



Практикум: первая часть и уравнения

Теория и разобранные примеры

Урок 32. Практикум: первая часть и уравнения. Объяснения с начального уровня, исходные примеры с пошаговыми решениями и отдельный тест для самостоятельной проверки.

Первая часть и полное решение уравнения — два режима записи

В коротком задании достаточно получить и проверить ответ. В задании с развёрнутым решением нужно показать равносильные преобразования, записать все серии корней и выполнить отбор на заданном промежутке. Правильное число без обоснования не заменяет полное решение.

Сначала решить уравнение на всей числовой прямой

Для тригонометрического уравнения сначала найдите общие серии. Например, из $\sin x = 1/2$ получаем $x = \pi/6 + 2\pi n$ или $x = 5\pi/6 + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Лишь после этого накладывается промежуток. Если отбирать знакомые углы сразу по рисунку, легко пропустить корни на отрицательной части оси или на нескольких оборотах.

Если уравнение раскладывается на множители, рассматривайте каждую ветвь. Деление на выражение, которое может быть равно нулю, требует отдельной проверки этого случая. Потерянная ветвь означает потерянные корни.

Отбор через двойное неравенство

Для серии $x = \alpha + Tn$ и промежутка $[A; B]$ запишите $A \leq \alpha + Tn \leq B$. После вычитания α и деления на положительный период T получается промежуток для целого n . Перебираются только целые значения внутри него. Для открытой границы исходная строгость сохраняется.

Как связать короткие задания с развёрнутым

Вычислительные задания первой части проверяют те же базовые навыки: действия с дробями, степени, корни, логарифмы и чтение графика. Ошибка в простом преобразовании переносится в длинное решение. Поэтому перед работой с уравнением отдельно проверяйте значения стандартных углов, знаки функций по четвертям и свойства степеней.

Финальная запись должна содержать: исходное уравнение, используемое преобразование, все общие серии, условие $n \in \mathbb{Z}$, отбор на промежутке и упорядоченный список корней. Совпадающие корни записываются один раз.



Подробные объяснения и разобранные примеры

Карта теории

Замена переменной

В уравнениях со степенями ищите общий базовый множитель: $4^x = (2^x)^2$. При $t = 2^x$ обязательно $t > 0$. После решения квадратного уравнения вернитесь к x .

Тригонометрические корни

Равенство $\sin x = a$ или $\cos x = a$ обычно даёт несколько серий. Сначала перечислите все серии, затем отбирайте корни на отрезке. Деление на выражение с x может потерять его нули.

Сдвиг аргумента

Если $y = x + c$, то отрезок для y получается прибавлением c к обеим границам. Можно отбирать по y и возвращаться к x , либо сразу отбирать серии x — эти способы должны дать один ответ.

Проверка отбора

Для каждой серии подставьте её в двойное неравенство отрезка и найдите целые значения параметра. В итоговом списке проверьте границы и уберите повторы.

На первых разборах проговаривайте, почему выбран каждый шаг. Перед последними двумя задачами закройте решение, составьте собственный план и только затем сравните его с разбором.

Разбор 1. Цилиндр и значение объёма

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Площадь круга равна πr^2 , объём цилиндра — площади основания, умноженной на высоту.

Условие

Радиус основания цилиндра равен 6, высота — 4. Найдите $\frac{V}{\pi}$.

1. $V = \pi r^2 h$.

Формулу записываем до подстановки, чтобы не потерять квадрат радиуса.

2. $r^2 = 6^2 = 36$; $V = \pi \cdot 36 \cdot 4 = 144\pi$.

Сначала возводим радиус в квадрат, затем умножаем на высоту.

3. $\frac{V}{\pi} = 144$.

Вопрос просит объём, поделённый на π , поэтому π в ответ не переносим.

Проверка	Типичная ошибка
Площадь основания 36π , четыре таких слоя дают 144π .	Принимать радиус за диаметр или оставлять π в ответе.



Ответ: 144

Разбор 2. Максимум по знаку производной

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Нужен переход f' от плюса к минусу.

Условие

На рисунке изображён график производной функции; её нули имеют абсциссы $-3, 1, 3$. Сколько точек максимума имеет функция на показанном интервале?

