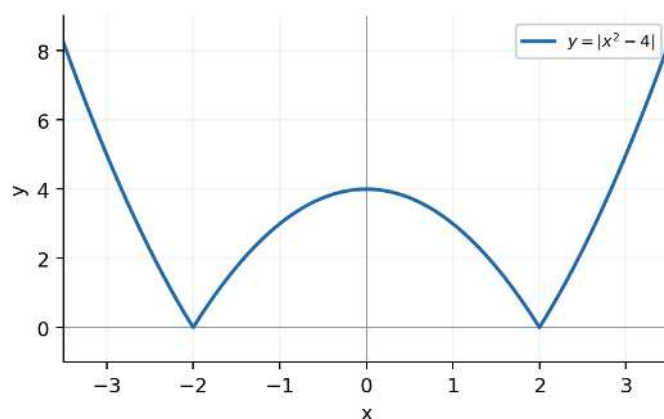
Задание 27. Графики отражены относительно $y=x$.

Задание 28

Найдите область значений функции.

$$y = |x^2 - 4|$$

Модуль неотрицателен, и ноль достигается при $x = \pm 2$. Для любого $y \geq 0$ берём $x = \sqrt{y+4}$: тогда $|x^2 - 4| = y$. Доказана достижимость всего луча. **Ответ.** $[0; +\infty)$.



Задание 28. Минимум 0 и неограниченные сверху ветви дают образ $[0; +\infty)$.

Задание 29

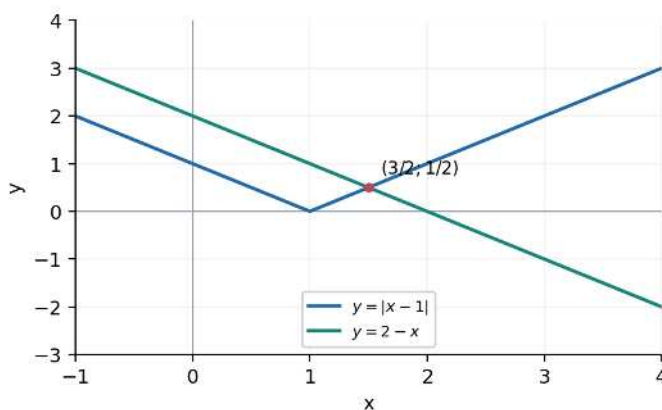
Сколько различных решений имеет уравнение $|x - 1| = 2 - x$? Найдите их.

Правая часть должна быть неотрицательной: $x \leq 2$.

При $x < 1$ равенство превращается в $1 - x = 2 - x$, что невозможно. При $1 \leq x \leq 2$ имеем $x - 1 = 2 - x$, откуда $x = \frac{3}{2}$.

Значение принадлежит ветви, обе части равны $\frac{1}{2}$. Разбиение покрывает всю ОДЗ.

Ответ. Одно решение: $x = \frac{3}{2}$.



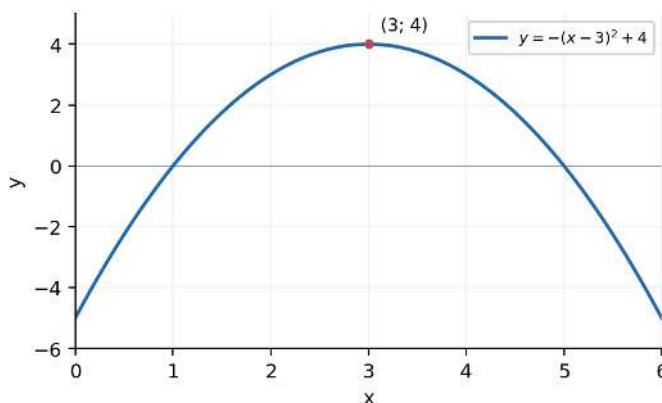
Задание 29. Одна общая точка при $x = 3/2$.

Задание 30

Найдите наибольшее значение функции.

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

Выделим квадрат: $-x^2 + 6x - 5 = 4 - (x - 3)^2 \leq 4$. При $x = 3$ квадрат равен нулю, поэтому верхняя граница достигается. **Ответ.** Наибольшее значение 4.



