



Вычислительный фундамент: числа, дроби и проценты

Теория и разобранные примеры

Вычислительный фундамент — это действия с положительными и отрицательными числами, дробями, степенями и процентами. Эти навыки нужны при подготовке к профильному ЕГЭ: ошибка в знаке или запятой может испортить решение даже при правильно выбранном способе.

В первом уроке собраны правила с объяснениями, семь подробных разборов и дополнительные примеры. Материал рассчитан на начальный уровень. На отдельной странице — 40 заданий двух уровней с ответами и решениями.

Отрицательные числа и модуль

Как сравнивать числа

На числовой прямой большее число находится правее меньшего. Любое положительное число больше нуля, а любое отрицательное — меньше нуля. Среди отрицательных чисел больше то, которое ближе к нулю: например, $-2 > -5$.

Определение

Модуль числа — расстояние от соответствующей точки числовой прямой до нуля. Он не бывает отрицательным: $|5| = 5$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$. У противоположных чисел одинаковые модули, а их сумма равна нулю.

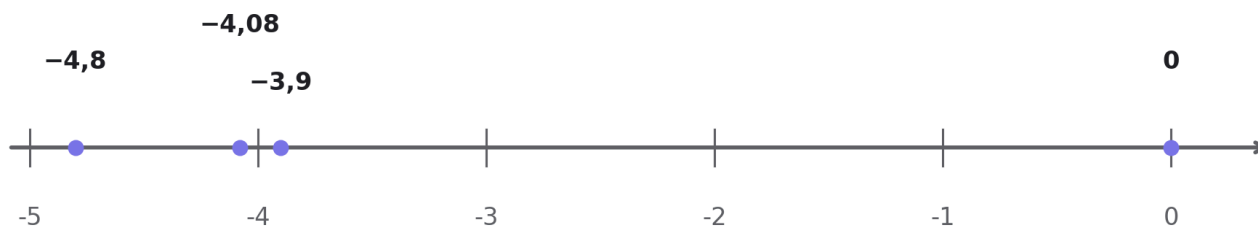
Чтобы сравнить десятичные дроби, удобно дописать нули справа после запятой. Значение числа при этом не меняется: $4,8 = 4,80$. Но для отрицательных чисел порядок обратный: из $4,80 > 4,08$ следует $-4,80 < -4,08$.

Разбор 1. Отрицательные числа на числовой прямой

Уровень: база.

Расположите числа в порядке возрастания:

$$-4,8; \quad -4,08; \quad -3,9; \quad 0.$$

Числовая прямая с точками $-4,8$, $-4,08$, $-3,9$ и 0

Все отрицательные числа меньше нуля. Первым должно стоять самое далёкое от нуля отрицательное число.

1. Выравниваем десятичные записи: $-4,8 = -4,80$. Ноль справа после запятой не меняет значение числа.
2. Сравниваем числа около -4 . Число $-4,80$ дальше от нуля, поэтому $-4,80 < -4,08$.
3. Добавляем $-3,9$ и 0 : число $-3,9$ ближе к нулю, чем оба предыдущих, а ноль больше любого из них.

$$-4,80 < -4,08 < -3,9 < 0.$$

Ответ: $-4,8$; $-4,08$; $-3,9$; 0 .

Проверка: в полученной цепочке каждое следующее число расположено правее предыдущего.

Типичная ошибка — сравнивать только цифры после запятой и забывать, что числа отрицательные.

Как выполнять действия с отрицательными числами

Правило сложения

При сложении чисел одного знака складывают их модули и сохраняют общий знак. При сложении чисел разных знаков из большего модуля вычитают меньший и ставят знак числа с большим модулем.

$$-7 + (-5) = -12, \quad -7 + 5 = -2, \quad -5 + 7 = 2.$$

Вычитание числа можно заменить прибавлением противоположного: $a - b = a + (-b)$. Поэтому $8 - (-3) = 8 + 3 = 11$. При раскрытии скобок после минуса знак каждого слагаемого внутри меняется: $-(a - b) = -a + b$.

При умножении и делении двух ненулевых чисел одинаковые знаки дают плюс, разные — минус. Это правило относится к **умножению и делению**, а не ко всем действиям с двумя минусами: $(-3) + (-2) = -5$, но $(-3) \cdot (-2) = 6$.

