



Итоговый тренировочный вариант

Теория и разобранные примеры

Урок 35. Итоговый тренировочный вариант. Объяснения с начального уровня, исходные примеры с пошаговыми решениями и отдельный тест для самостоятельной проверки.

Полный вариант как проверка связей между темами

В полном варианте ошибки часто возникают не из-за незнания формулы, а из-за неверного распознавания модели. Перед решением определите, какая величина неизвестна и какое правило связывает данные. После этого используйте тот же короткий алгоритм, который отрабатывался в тематических уроках.

Система самопроверки

Для вычислений оцените знак и порядок величины. Для уравнения подставьте найденный корень в исходную запись и проверьте ограничения. Для неравенства проверьте критические точки и по одной точке на интервалах. Для вероятности убедитесь, что результат находится в отрезке $[0; 1]$. Для геометрии проверьте размерность и соответствие найденной величины вопросу.

Полная запись задач части 2

В тригонометрическом уравнении необходимы все серии корней и отбор. В неравенстве — ОДЗ, преобразование к произведению или дроби, критические точки и знаки. В финансовой задаче — последовательность состояний долга или счёта. В задаче на целые числа — рассуждение, охватывающее все случаи, либо конструкция с проверкой.

Не сокращайте объяснение в месте, где появляется главное ограничение. Фраза «по ОДЗ» должна сопровождаться самым условием; «по методу интервалов» — критическими точками и выбранными промежутками; «очевидно делится» — указанием множителей или остатков.

Как разбирать результат

После выполнения распределите ошибки по четырём категориям: модель, преобразование, вычисление, запись ответа. Если ответ угадан, но обоснование неполно, это отдельная проблема записи. Если вычисление верно, но решена другая величина, ошибка относится к модели. Для каждой повторяющейся причины составьте короткое правило проверки и примените его к новому заданию того же типа.

Цель полного варианта — не только итоговое количество верных ответов, а понятная карта действий: какие типы выполняются устойчиво, где нужна дополнительная проверка и какие развёрнутые задачи можно доводить до строгого решения.



Подробные объяснения и разобранные примеры

Карта теории

Учебный вариант

В банке собраны два комплекта первой части и выбранных задач 13, 15, 16, 19а. Отдельные задания служат тренировкой; полный экзаменационный КИМ содержит также линии, не включённые в этот комплект.

Порядок работы

На первом проходе решайте знакомые короткие задачи. Затем возвращайтесь к задачам с уравнениями и развёрнутыми доказательствами. Оставьте отдельное время для переноса и проверки ответов.

Полнота второй части

В задании 13 нужны общие корни и отбор; в 15 — ОДЗ и границы; в 16 — календарь долга и проверка суммы; в 19а — проверенная конструкция либо общее доказательство невозможности.

Разбор ошибки

Найдите первый неверный переход. Запишите, какое условие или правило было упущено. Решите корректирующую задачу и проверьте именно этот шаг, а не только совпадение ответа.

На первых разборах проговаривайте, почему выбран каждый шаг. Перед последними двумя задачами закройте решение, составьте собственный план и только затем сравните его с разбором.

Разбор 1. Начало варианта с базовой геометрии

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Запишите данные и формулу, даже если вычисление кажется очевидным.

**Условие**

Основания трапеции равны 18 и 26, высота равна 4. Найдите площадь трапеции по рисунку.



Иллюстрация к условию задания.

1. $a = 18, b = 26, h = 4.$

Высота перпендикулярна основаниям.

2. $S = \frac{a+b}{2}h = \frac{18+26}{2} \cdot 4.$

Среднюю длину оснований умножаем на высоту.

3. $S = 22 \cdot 4 = 88.$

Сохраняем порядок действий: скобки, деление, умножение.

Проверка	Типичная ошибка
$18 \cdot 4 = 72 < 88 < 104 = 26 \cdot 4.$	Потерять множитель $1/2$.

Ответ: 88

Разбор 2. Чтение графика производной

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Экстремум функции определяется сменой знака её производной.

**Условие**

На рисунке изображён график производной функции; её нули имеют абсциссы $-2, 1, 4$. Сколько точек максимума имеет функция на показанном интервале?