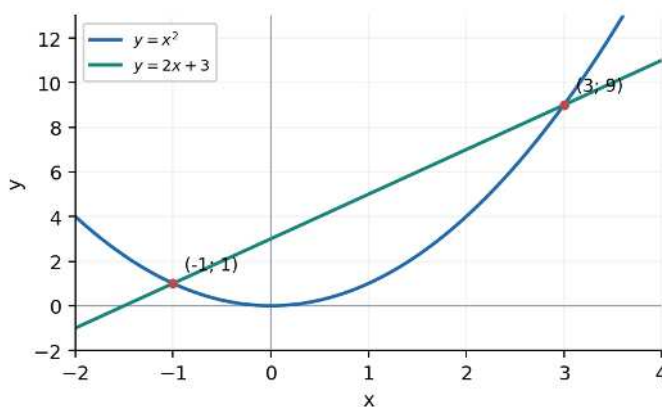
Задание 30. Наибольшее значение 4 достигается при $x = 3$.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34**Задание 31**

Найдите абсциссы точек пересечения графиков.

$$y = x^2, \quad y = 2x + 3$$

Равенство ординат $x^2 = 2x + 3$ равносильно $(x - 3)(x + 1) = 0$. Следовательно, $x = -1$ или $x = 3$. Подстановка даёт точки $(-1; 1)$ и $(3; 9)$. Эти два корня исчерпывают квадратное уравнение. **Ответ.** $-1; 3$.



Задание 31. Пересечения $(-1; 1)$ и $(3; 9)$.

Задание 32

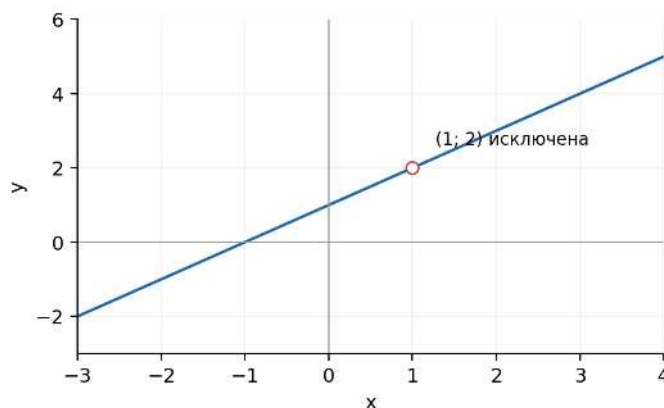
Для функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ найдите область определения, область значений, нуль и обратную функцию. Объясните, почему нельзя восстановить исключённую точку сокращением.

Шаг 1. В исходной формуле $x \neq 1$. На этой области сокращение даёт $f(x) = x + 1$.

Шаг 2. График - прямая с выколотой точкой (1;2). Значение 2 потребовало бы $x = 1$ и потому не достигается. Других ограничений нет.

Шаг 3. Нуль соответствует $x + 1 = 0$, то есть $x = -1$, допустимому значению. Функция взаимно однозначна между $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ и $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ответ. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; нуль -1 ; $f^{-1}(x) = x - 1$ при $x \neq 2$.



Задание 32. Прямая с выколотой точкой; соответствующее значение $y=2$ тоже исключено.

Задание 33

Для каждого действительного a определите число различных корней уравнения

$$|x^2 - 4x + 3| = a.$$

Найдите все значения a , при которых уравнение имеет ровно четыре различных корня.

Шаг 1. Выделим полный квадрат:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

Левая часть модуля принимает значения от -1 до $+\infty$.

Шаг 2. При $a < 0$ решений нет. При $a = 0$ получаем $(x - 2)^2 = 1$, то есть два корня: $x = 1$ и $x = 3$.

Шаг 3. Пусть $0 < a < 1$. Уравнение распадается на две системы:

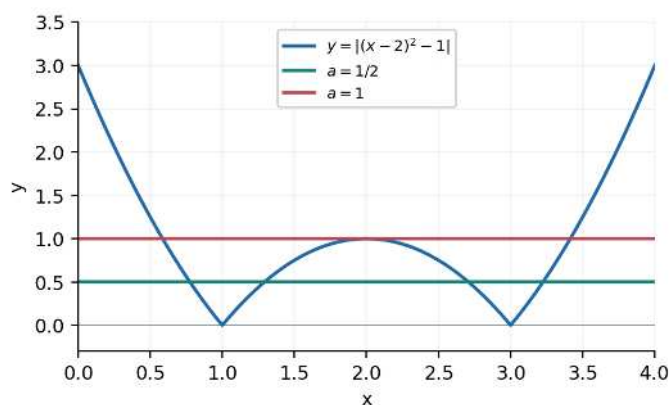
$$(x - 2)^2 = 1 + a, \quad (x - 2)^2 = 1 - a.$$

Обе правые части положительны. Каждое равенство даёт по два корня, причём наборы не пересекаются. Всего четыре корня.

