

Урок 7. Ответы и решения

Условия, ответы и пошаговые решения всех 40 заданий.

01. Начальный уровень - задания 1-20

Задание 1. Начальный. Равные основания

Решите уравнение.

$$2^x = 8$$

$$8 = 2^3$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Задание 2. Начальный. Отрицательный показатель

Решите уравнение.

$$3^x = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9} = 3^{-2}$$

$$x = -2$$

Ответ: $x = -2$

Задание 3. Начальный. Степень десяти

Решите уравнение.

$$10^x = 0,001$$

$$0,001 = 10^{-3}$$

$$x = -3$$

Ответ: $x = -3$

Задание 4. Начальный. Сдвиг показателя

Решите уравнение.

$$5^{x-1} = 25$$

$$25 = 5^2$$

$$x - 1 = 2$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Задание 5. Начальный. Коэффициент в показателе

Решите уравнение.

$$2^{2x} = 16$$

$$16 = 2^4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$

Задание 6. Начальный. Замена основания

Решите уравнение.

$$4^x = 2^6$$

$$4^x = 2^{2x}$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Задание 7. Начальный. Рациональный показатель

Решите уравнение.

$$9^x = 3$$

$$9^x = 3^{2x}$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$

Задание 8. Начальный. Смысл равных оснований

Закончите правило: если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^u = a^v$, то ...

Показательная функция при допустимом основании принимает каждое положительное значение один раз.

Ответ: $u = v$

Задание 9. Начальный. Переход к степени

Решите уравнение.

$$\log_2 x = 4$$

$$x = 2^4$$

$$x = 16$$

Ответ: $x = 16$

Задание 10. Начальный. Десятичный логарифм

Решите уравнение.

$$\log_{10} x = -2$$

$$x = 10^{-2}$$

$$x = 0,01$$

Ответ: $x = 0,01$

Задание 11. Начальный. Логарифм по основанию 3

Решите уравнение.

$$\log_3 x = 2$$

$$x = 3^2$$

$$x = 9$$

Ответ: $x = 9$

Задание 12. Начальный. Линейный аргумент

Решите уравнение.

$$\log_5(x - 1) = 1$$

$$x - 1 > 0$$

$$x - 1 = 5$$

$$x = 6$$

Ответ: $x = 6$

Задание 13. Начальный. Аргумент $2x$

Решите уравнение.

$$\log_2(2x) = 3$$

$$x > 0$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Ответ: $x = 4$

Задание 14. Начальный. Сдвиг аргумента

Решите уравнение.

$$\log_4(x + 3) = 2$$

$$x > -3$$

$$x + 3 = 16$$

$$x = 13$$

Ответ: $x = 13$ **Задание 15. Начальный. Логарифм единицы**

Решите уравнение.

$$\log_7 x = 0$$

$$x = 7^0 = 1$$

Ответ: $x = 1$ **Задание 16. Начальный. Область определения**

Запишите область допустимых значений выражения.

$$\log_3(x - 5)$$

$$x - 5 > 0$$

$$x > 5$$

Ответ: $x > 5$ **Задание 17. Начальный. Сдвиг в показателе**

Решите уравнение.

$$2^{x+1} = 16$$

$$16 = 2^4$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Задание 18. Начальный. Положительность аргумента

Закончите правило: аргумент логарифма должен быть ...

Логарифм нуля и отрицательного числа в действительных числах не определён.

Ответ: строго положительным

Задание 19. Начальный. Квадратное уравнение

Решите уравнение.

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Ответ: $x = \pm 3$

Задание 20. Начальный. Иррациональное уравнение

Решите уравнение.

$$\sqrt{x + 4} = 3$$

$$x + 4 = 9$$

$$x = 5$$

Ответ: $x = 5$

02. Средний уровень - задания 21-35

Задание 21. Средний. Сдвиг показателя

Решите уравнение.

$$2^{x+1} = 32$$

$$32 = 2^5$$

$$x + 1 = 5$$

$$x = 4$$

Ответ: $x = 4$

Задание 22. Средний. Линейный показатель

Решите уравнение.

$$3^{2x-1} = 27$$

$$27 = 3^3$$

$$2x - 1 = 3$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$ **Задание 23. Средний. Вынесение общей степени**

Решите уравнение.

$$5^x + 5^x = 50$$

$$2 \cdot 5^x = 50$$

$$5^x = 25 = 5^2$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$ **Задание 24. Средний. Замена переменной**

Решите уравнение.