На ноль делить нельзя. Если делитель не равен нулю, то ноль, разделённый на этот делитель, равен нулю.



Степени и порядок действий

Основание степени и знак минус

Степень числа

Степень a^n с натуральным показателем n — произведение n множителей, каждый из которых равен a . Число a называется основанием, n — показателем степени. Например, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Если отрицательное основание заключено в скобки, в степень возводится всё число. Чётная степень отрицательного числа положительна, нечётная отрицательна:

$$(-3)^2 = 9, \quad (-3)^3 = -27.$$

В записи без скобок минус перед степенью не входит в основание:

$$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9, \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9.$$

Для ненулевого a выполняется $a^0 = 1$. При умножении степеней с одинаковым основанием показатели складывают, при делении — вычитают. В формуле деления основание должно быть ненулевым:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0).$$

Например, $10^5 : 10^2 = 10^3$. Умножение десятичного числа на 10, 100, 1000 переносит запятую вправо на один, два, три разряда; деление — влево.

Разбор 2. Минус перед степенью и отрицательное основание

Уровень: база.

Вычислите:

$$-3^2 + (-3)^2 - 2 \cdot (-4).$$

Первые два слагаемых взаимно уничтожатся, а последнее будет положительным.

1. Вычисляем степень без скобок: $-3^2 = -(3^2) = -9$. Минус не входит в основание.
2. Вычисляем степень со скобками: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$.
3. Определяем знак последнего слагаемого: $-2 \cdot (-4) = 8$.
4. Складываем: $-9 + 9 + 8 = 8$.

Ответ: 8.

Если получился отрицательный результат, потерял знак: первые два слагаемых дают ноль, остаётся положительное число 8.

В каком порядке выполнять действия

Сначала выполняют действия в скобках. Внутри скобок соблюдают тот же порядок, что и во всём выражении: степени, затем умножение и деление, затем сложение и вычитание. При нескольких уровнях скобок начинают с внутренних.

**Важно запомнить**

Действия одной ступени выполняют слева направо. Умножение не имеет преимущества перед делением: $24:6 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$. Сложение не имеет преимущества перед вычитанием: $10 - 3 + 2 = 7 + 2 = 9$.

Дробная черта заменяет деление и группирует весь числитель и весь знаменатель. Например, в $\frac{12-4}{2+2}$ отдельно получают числитель 8 и знаменатель 4, затем делят: результат равен 2.

Разбор 3. Порядок действий в многошаговом выражении**Уровень: основной.**

Вычислите:

$$36 - 4 \cdot (7 - 10) + \frac{18}{3^2}.$$

В скобках получится отрицательное число. Значит, вычитание произведения увеличит исходное число 36.

1. Выполняем действие в скобках и возводим в степень: $7 - 10 = -3$, $3^2 = 9$.
2. Выполняем умножение и деление: $4 \cdot (-3) = -12$, $18:9 = 2$.
3. Подставляем результаты. Вычитание отрицательного числа заменяем сложением:

$$36 - (-12) + 2 = 36 + 12 + 2 = 50.$$

Ответ: 50.

Проверка: к 36 прибавились 12 и 2, поэтому результат больше 36. Начинать с действия $36 - 4$ здесь нельзя.

Удобный счёт и признаки делимости**Распределительное свойство**

Одно и то же выражение иногда можно вычислить несколькими способами. Распределительное свойство позволяет заменить два умножения одним:

$$ab + ac = a(b + c), \quad ab - ac = a(b - c).$$

Общий множитель должен входить в каждое слагаемое. Например, $17 \cdot 8 + 17 \cdot 2 = 17(8 + 2) = 170$. Проверить преобразование можно раскрытием скобок.

Разбор 4. Рациональный счёт через вынесение общего множителя**Уровень: основной.**

Вычислите без длинного умножения:

$$48 \cdot 219 - 48 \cdot 19.$$

Разность $219 - 19$ — круглое число, поэтому удобно сначала вынести общий множитель 48.



