

Урок 9. Ответы и решения

Условия, ответы и пошаговые решения всех 40 заданий.

В общих тригонометрических решениях параметр $n \in \mathbb{Z}$, то есть принимает все целые значения. Углы записываются в радианах.

01. Начальный уровень - задания 1-20

Задание 1. Начальный. Линейное неравенство

Решите неравенство.

$$x + 3 > 7$$

$$x > 4$$

Ответ: $x > 4$

Задание 2. Начальный. Отрицательный коэффициент

Решите неравенство.

$$5 - 2x \leq 1$$

$$-2x \leq -4$$

Делим на -2 и меняем знак.

$$x \geq 2$$

Ответ: $x \geq 2$

Задание 3. Начальный. Перенос слагаемого

Решите неравенство.

$$3x - 6 < 0$$

$$3x < 6$$

$$x < 2$$

Ответ: $x < 2$

Задание 4. Начальный. Отрицательный коэффициент

Решите неравенство.

$$-4x > 12$$

При делении на -4 меняем знак.

$$x < -3$$

Ответ: $x < -3$

Задание 5. Начальный. Дробный коэффициент

Решите неравенство.

$$\frac{x}{3} + 2 \geq 5$$

$$\frac{x}{3} \geq 3$$

$$x \geq 9$$

Ответ: $x \geq 9$

Задание 6. Начальный. Разность квадратов

Решите неравенство.

$$x^2 - 9 > 0$$

$$(x - 3)(x + 3) > 0$$

Произведение положительно вне корней.

$$x < -3 \text{ или } x > 3$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Задание 7. Начальный. Между корнями

Решите неравенство.

$$x^2 - 9 < 0$$

$$(x - 3)(x + 3) < 0$$

Произведение отрицательно между корнями.

$$-3 < x < 3$$

Ответ: $x \in (-3; 3)$

Задание 8. Начальный. Знак произведения

Решите неравенство.

$$(x - 1)(x + 4) > 0$$

Корни -4 и 1 ; положительные интервалы находятся снаружи.

$$x < -4 \text{ или } x > 1$$

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$

Задание 9. Начальный. Знак произведения

Решите неравенство.

$$(x - 2)(x + 3) < 0$$

Корни -3 и 2 ; отрицательный знак между ними.

$$-3 < x < 2$$

Ответ: $x \in (-3; 2)$

Задание 10. Начальный. Квадрат неотрицателен

Решите неравенство.

$$(x - 5)^2 \geq 0$$

Квадрат любого действительного числа неотрицателен.

Ответ: все действительные числа

Задание 11. Начальный. Квадрат отрицателен

Решите неравенство.

$$(x + 2)^2 < 0$$

Квадрат не может быть отрицательным.

Ответ: решений нет

Задание 12. Начальный. Знак простой дроби

Решите неравенство.

$$\frac{1}{x - 3} > 0$$

$$x \neq 3$$

Числитель положителен, поэтому знаменатель должен быть положителен.

$$x > 3$$

Ответ: $x > 3$

Задание 13. Начальный. Отрицательная дробь

Решите неравенство.

$$\frac{1}{x+1} < 0$$

$$x \neq -1$$

Дробь отрицательна при отрицательном знаменателе.

$$x < -1$$

Ответ: $x < -1$

Задание 14. Начальный. Чтение числовой прямой

Запишите множество, изображённое на рисунке.

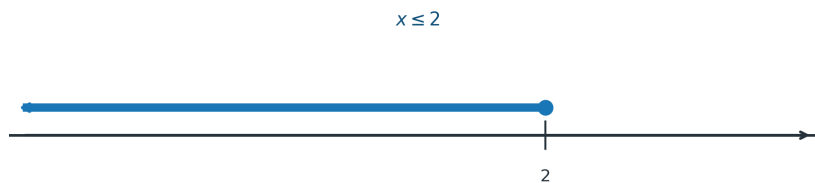


Рис. 1: Рисунок к заданию.

Луч направлен влево, точка 2 закрашена, значит 2 входит в ответ.

Ответ: $x \leq 2$

Задание 15. Начальный. Тип скобки

Какая скобка ставится у конечной границы 4 в ответе $x < 4$?

Строгое неравенство не включает границу, поэтому используется круглая скобка.

Ответ: круглая

Задание 16. Начальный. Система неравенств

Решите систему.

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Пересекаем лучи $x > 1$ и $x \leq 4$.

$$x \in (1; 4]$$

Ответ: $x \in (1; 4]$

Задание 17. Начальный. Совокупность

Запишите множество решений.

$$x < -2 \text{ или } x \geq 3$$

Слово «или» означает объединение двух лучей.

$$x \in (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$

Задание 18. Начальный. Корни синуса

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n$$

$$x = 0, \pi, 2\pi$$

Ответ: $x \in \{0; \pi; 2\pi\}$

Задание 19. Начальный. Показательное уравнение

Решите уравнение.

$$2^x = 8$$

$$8 = 2^3$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Задание 20. Начальный. Иррациональное уравнение

Решите уравнение.

$$\sqrt{x+6} = x$$

$$x \geq 0$$

$$x+6 = x^2$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

Подходит только 3.