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$t = 2^x > 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t = 1 \text{ или } t = 4$$

$$x = 0 \text{ или } x = 2$$

Ответ: $x \in \{0; 2\}$

Задание 25. Средний. Замена переменной

Решите уравнение.

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$t = 3^x > 0$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t = 1 \text{ или } t = 9$$

$$x = 0 \text{ или } x = 2$$

Ответ: $x \in \{0; 2\}$ **Задание 26. Средний. Логарифмическое уравнение**

Решите уравнение.

$$\log_2(x - 1) = 3$$

$$x > 1$$

$$x - 1 = 8$$

$$x = 9$$

Ответ: $x = 9$ **Задание 27. Средний. Линейный аргумент**

Решите уравнение.

$$\log_3(2x + 1) = 2$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

$$2x + 1 = 9$$

$$x = 4$$

Ответ: $x = 4$

Задание 28. Средний. Сумма логарифмов

Решите уравнение.

$$\log_2 x + \log_2 4 = 5$$

$$x > 0$$

$$\log_2(4x) = 5$$

$$4x = 32$$

$$x = 8$$

Ответ: $x = 8$ **Задание 29. Средний. Произведение аргументов**

Решите уравнение.

$$\log_5(x-1) + \log_5(x+1) = 1$$

$$x > 1$$

$$(x-1)(x+1) = 5$$

$$x^2 = 6$$

По ОДЗ подходит только $\sqrt{6}$.**Ответ:** $x = \sqrt{6}$ **Задание 30. Средний. Разность логарифмов**

Решите уравнение.

$$\log_2(x+2) - \log_2 x = 1$$

$$x > 0$$

$$\frac{x+2}{x} = 2$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$

Задание 31. Средний. Логарифм квадрата

Решите уравнение.

$$\log_3(x^2) = 2$$

$$x \neq 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Ответ: $x = \pm 3$ **Задание 32. Средний. Равенство логарифмов**

Решите уравнение.

$$\log_2(x - 1) = \log_2(7 - x)$$

$$1 < x < 7$$

$$x - 1 = 7 - x$$

$$x = 4$$

Ответ: $x = 4$ **Задание 33. Средний. Модуль**

Решите уравнение.

$$|x - 3| = 5$$

$$x - 3 = \pm 5$$

$$x = -2 \text{ или } x = 8$$

Ответ: $x \in \{-2; 8\}$

Задание 34. Средний. Разложение

Разложите на множители.

$$x^2 - 5x + 6$$

Нужны числа с произведением 6 и суммой -5 : это -2 и -3 .

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Ответ: $(x - 2)(x - 3)$

Задание 35. Средний. Смешанное вычисление

Вычислите.

$$\log_2 8 + \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Ответ: $\frac{7}{2}$

03. Сложный уровень - задания 36-40**Задание 36. Повышенный. Замена основания**

Решите уравнение с помощью замены переменной.

$$9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$$

Введём замену $t = 3^x > 0$. Тогда $9^x = t^2$.

$$t^2 - 12t + 27 = (t - 3)(t - 9) = 0$$

Получаем $t = 3$ или $t = 9$. Оба значения положительны. Возвращаемся к исходной переменной: $3^x = 3$ даёт $x = 1$, а $3^x = 9$ даёт $x = 2$.

Проверка: при $x = 1$ получаем $9 - 36 + 27 = 0$; при $x = 2$ получаем $81 - 108 + 27 = 0$.

Ответ: $x = 1; 2$.

Задание 37. Повышенный. Степень и обратная степень

Решите уравнение.

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

$$t = 2^x > 0$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t = 2 \text{ или } t = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \text{ или } x = -1$$

Ответ: $x = \pm 1$ **Задание 38. Повышенный. Сумма логарифмов**

Решите уравнение.

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$$

$$x > 3$$

$$(x-1)(x-3) = 8$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = 5 \text{ или } x = -1$$

По ОДЗ подходит 5.

Ответ: $x = 5$

Задание 39. Повышенный. Логарифм в правой части

Решите уравнение.

$$\log_3(x+1) = 2 - \log_3(x-1)$$

$$x > 1$$

$$\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 2$$

$$x^2 - 1 = 9$$

По ОДЗ подходит $\sqrt{10}$.

Ответ: $x = \sqrt{10}$

Задание 40. Повышенный. Квадратный аргумент

Решите уравнение.

$$\log_2(x^2 - 5x + 6) = 1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

В обоих случаях исходный аргумент равен 2, поэтому оба корня допустимы.

Ответ: $x \in \{1; 4\}$