1. Преобразуем выражение: $48 \cdot 219 - 48 \cdot 19 = 48(219 - 19)$.
2. Вычисляем разность в скобках: $219 - 19 = 200$.
3. Умножаем: $48 \cdot 200 = 9600$.

Ответ: 9600.

Прикидка: отдельные произведения близки к 10 500 и 900, их разность — к 9600. Два длинных умножения тоже дадут правильный ответ, но потребуют больше действий.

Как проверить делимость числа

Признаки делимости позволяют определить, делится ли целое число без остатка, не выполняя деление.

Делитель	Признак	Пример
2	Последняя цифра — 0, 2, 4, 6 или 8	348 делится на 2
3	Сумма цифр делится на 3	Для 372 сумма равна 12
5	Последняя цифра — 0 или 5	735 делится на 5
9	Сумма цифр делится на 9	Для 738 сумма равна 18
10	Последняя цифра — 0	420 делится на 10

Если в записи числа пропущена цифра, её обозначают буквой и применяют нужный признак. Например, число $52x1$ делится на 9, когда $5 + 2 + x + 1 = 8 + x$ кратно 9. Для цифры x от 0 до 9 подходит только $x = 1$.

Обыкновенные и десятичные дроби

Что означает дробь и как её сокращать

В дроби $\frac{a}{b}$ числитель a делится на знаменатель b , причём $b \neq 0$. Числитель показывает, сколько долей взято, а положительный знаменатель — на сколько равных долей разделено целое. Например, $\frac{3}{4}$ означает три четверти.

Если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же ненулевое число, значение дроби не изменится. При сокращении делят на общий множитель: $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, потому что оба числа разделили на 6.

Как избежать ошибки

Сокращают множители, а не отдельные слагаемые. В дроби $\frac{6+4}{2}$ нужно разделить на 2 весь числитель: $\frac{6}{2} + \frac{4}{2} = 5$. Убрать двойку только из одного слагаемого нельзя.



Сложение, вычитание, умножение и деление дробей

Сложение и вычитание

При сложении и вычитании дроби приводят к общему знаменателю. Складывают или вычитают числители, а знаменатель сохраняют. Например, для знаменателей 3 и 4 удобно выбрать 12:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}.$$

Сумма $\frac{2+1}{3+4}$ была бы неверной: знаменатели обозначают размеры долей, поэтому сначала нужно перейти к одинаковым долям.

При умножении дробей перемножают числители и знаменатели. Сокращать общие множители удобно до умножения:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3 \cdot 10}{5 \cdot 9} = \frac{2}{3}.$$

При делении на ненулевую дробь умножают на обратную ей дробь. Меняют местами числитель и знаменатель **делителя**, первая дробь остаётся прежней:

$$\frac{4}{7} : \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{7}.$$

Смешанные числа и переход к десятичной записи

Переход к дроби

Смешанное число состоит из целой и дробной частей: $2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$. Чтобы получить неправильную дробь, целую часть умножают на знаменатель, прибавляют числитель и сохраняют знаменатель:

$$2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5} = 2,6.$$

Полезные равенства: $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{1}{5} = 0,2$, $\frac{1}{8} = 0,125$. Если дробь превращается в бесконечную десятичную, промежуточное округление может испортить ответ. Например, $\frac{1}{3}$ лучше оставить дробью, если дальше требуется умножение на 3.

Чтобы найти дробь от числа, число умножают на эту дробь. Например, $\frac{2}{5}$ от 30 равно $30 \cdot \frac{2}{5} = 12$. Если часть известна и составляет $\frac{2}{5}$ целого, целое находят делением на $\frac{2}{5}$.

Действия с десятичными дробями

При сложении и вычитании записывают запятую под запятой, совмещая одинаковые разряды. Недостающие разряды можно дополнить нулями: $2,5 - 0,37 = 2,50 - 0,37 = 2,13$.



При умножении сначала перемножают числа без запятых. Затем в результате отделяют справа столько десятичных знаков, сколько их было в обоих множителях вместе:
 $0,12 \cdot 0,3 = 0,036$. Если цифр не хватает, слева дописывают нули.