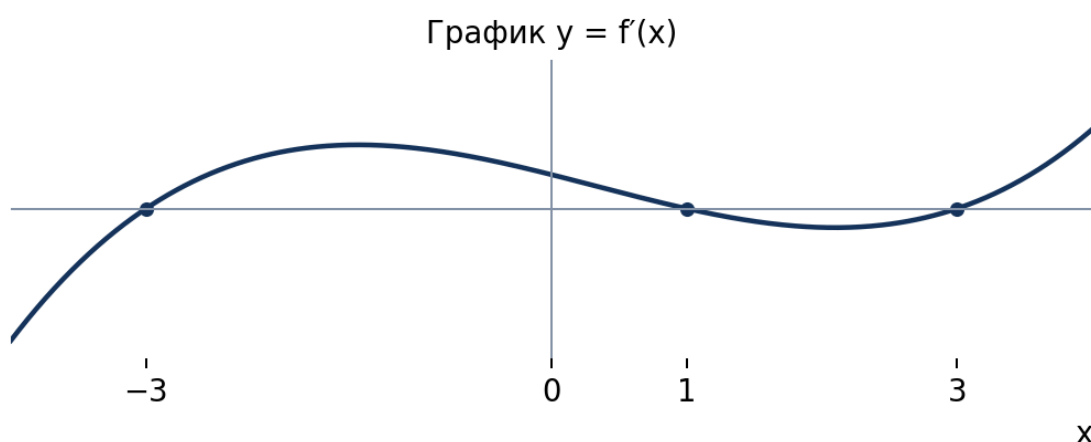


Иллюстрация к условию задания.

1. Читаем знаки f' : $-$, $+$, $-$, $+$.

Производная положительна над осью и отрицательна под осью.

2. В точке $x = 1$ знак $+$ сменяется на $-$.

Это переход от возрастания функции к убыванию.

3. Точек максимума — 1.

Нули -3 и 3 дают минимумы, а не максимумы.

Проверка	Типичная ошибка
Всего три смены знака: два минимума и один максимум.	Считать все нули производной максимумами.

Ответ: 1

Разбор 3. Замена в показательном уравнении

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Степени 4 и 2 связаны равенством $4^x = (2^x)^2$.

Условие

а) Решите уравнение $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[0; 2]$.

1. $t = 2^x > 0$.

Замена превращает уравнение в квадратное; условие положительности сохраняем.



2. $t^2 - 10t + 16 = 0$; $(t - 2)(t - 8) = 0$.

Подбираем числа с суммой 10 и произведением 16.

3. $t = 2$ или $t = 8$. Получаем $2^x = 2$ или $2^x = 8$.

Оба значения положительны, поэтому обе ветви допустимы.

4. $x = 1$ или $x = 3$. На отрезке $[0; 2]$ остаётся $x = 1$.

Сначала решаем пункт а полностью, затем отдельно выполняем отбор.

Проверка	Типичная ошибка
При $x = 1$: $4 - 20 + 16 = 0$; при $x = 3$: $64 - 80 + 16 = 0$.	Записывать значения замены 2 и 8 как значения x .

ОТВЕТ. а) $x = 1; 3$; б) $x = 1$.

Разбор 4. Показательное уравнение с большими числами

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Размер коэффициентов не меняет способ решения.

Условие

а) Решите уравнение $4^x - 272 \cdot 2^x + 4096 = 0$. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[3; 5]$.

1. $t = 2^x > 0$; $t^2 - 272t + 4096 = 0$.

Снова сводим задачу к квадратному уравнению.

2. $16 + 256 = 272$ и $16 \cdot 256 = 4096$.

По теореме Виета корни замены равны 16 и 256.

3. $2^x = 16 = 2^4$ или $2^x = 256 = 2^8$.

Возвращаемся к исходной переменной.

4. $x = 4$ или $x = 8$. В $[3; 5]$ входит только 4.

Для пункта б проверяем каждый корень, найденный в пункте а.

Проверка	Типичная ошибка
Произведение $(t - 16)(t - 256)$ раскрывается в исходный квадратный трёхчлен.	Остановиться на корнях квадратного уравнения по t .

ОТВЕТ. а) $x = 4; 8$; б) $x = 4$.

Разбор 5. Квадратное уравнение относительно косинуса

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Обозначим $t = \cos x$ и учтём $-1 \leq t \leq 1$.

Условие

а) Решите уравнение $2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$. б) Найдите корни на отрезке $[0; 2\pi]$.



$$1. 2t^2 + t - 1 = (2t - 1)(t + 1) = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один множитель равен нулю.

$$2. \cos x = \frac{1}{2} \text{ или } \cos x = -1.$$

Оба значения допустимы для косинуса.

$$3. x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ или } x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Это полное решение пункта а.

$$4. \text{ На } [0; 2\pi]: \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}.$$

У косинуса 1/2 два корня за период; у косинуса -1 один.

Проверка	Типичная ошибка
Все три значения дают косинус 1/2 или -1 и лежат на отрезке.	Для $\cos x = 1/2$ записать только положительную серию.

ОТВЕТ. а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}$

Разбор 6. Сдвиг аргумента и отбор корней

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Вводим новую переменную вместе с её отрезком.