Шаг 4. При $a = 1$ первое равенство даёт два корня, а второе - единственный корень $x = 2$, итого три. При $a > 1$ второе равенство невозможно, а первое даёт два корня.

Проверка и полнота. Рассмотрены все взаимно исключающие случаи относительно критических значений 0 и 1.

Ответ. Число корней: 0 при $a < 0$; 2 при $a = 0$ и $a > 1$; 4 при $0 < a < 1$; 3 при $a = 1$.
Ровно четыре корня при $a \in (0; 1)$.



Задание 33. При $0 < a < 1$ четыре пересечения, при $a = 1$ три.

Задание 34

Найдите все действительные значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1} = a$$

имеет ровно один действительный корень.

Шаг 1. Знаменатель $x^2 + 1$ положителен при любом x , поэтому ограничений и посторонних корней не возникает. После умножения получаем

$$(1 - a)x^2 + 2x + (5 - a) = 0.$$

Шаг 2. Отдельно проверим вырожденный случай $a = 1$. Тогда квадратный член исчезает и остаётся $2x + 4 = 0$. Получаем единственный корень $x = -2$.

Шаг 3. При $a \neq 1$ уравнение квадратное. Ровно один действительный корень существует тогда и только тогда, когда дискриминант равен нулю:

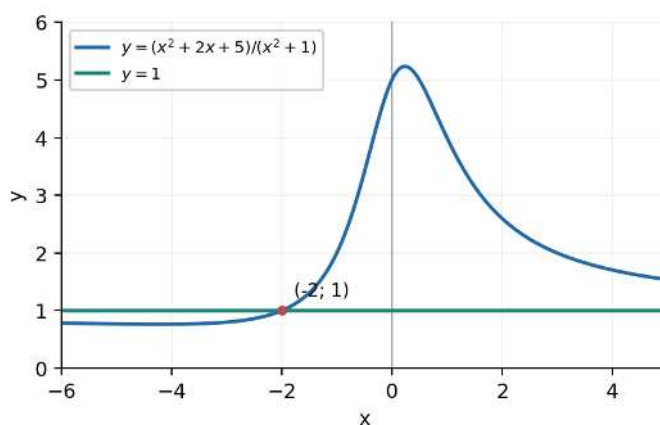
$$D = 4 - 4(1 - a)(5 - a) = 4(-a^2 + 6a - 4) = 0.$$

Отсюда

$$a^2 - 6a + 4 = 0, \quad a = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Проверка и полнота. Значения $3 \pm \sqrt{5}$ не равны 1, поэтому действительно относятся к квадратному случаю. Случай $a = 1$ проверен отдельно.

Ответ. $a \in \{1; 3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}\}$.



Задание 34. Уровень $a=1$ имеет один прообраз $x=-2$; критические уровни $3 \pm \sqrt{5}$.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40

Задание 35

Для каждого действительного a определите число различных корней уравнения

$$|(x-2)^2 - 1| = a|x-2| + 1.$$

Шаг 1. Положим $t = |x-2| \geq 0$. Положительное t даёт два значения $x = 2 \pm t$, а $t = 0$ - одно.

Шаг 2. При $0 \leq t \leq 1$ получаем $1 - t^2 = at + 1$, то есть $t(t+a) = 0$. Корень $t = 0$ есть всегда; дополнительный $t = -a$ допустим при $-1 \leq a \leq 0$.