Правило деления

При делении на десятичную дробь делимое и делитель умножают на одну и ту же степень десяти, чтобы делитель стал целым. Например, $4,2 : 0,06 = 420 : 6 = 70$.
Изменить только делитель нельзя — частное тогда изменится.

Разбор 5. Десятичные дроби без калькулятора

Уровень: основной.

Вычислите:

$$\frac{5,04}{0,12} - 1,6 \cdot 2,5.$$

Первое слагаемое близко к 40, вычитаемое — к 4. Результат ожидается примерно в диапазоне от 36 до 40; это прикидка, а не точное вычисление.

1. Умножаем делимое и делитель на 100:

$$\frac{5,04}{0,12} = \frac{504}{12} = 42.$$

2. Находим произведение. В обоих множителях вместе два знака после запятой:

$$1,6 \cdot 2,5 = \frac{16 \cdot 25}{100} = \frac{400}{100} = 4.$$

3. Вычитаем: $42 - 4 = 38$.

Ответ: 38.

Проверка деления: $0,12 \cdot 42 = 5,04$. Результат согласуется с прикидкой.

Проценты и пропорциональные величины

Процент от числа и число по его проценту

Что считать за 100%

Один процент — одна сотая часть: $1\% = 0,01$. Поэтому $p\% = \frac{p}{100}$. Прежде чем считать проценты, нужно определить, какая величина принята за 100%.

Если исходная величина равна A , то $p\%$ от неё составляют:

$$B = A \cdot \frac{p}{100}.$$



Например, 20% от 350 — это $350 \cdot 0,2 = 70$. Для обратной задачи, когда известна часть B и её процент $p > 0$, нужно разделить:

$$A = \frac{B}{p/100}.$$

Если 70 составляет 20% целого, всё число равно $70 : 0,2 = 350$. Найти ещё 20% от 70 было бы неверно: искомое целое больше своей части.

Скидки, наценки и последовательные изменения

После увеличения положительной величины на $p\%$ остаётся $100 + p$ процентов исходной величины. После уменьшения на $p\%$ — $100 - p$ процентов. Поэтому удобно использовать коэффициенты:

$$A_{\text{нов}} = A \left(1 + \frac{p}{100} \right),$$

$$A_{\text{нов}} = A \left(1 - \frac{p}{100} \right).$$

Например, цена 1800 рублей после скидки 10% равна $1800 \cdot 0,9 = 1620$ рублей. Если известна конечная цена, первоначальную находят делением на коэффициент: $1620 : 0,9 = 1800$.

На что обратить внимание

При нескольких изменениях каждый следующий процент берут **от новой величины**. Снижение на 10% и последующее повышение на 10% не возвращают начальную цену:

$$2000 \cdot 0,9 \cdot 1,1 = 1980.$$

Для обратной задачи конечную величину делят на произведение коэффициентов. Например, если после повышения на 25% и скидки 20% цена стала 2400, то исходная цена равна $2400 : (1,25 \cdot 0,8) = 2400$.

Прямая пропорциональность

Если при увеличении одной величины в несколько раз другая увеличивается во столько же раз, величины прямо пропорциональны. При неизменном рецепте количество муки прямо пропорционально числу порций; при постоянной цене стоимость прямо пропорциональна количеству товара.

Удобно сначала найти величину для одной единицы. Если на 8 порций требуется 240 г продукта, на одну порцию нужно $240 : 8 = 30$ г, а на 14 порций — $30 \cdot 14 = 420$ г.

Можно записать пропорцию $\frac{240}{8} = \frac{x}{14}$. Равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ при ненулевых знаменателях равносильно $ad = bc$. Но применять пропорцию можно только после проверки связи величин: тариф с фиксированной платой за посадку не является прямо пропорциональным всему расстоянию.



Единицы измерения, движение и средние значения

Перевод единиц времени, длины и площади

Перед подстановкой в формулу величины приводят к согласованным единицам. Час содержит 60 минут, метр — 100 сантиметров, килограмм — 1000 граммов.