Условие

а) Решите уравнение $2 \sin^2 (x + 5\pi) - 3 \sin (x + 5\pi) + 1 = 0$. **б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку** $\left[-\frac{11\pi}{2}; -3\pi\right]$.

$$1. y = x + 5\pi; y \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right].$$

К обеим границам исходного отрезка прибавляем 5π .

$$2. (2 \sin y - 1)(\sin y - 1) = 0.$$

Квадратное уравнение раскладывается на множители.

$$3. y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Это все ветви, поскольку $\sin y = 1/2$ или 1.

$$4. x = -\frac{29\pi}{6} + 2\pi k, x = -\frac{25\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } x = -\frac{9\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Из каждой серии вычитаем 5π — получаем пункт а.

$$5. \text{ На отрезке для } y \text{ подходят только } \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}. \text{ Поэтому } x = -\frac{29\pi}{6}, -\frac{9\pi}{2}, -\frac{25\pi}{6}.$$

Соседние периоды выходят за отрезок; в каждой серии здесь $k = 0$.

Проверка	Типичная ошибка
После прибавления 5π выбранные корни дают углы $\pi/6$, $\pi/2$ и $5\pi/6$.	Отбирать новую переменную по старому отрезку.

ОТВЕТ. а) $x = -\frac{29\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{25\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{9\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{29\pi}{6}; -\frac{9\pi}{2}; -\frac{25\pi}{6}$



Разбор 7. Смеси: одно уравнение по массе вещества

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, открытый вариант КИМ ЕГЭ-2026, задание 10; условие пересказано Открыть источник	официальный КИМ • первая часть	баланс вещества

Условие

Первый сплав содержит 60% меди, второй — 10%. Второго сплава на 90 кг больше. После смешивания получили сплав с 20% меди. Найдите массу смеси.

До решения: что заметить

Пусть первого сплава x кг, второго — $x + 90$.

Масса меди до смешивания равна массе меди после.

Проценты переводим в коэффициенты 0,6; 0,1; 0,2.

Решение по шагам

Шаг 1. Составляем баланс меди. Медь в исходных сплавах равна меди в смеси:

$$0,6x + 0,1(x + 90) = 0,2(2x + 90)$$

Шаг 2. Решаем уравнение. Раскрываем скобки:

$$0,7x + 9 = 0,4x + 18$$

$$0,3x = 9$$

$$x = 30$$

Шаг 3. Находим массу смеси. Массы равны 30 и 120 кг:

$$30 + 120 = 150$$

Проверка

Меди $18 + 12 = 30$ кг.

20% от 150 кг тоже равно 30 кг.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Усреднить проценты 60 и 10. Массы различаются, поэтому нужен баланс количества меди.

ОТВЕТ: 150 кг

Разбор 8. Задание 13: преобразование и отбор корней

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, демонстрационный вариант ЕГЭ-2024, задача 13; запись адаптирована Открыть источник	официальная демоверсия • задача 13	тригонометрическое уравнение и отбор

**Условие**

Решите уравнение, затем укажите корни на отрезке от -3π до $-3\pi/2$.

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 2x = \sqrt{3} \cos x + 1$$

$$x \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$$

До решения: что заметить

Сначала решаем уравнение полностью, затем отдельно отбираем корни.

Используем формулы синуса суммы и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Каждую серию отбираем своим двойным неравенством.

Решение по шагам

Шаг 1. Раскрываем формулы. Одинаковые слагаемые $\sqrt{3} \cos x$ и единицы сокращаются:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 - 2 \sin^2 x = \sqrt{3} \cos x + 1$$

Шаг 2. Факторизуем. После сокращения:

$$\sin x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$\sin x (2 \sin x - 1) = 0$$

Шаг 3. Записываем серии. Получаем три семейства решений:

$$x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}$$

Шаг 4. Отбираем первую серию. Для $x = \pi k$ подходят $k = -3$ и -2 :

$$x = -3\pi, \quad -2\pi$$

Шаг 5. Отбираем остальные. В серии $\pi/6 + 2\pi n$ подходит $n = -1$; третья серия корней на отрезке не даёт.

$$x = -\frac{11\pi}{6}$$

Проверка

Все три значения лежат на отрезке.

Они дают $\sin x = 0$ или $1/2$.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Записать общие серии, но не выполнить пункт б. На отрезке нужны конкретные значения.

ОТВЕТ. а) $x = \pi k, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ **или** $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, k, n, m \in \mathbb{Z}$; **б)** $-3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$.



Деталь отбора: $-3 \leq k \leq -\frac{3}{2}$, откуда $k = -3, -2$. Для второй серии $-\frac{19}{12} \leq n \leq -\frac{5}{6}$, значит $n = -1$. Для третьей $-\frac{23}{12} \leq m \leq -\frac{7}{6}$; целых значений нет.