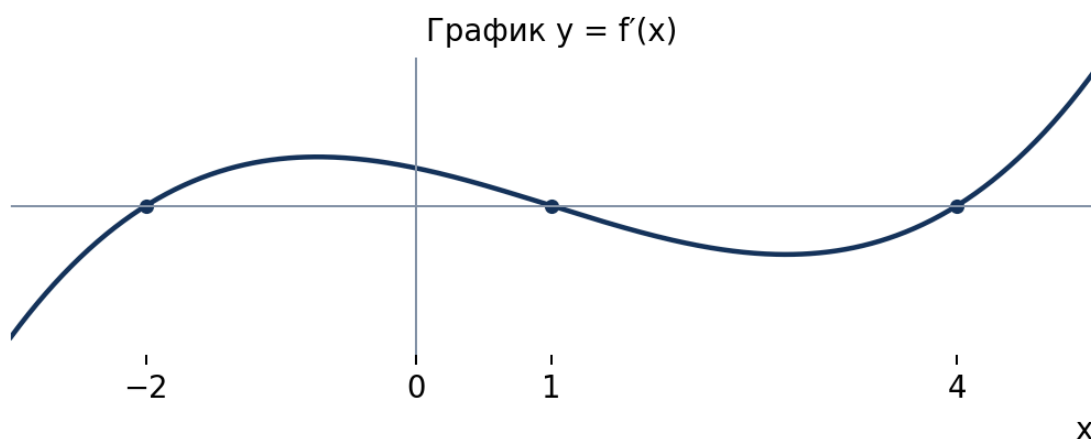


Иллюстрация к условию задания.

1. Знаки слева направо: $-$, $+$, $-$, $+$.
Смотрим выше или ниже оси лежит график.
2. В $x = 1$ происходит переход $+$ $\rightarrow$ $-$.
Функция сначала возрастает, затем убывает.
3. Точка максимума одна.
Точки -2 и 4 — минимумы.

Проверка	Типичная ошибка
Ответ — количество, а не список всех нулей производной.	Считать локальные вершины нарисованной кривой.

Ответ: 1

Разбор 3. Показательное уравнение с полным отбором

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Сначала находим все корни, затем проверяем отрезок.

Условие

а) Решите уравнение $4^x - 40 \cdot 2^x + 256 = 0$. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[2; 4]$.

1. $t = 2^x > 0$. Получаем $t^2 - 40t + 256 = 0$.
 $4^x = (2^x)^2$.
2. $(t - 8)(t - 32) = 0$. Значит $t = 8$ или $t = 32$.
8 и 32 дают сумму 40 и произведение 256.
3. $x = 3$ или $x = 5$.
Возвращаемся от степени к её показателю.



4. В $[2; 4]$ входит только $x = 3$.

Корень 5 сохраняется в пункте а, но исключается из пункта б.

Проверка	Типичная ошибка
При $x = 3$: $64 - 320 + 256 = 0$.	Указать только отобранный корень в ответе на оба пункта.

ОТВЕТ. а) $x = 3; 5$; б) $x = 3$.

Разбор 4. Финансовая модель в пробном варианте

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Учитываем проценты только на непогашенный остаток.

Условие

В июле банк выдал кредит в размере 1 300 тыс. рублей на 5 лет. Каждый январь долг увеличивается на 15%, после чего одним платежом уменьшается так, чтобы к июлю каждого следующего года долг становился на одну и ту же величину меньше. Найдите общую сумму всех выплат за весь срок. Ответ дайте в тысячах рублей.

1. Ежегодное уменьшение: $\frac{1300}{5} = 260$.

Пять равных частей составляют основной долг.

2. Остатки перед начислением: 1300; 1040; 780; 520; 260.

После последнего платежа долг равен нулю.

3. Сумма остатков: $\frac{5(1300 + 260)}{2} = 3900$.

Используем сумму арифметической прогрессии.

4. $1300 + 0,15 \cdot 3900 = 1885$ тыс. рублей.

Добавляем сумму всех процентов к основному долгу.

Проверка	Типичная ошибка
Последний платёж $260 + 39 = 299$, первый $260 + 195 = 455$; их среднее 377, пять платежей дают 1885.	Считать все платежи равными при равномерном уменьшении долга.

Ответ: 1 885 тыс. рублей

Разбор 5. Квадрат нечётного числа по модулю 8

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Запишем нечётное число как $2k + 1$.

Условие

Может ли сумма квадратов трёх нечётных чисел делиться на 8? Обоснуйте ответ.

1. $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$.

Раскрываем квадрат и группируем слагаемые.



2. Число $k(k+1)$ чётно, поэтому $4k(k+1)$ делится на 8.

Среди двух соседних целых одно чётное.

3. Каждый нечётный квадрат даёт остаток 1; сумма трёх — остаток 3.

Остатки можно складывать.

4. Сумма не делится на 8.

Для делимости нужен остаток 0.