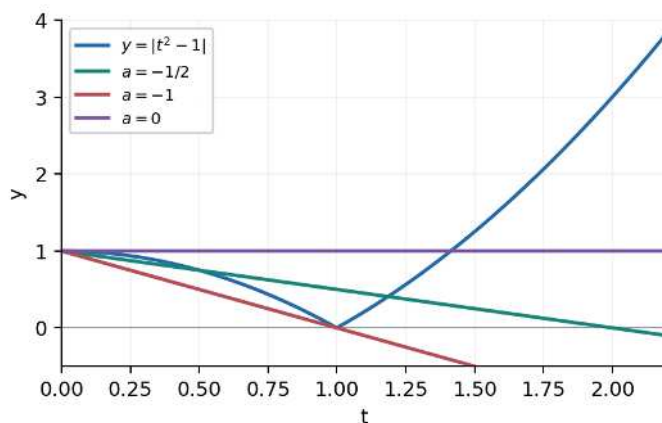
Шаг 3. При $t \geq 1$ имеем $t^2 - at - 2 = 0$. По Виету корни разных знаков. Положительный корень

$$t_+ = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8}}{2}$$

удовлетворяет $t_+ \geq 1$ ровно при $a \geq -1$: значение многочлена в 1 равно $-a - 1$, а 1 лежит между отрицательным и положительным корнями тогда и только тогда, когда это значение неположительно.

Шаг 4. При $a = -1$ две ветви дают один и тот же $t = 1$. При $a = 0$ корень $t = -a$ совпадает с нулём. При $-1 < a < 0$ два положительных значения t различны: одно меньше 1, другое больше.

Ответ. Один корень при $a < -1$; три при $a = -1$ и при $a \geq 0$; пять при $-1 < a < 0$. Разбиение двух ветвей исчерпывает все $t \geq 0$.



Задание 35. $t \geq 0$: при $a = -1/2$ два положительных пересечения и $t = 0$.

Задание 36

Для действительного a найдите область значений функции

$$f_a(x) = \frac{x^2 + 2ax + 3}{x^2 + 1}.$$

При каких a длина промежутка значений равна 4?

Шаг 1. Знаменатель положителен. Значение y достигается тогда и только тогда, когда уравнение

$$(y - 1)x^2 - 2ax + y - 3 = 0$$

имеет действительный корень.

Шаг 2. При $y \neq 1$ требуется $D \geq 0$:

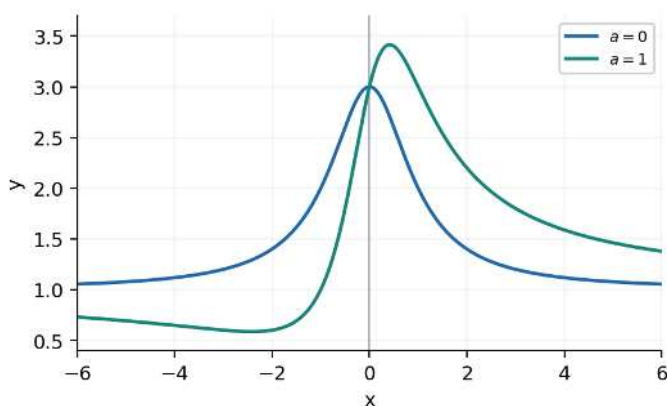
$$D = 4a^2 - 4(y - 1)(y - 3), \quad (y - 2)^2 \leq a^2 + 1.$$

Если $a \neq 0$, при $y = 1$ остаётся $-2ax - 2 = 0$ с корнем $x = -\frac{1}{a}$. Поэтому весь полученный замкнутый промежуток достигается; его концы соответствуют двойному корню.

Шаг 3. При $a = 0$ значение $y = 1$ даёт противоречие $-2 = 0$. Непосредственно $f_0(x) = 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$, откуда $E(f_0) = (1; 3]$.

Шаг 4. Длина в обоих случаях равна $2\sqrt{a^2 + 1}$. Условие длины 4 даёт $a^2 = 3$.

Ответ. При $a = 0$: $(1; 3]$; при $a \neq 0$: $[2 - \sqrt{a^2 + 1}; 2 + \sqrt{a^2 + 1}]$. Длина 4 при $a = \pm\sqrt{3}$.



Задание 36. При $a=0$ нижняя граница 1 не достигается; при $a \neq 0$ обе границы достигаются.

Задание 37

Для каждого действительного a определите число различных корней уравнения $x^2 + 1 = a|x - 1|$.