Перевод	Действие	Пример
Часы в минуты	Умножить на 60	$2,5 \text{ ч} = 150 \text{ мин}$
Минуты в часы	Разделить на 60	$45 \text{ мин} = 0,75 \text{ ч}$
Метры в сантиметры	Умножить на 100	$1,4 \text{ м} = 140 \text{ см}$
Квадратные метры в квадратные сантиметры	Умножить на $100^2 = 10\,000$	$0,3 \text{ м}^2 = 3000 \text{ см}^2$

Время и десятичные дроби

Минуты не являются сотыми долями часа: 1 ч 30 мин — это 1,5 ч, а не 1,30 ч. При переходе через полночь можно отдельно найти время до 00:00 и оставшуюся часть пути. Например, от 23:50 до полуночи 10 минут; поездка длительностью 2 ч 30 мин закончится в 02:20.

Коэффициент перевода площади возводится в квадрат, потому что меняются две длины. Квадрат со стороной 1 м имеет стороны по 100 см и площадь $100 \cdot 100 = 10\,000 \text{ см}^2$.

Расстояние, скорость и время

При постоянной скорости расстояние равно произведению скорости на время:

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t} (t > 0), \quad t = \frac{s}{v} (v > 0).$$

Если скорость выражена в км/ч, время нужно выразить в часах, тогда расстояние получится в километрах.

Разбор 6. Перевод минут в часы в задаче на движение

Уровень: экзамен.

Поезд движется со скоростью 72 км/ч в течение 35 минут. Какое расстояние он пройдёт?

За половину часа поезд прошёл бы 36 км. За 35 минут расстояние должно быть немного больше 36 км и меньше 72 км.

1. Переводим минуты в часы:

$$35 \text{ мин} = \frac{35}{60} \text{ ч} = \frac{7}{12} \text{ ч}.$$

2. Подставляем в формулу: $s = 72 \cdot \frac{7}{12}$.



3. Сокращаем до умножения: $72 \cdot \frac{7}{12} = 6 \cdot 7 = 42$.

Ответ: 42 км.

Проверка: $36 < 42 < 72$. Умножать 72 на 35 без перевода единиц нельзя.

Среднее арифметическое и средняя скорость

Среднее арифметическое нескольких чисел — их сумма, разделённая на количество. Например, для чисел 8, 11, 14 оно равно $(8 + 11 + 14) : 3 = 11$.

Основная формула

Средняя скорость на всём пути — **всё расстояние, разделённое на всё время**:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}.$$

Среднее арифметическое скоростей подходит для двух этапов только при равной продолжительности движения. Если равны расстояния, время на медленном участке больше, и просто сложить скорости и разделить на два нельзя.

Например, первые 120 км автомобиль прошёл со скоростью 60 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 40 км/ч. Время равно $120 : 60 + 120 : 40 = 2 + 3 = 5$ ч. Средняя скорость $240 : 5 = 48$ км/ч, а не 50 км/ч. Если на пути есть остановки и требуется скорость за всё время поездки, время остановок включают в знаменатель.

Масштаб и площадь прямоугольника

Масштаб 1: n означает, что одна единица длины на плане соответствует n таким же единицам в действительности. При масштабе 1: 200 отрезок 6 см соответствует $6 \cdot 200 = 1200$ см, то есть 12 м. Сначала умножают в одинаковых единицах, затем переводят результат.

Площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину: $S = ab$. Стороны должны быть выражены в одинаковых единицах. Если обе стороны даны в метрах, площадь получается в квадратных метрах.

Округление, покупки и тарифы

Обычное округление

При округлении до заданного разряда смотрят на следующую цифру. Если она от 0 до 4, последнюю сохраняемую цифру не меняют. Если от 5 до 9 — увеличивают её на единицу, при необходимости перенося единицу в старший разряд.

Например, $6,284 \approx 6,28$ до сотых, а $6,287 \approx 6,29$. Для 9,996 округление до сотых даёт 10,00. Знак $\approx$ означает приближённое равенство: заменять его знаком точного равенства нельзя.



Разбор 7. Округление по смыслу: упаковки материала

Уровень: экзамен.

Комната имеет размеры 4,7 м × 4,8 м. Одна упаковка ламината покрывает 2,2 м². Сколько целых упаковок нужно купить?

Десять упаковок покрывают 22 м². Площадь комнаты немного больше, поэтому десяти упаковок заведомо не хватит.