Ответ: $x = 3$

02. Средний уровень - задания 21-35**Задание 21. Средний. Квадратный трёхчлен**

Решите неравенство.

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$(x-2)(x-3) > 0$$

Положительный знак вне корней.

$$x < 2 \text{ или } x > 3$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

Задание 22. Средний. Неположительный трёхчлен

Решите неравенство.

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

Отрицательный или нулевой знак между корнями, нули включаем.

$$x \in [2; 3]$$

Ответ: $x \in [2; 3]$

Задание 23. Средний. Общий множитель

Решите неравенство.

$$x(x - 4) \geq 0$$

Корни 0 и 4; положительный знак снаружи, корни включаем.

$$x \leq 0 \text{ или } x \geq 4$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

Задание 24. Средний. Три множителя

Решите неравенство.

$$(x - 1)(x + 2)(x - 5) < 0$$

Критические точки $-2, 1, 5$. Проверяем знак на каждом интервале.

$$x \in (-\infty; -2) \cup (1; 5)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 5)$

Задание 25. Средний. Рациональное неравенство

Решите неравенство методом интервалов.

$$\frac{x - 3}{x + 1} > 0$$

$$x \neq -1$$

Критические точки -1 и 3 . Дробь положительна на внешних интервалах.

$$x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Задание 26. Средний. Неположительная дробь

Решите неравенство.

$$\frac{x + 2}{x - 4} \leq 0$$

$$x \neq 4$$

Ноль числителя -2 включаем, ноль знаменателя 4 исключаем.

$$x \in [-2; 4)$$

Ответ: $x \in [-2; 4)$

Задание 27. Средний. Три критические точки

Решите неравенство.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} \geq 0$$

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 1} \geq 0$$

$$x \neq 1$$

По таблице знаков подходят $[-2; 1)$ и $[2; +\infty)$.

Ответ: $x \in [-2; 1) \cup [2; +\infty)$

Задание 28. Средний. Знак знаменателя

Решите неравенство.

$$\frac{1}{x^2 - 9} < 0$$

$$x \neq \pm 3$$

Числитель положителен, дробь отрицательна при $x^2 - 9 < 0$.

$$-3 < x < 3$$

Ответ: $x \in (-3; 3)$

Задание 29. Средний. Кратный корень

Решите неравенство.

$$(x - 1)^2(x + 3) > 0$$

Квадрат не меняет знак в точке 1, но в ней выражение равно нулю и не входит при строгом знаке.

$$x \in (-3; 1) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-3; 1) \cup (1; +\infty)$

Задание 30. Средний. Пересечение условий

Решите систему.

$$\begin{cases} x^2 < 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$-3 < x < 3$$

Пересекаем с $x \geq 0$.

$$x \in [0; 3)$$

Ответ: $x \in [0; 3)$

Задание 31. Средний. Двойное неравенство

Решите двойное неравенство.

$$2x - 1 \leq x + 4 < 3x + 2$$

$$2x - 1 \leq x + 4 \Rightarrow x \leq 5$$

$$x + 4 < 3x + 2 \Rightarrow x > 1$$

$$x \in (1; 5]$$

Ответ: $x \in (1; 5]$

Задание 32. Средний. Модуль

Решите неравенство.

$$|x| < 4$$

Расстояние от x до нуля меньше 4.

$$-4 < x < 4$$

Ответ: $x \in (-4; 4)$

Задание 33. Средний. Логарифмическое уравнение

Решите уравнение.

$$\log_3(x - 1) = 2$$

$$x > 1$$

$$x - 1 = 9$$

$$x = 10$$

Ответ: $x = 10$

Задание 34. Средний. Косинус на обороте

Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$.

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Косинус отрицателен во II и III четвертях.

$$x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$

Задание 35. Средний. Алгебраическая дробь

Упростите выражение при $x \neq 3$.

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

Ответ: $x + 3$

03. Сложный уровень - задания 36-40

Задание 36. Повышенный. Три критические точки

Решите неравенство.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-4} \leq 0$$
$$x \neq 4$$

Критические точки -1 , 2 и 4 . По знакам подходят первый и третий интервалы.

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; 4)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; 4)$

Задание 37. Повышенный. Четыре критические точки

Решите неравенство.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} > 0$$
$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} > 0$$

Точки ± 2 исключены; точки ± 1 не входят при строгом знаке.

$$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$

Задание 38. Повышенный. Кратный корень в числителе

Решите неравенство.

$$\frac{(x-1)^2}{x+2} \geq 0$$
$$x \neq -2$$

Числитель неотрицателен и равен нулю при $x = 1$. Знак дроби определяется знаменателем.

$$x > -2$$

Ответ: $x \in (-2; +\infty)$

Задание 39. Повышенный. Система интервалов

Решите систему.

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) \leq 0 \\ x^2 > 1 \end{cases}$$

$$-1 \leq x \leq 3$$

$$x < -1 \text{ или } x > 1$$

Пересечение множеств даёт $(1; 3]$.

Ответ: $x \in (1; 3]$

Задание 40. Повышенный. Неравенство с корнем

Решите неравенство.

$$\sqrt{x-1} \leq 3$$

$$x \geq 1$$

$$x-1 \leq 9$$

$$x \leq 10$$

$$x \in [1; 10]$$

Ответ: $x \in [1; 10]$