Проверка	Типичная ошибка
$1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$, остаток 3, как и предсказывает доказательство.	Сказать «сумма нечётная», не объясняя остаток, если используется именно метод остатков.

Ответ: Нет

Разбор 6. Положительный ответ через конструкцию

ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ. Для существования достаточно одного подходящего примера.

Условие

Существует ли натуральное n , для которого $5^n + 2^n$ делится на 7? Обоснуйте ответ.

1. Попробуем наименьшее натуральное $n = 1$.

Это допустимый показатель.

2. $5^1 + 2^1 = 7$.

Число 7 делится на 7 без остатка.

3. Такое натуральное n существует.

Пример с проверкой доказывает положительный ответ.

Проверка	Типичная ошибка
Проверены оба требования: показатель натуральный, сумма кратна 7.	Пытаться доказывать утверждение для всех n , когда спрашивают существование.

Ответ: Да

Разбор 7. Движение двух велосипедистов

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, открытый вариант КИМ ЕГЭ-2024, задание 10; условие пересказано Открыть источник	официальный КИМ • первая часть	уравнение по разности времён



Условие

Два велосипедиста одновременно отправились на дистанцию 190 км. Скорость первого на 9 км/ч больше, поэтому он финишировал на 9 часов раньше. Найдите скорость более быстрого.

До решения: что заметить

Пусть скорость медленного равна v , быстрого — $v + 9$.

Время равно расстоянию, делённому на скорость.

Из времени медленного вычитаем время быстрого.

Решение по шагам

Шаг 1. Составляем уравнение. Разность времён равна 9:

$$\frac{190}{v} - \frac{190}{v+9} = 9$$

Шаг 2. Убираем знаменатели. При $v > 0$ умножаем на $v(v+9)$:

$$190(v+9) - 190v = 9v(v+9)$$

Шаг 3. Решаем. После упрощения:

$$\begin{aligned} v^2 + 9v - 190 &= 0 \\ (v-10)(v+19) &= 0 \end{aligned}$$

Шаг 4. Возвращаемся к вопросу. Положительный корень $v = 10$ — скорость медленного. Быстрый ехал:

$$v+9 = 19$$

Проверка

$190/10 = 19$ часов, $190/19 = 10$ часов; разница 9.

В ответ записана скорость быстрого.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Записать 10 — это скорость медленного участника. После решения вернитесь к вопросу.

ОТВЕТ: 19 км/ч

Разбор 8. Тригонометрическое уравнение с отбором

ИСТОЧНИК	УРОВЕНЬ	ТРЕНИРУЕМ
ФИПИ, демонстрационный вариант ЕГЭ-2025, задача 13; запись адаптирована Открыть источник	официальная демоверсия • задача 13	факторизация и отбор серий

Условие

Решите уравнение и выберите корни на отрезке $[-4\pi; -5\pi/2]$.



$$2 \sin^3 x = \sqrt{2} \cos^2 x + 2 \sin x$$

$$x \in \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$$

До решения: что заметить

Выражаем $\sin^3 x - \sin x$ через $\cos^2 x$.

После вынесения множителя будут две независимые ветви.

Не делим на $\cos^2 x$: так можно потерять корни.

Решение по шагам

Шаг 1. Факторизуем. Используем $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$:

$$2 \sin^3 x - 2 \sin x - \sqrt{2} \cos^2 x = 0$$

$$-\cos^2 x (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0$$

Шаг 2. Получаем ветви. Произведение равно нулю:

$$\cos x = 0$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Шаг 3. Записываем серии. Полное решение:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}$$

Шаг 4. Отбираем первую серию. Подходят $k = -4$ и -3 :

$$x = -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$$

Шаг 5. Отбираем остальные. Первая синусная серия корней не даёт; во второй подходит $m = -1$:

$$x = -\frac{11\pi}{4}$$

Проверка

Граница $-5\pi/2$ включена и является корнем.

Каждый ответ даёт $\cos x = 0$ или $\sin x = -\sqrt{2}/2$.

ТИПИЧНАЯ ОШИБКА

Разделить на $\cos^2 x$ и потерять всю ветвь $\cos x = 0$.

ОТВЕТ. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ **или** $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}$.

Деталь отбора: $-\frac{9}{2} \leq k \leq -3$, откуда $k = -4, -3$. Для серии $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ получаем $-\frac{15}{8} \leq n \leq -\frac{9}{8}$: целых значений нет. Для серии $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ имеем $-\frac{13}{8} \leq m \leq -\frac{7}{8}$, поэтому $m = -1$.