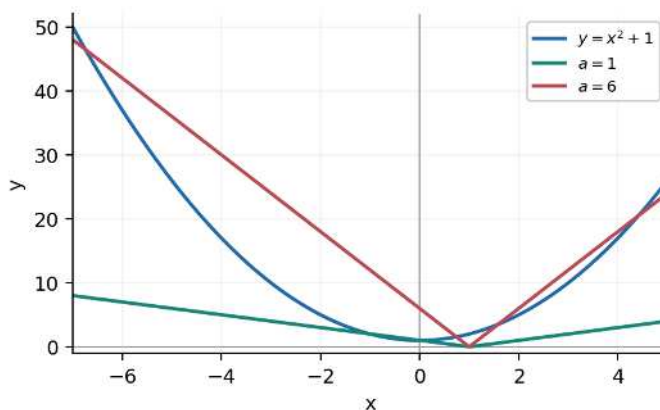
Шаг 1. При $a \leq 0$ равенство невозможно: слева положительное число, справа неположительное. Точка $x = 1$ никогда не является корнем.

Шаг 2. При $a > 0$ на ветви $x < 1$ получаем $x^2 + ax + 1 - a = 0$. Дискриминант $D_1 = a^2 + 4a - 4$ неотрицателен при $a \geq \alpha = 2(\sqrt{2} - 1)$. Вершина $-\frac{a}{2} < 1$, значение в 1 равно $2 > 0$, поэтому оба корня, когда они существуют, меньше 1.

Шаг 3. На ветви $x > 1$ имеем $x^2 - ax + a + 1 = 0$; $D_2 = a^2 - 4a - 4 \geq 0$ при $a \geq \beta = 2 + 2\sqrt{2}$. Вершина $\frac{a}{2} > 1$, значение в 1 равно $2 > 0$, значит оба корня больше 1.

Шаг 4. При нулевом дискриминанте соответствующая ветвь даёт один корень, при положительном - два. Ветви не пересекаются.

Ответ. 0 корней при $a < \alpha$; 1 при $a = \alpha$; 2 при $\alpha < a < \beta$; 3 при $a = \beta$; 4 при $a > \beta$.



Задание 37. При $a=6$ видны четыре пересечения на двух ветвях модуля.

Задание 38

На $(0; +\infty)$ задана функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Для каждого действительного a определите число решений $f(f(x)) = a$. Решите уравнение при $a = \frac{10}{3}$.

Шаг 1. При $x > 0$ имеем $x + \frac{1}{x} \geq 2$, поскольку $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$. Равенство только при $x = 1$; каждое значение $t > 2$ имеет два положительных прообраза по уравнению $x^2 - tx + 1 = 0$.

Шаг 2. На $t \geq 2$ внешняя функция строго возрастает. Действительно, при $2 \leq u < v$:

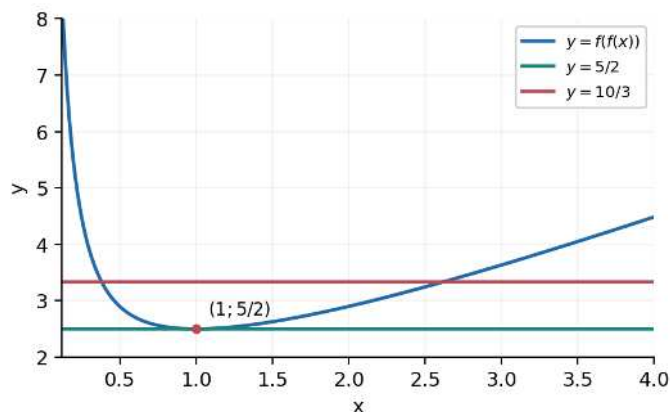
$$f(v) - f(u) = (v - u) \left(1 - \frac{1}{uv}\right) > 0.$$

Её значения составляют $[\frac{5}{2}; +\infty)$. Поэтому при $a < \frac{5}{2}$ решений нет, при равенстве есть только $x = 1$, а при $a > \frac{5}{2}$ единственное промежуточное $t > 2$ даёт два значения x .

Шаг 3. При $a = \frac{10}{3}$ уравнение $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$ даёт $t = 3$ или $t = \frac{1}{3}$. Второй корень не входит в образ внутренней функции. Из $x^2 - 3x + 1 = 0$ получаем два допустимых корня.

Ответ. 0, 1, 2 решения соответственно при $a < \frac{5}{2}$, $a = \frac{5}{2}$, $a > \frac{5}{2}$. При $a = \frac{10}{3}$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$



Задание 38. Минимальный уровень $5/2$ достигается только при $x=1$.