1. Находим площадь: $S = 4,7 \cdot 4,8 = 22,56$ м².

2. Находим расчётное число упаковок:

$$\frac{22,56}{2,2} \approx 10,25.$$

3. Купить дробную часть упаковки нельзя, а материала должно хватить. Берём следующее целое число: 11.

Ответ: 11 упаковок.

Проверка: $10 \cdot 2,2 = 22 < 22,56$, но $11 \cdot 2,2 = 24,2 \geq 22,56$.

Когда округлять вверх, а когда вниз

Два разных случая

Направление округления определяется вопросом задачи. Если нужно купить достаточно упаковок, автобусов или коробок, дробный результат округляют вверх. Если считают число полных стаканов, целых изделий или покупок на фиксированную сумму, дробную часть отбрасывают. Точное целое число увеличивать или уменьшать не нужно.

Например, из 2,3 л напитка можно наполнить $2,3 : 0,4 = 5,75$ стакана вместимостью 0,4 л. Полных стаканов будет 5. Чтобы разлить весь напиток, понадобятся 6 таких стаканов, последний будет неполным.

Если материал покупают с запасом, сначала увеличивают требуемое количество на указанный процент, а затем делят на размер упаковки. Промежуточный результат не округляют без необходимости: важное сравнение с целым числом упаковок выполняют по точным данным.

Как учитывать тарифы и искать минимальную стоимость

Стоимость по постоянной цене равна цене единицы, умноженной на количество. Расход по счётчику — разность конечного и начального показаний; плата равна расходу, умноженному на тариф. Сдача — внесённая сумма минус полная стоимость покупки.

Если тариф содержит фиксированную часть, её считают отдельно. Например, первые 2 км стоят 100 рублей, каждый следующий километр — 20 рублей. Для поездки ровно 9 км стоимость равна $100 + (9 - 2) \cdot 20 = 240$ рублей. Первые два километра уже оплачены, учитывать их повторно нельзя.



Если товар продаётся упаковками и поштучно, сравнивают допустимые комбинации. Выгодная цена за одну штуку в упаковке ещё не означает, что нужно брать только упаковки: лишние товары тоже оплачиваются. Для доказательства минимума можно перебрать возможное число упаковок либо показать, почему замена нескольких отдельных товаров упаковкой уменьшает стоимость.

Как проверить вычисление

Проверка должна давать новую информацию. Повторение того же действия тем же способом может сохранить незамеченную ошибку.

Что проверяем	Подходящий способ
Знак и порядок величины	Прикидка до точного вычисления
Деление	Умножение частного на делитель
Процент или исходное число	Подстановка найденной величины в условие
Число упаковок	Проверка, что выбранного количества хватает, а предыдущего — нет
Скорость и время	Согласование единиц и сравнение с реальными ограничениями

Сначала определяют порядок действий или математическую модель, затем оценивают результат и выполняют точное вычисление. В конце проверяют знак, единицы измерения и смысл округления. Для практической задачи полный ответ включает единицу измерения; если требуется краткий числовой ответ, записывают только число.

Вопросы по теме

С чего начать подготовку к профильному ЕГЭ при слабой базе?

С действий с числами: знаков, порядка действий, дробей и процентов. Этот урок даёт вычислительные правила, которые затем используются в уравнениях, функциях и текстовых задачах. По результатам теста можно вернуться к конкретной теме, в которой возникла ошибка.



Это задания базового или профильного ЕГЭ?

Это начальный урок курса подготовки к **профильному ЕГЭ**. Банк состоит из учебных упражнений на вычислительные навыки. Он не является вариантом экзамена: простые практические задачи помогают восстановить основу перед более сложными темами курса.

Можно ли пользоваться калькулятором в этом тесте?

Тест рассчитан на выполнение без калькулятора. Условия, числа и объём вычислений сохранены из исходного комплекта. Ответ и ход решения каждого задания можно раскрыть отдельно на странице теста.

Закрепить тему: [перейти к 40 заданиям с ответами](#)

Практика по теме

Проверьте понимание правил на отдельной странице: [40 заданий с ответами и решениями](#). Начните с первого уровня; к следующему переходите, когда можете объяснить каждый шаг.