Задание 39

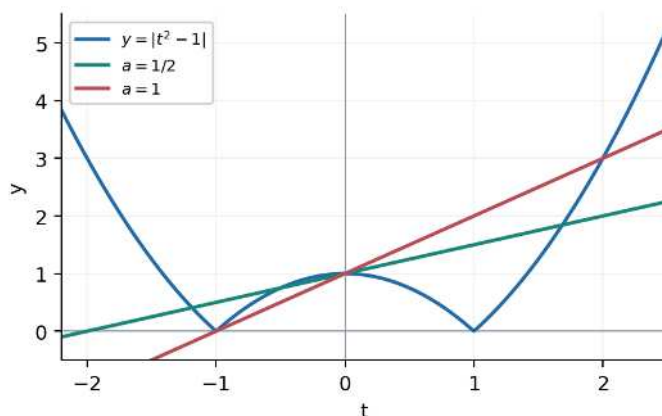
Для каждого действительного a определите число различных корней уравнения $|(x-2)^2 - 1| = a(x-2) + 1$.

Шаг 1. Замена $t = x - 2$ взаимно однозначна. При $|t| \leq 1$ уравнение $1 - t^2 = at + 1$ даёт $t = 0$ и $t = -a$. Второй корень допустим при $|a| \leq 1$, совпадает с первым при $a = 0$.

Шаг 2. На $|t| \geq 1$ получаем $t^2 - at - 2 = 0$. Корни разных знаков. Положительный корень принадлежит $[1; +\infty)$ ровно при $a \geq -1$, поскольку значение многочлена в 1 равно $-1 - a$. Отрицательный корень принадлежит $(-\infty; -1]$ ровно при $a \leq 1$, поскольку значение в -1 равно $a - 1$.

Шаг 3. При $a = \pm 1$ внутренний корень совпадает с одним из внешних; считать его дважды нельзя. При $a = 0$ внутренние корни совпадают между собой, внешние различны.

Ответ. Два корня при $|a| > 1$; три при $a \in \{-1; 0; 1\}$; четыре при $0 < |a| < 1$. Все три части прямой исследованы, совпадения на границах учтены.



Задание 39. При $a=1/2$ четыре пересечения; при $a=1$ один корень совпадает на границе ветвей.

Задание 40

Пусть $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Для каждого действительного a определите число различных корней уравнения $f(f(x)) = a$.

Шаг 1. $f(x) = (x - 2)^2 - 1$, поэтому

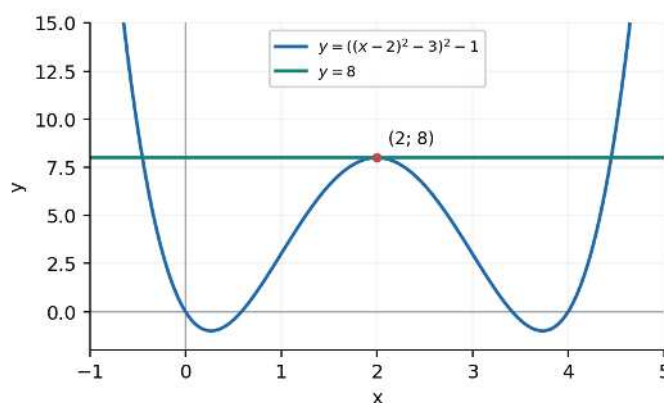
$$f(f(x)) = ((x - 2)^2 - 1)^2 - 1.$$

Положим $u = (x - 2)^2 \geq 0$. Тогда $(u - 1)^2 = a + 1$.

Шаг 2. При $a < -1$ корней нет. При $a \geq -1$ получаем $u = 1 \pm \sqrt{a + 1}$. Каждое положительное u даёт два корня $x = 2 \pm \sqrt{u}$, нулевое - один, отрицательное - ни одного.

Шаг 3. При $a = -1$ оба значения u совпадают и равны 3. При $-1 < a < 8$ они различны и положительны. При $a = 8$ значения u равны 0 и 6. При $a > 8$ допустимо только значение со знаком плюс.

Ответ. 0 корней при $a < -1$; 2 при $a = -1$; 4 при $-1 < a < 8$; 3 при $a = 8$; 2 при $a > 8$. Замена и подсчёт прообразов обеспечивают полноту ответа.



Задание 40. Уровень 8 даёт три корня: 2 и $2 \pm \sqrt{6}$.

Задание 16 основано на варианте задания 11 официальной демоверсии ФИПИ ЕГЭ-2026. Остальные задания - авторские учебные материалы курса.