



Показательные и логарифмические уравнения

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Основные приёмы

Задание 1

Решите уравнение

$$2^{x+3} = 2^8.$$

Шаг 1. Основание 2 положительно и не равно 1, поэтому функция 2^t взаимно однозначна.

Шаг 2. Приравниваем показатели: $x + 3 = 8$.

Шаг 3. Получаем $x = 5$.

Ответ. 5

Задание 2

Решите $3^{2x-1} = 27^{x-2}$.

$27 = 3^3$. Инъективность степени даёт $2x - 1 = 3x - 6$, откуда $x = 5$.

Ответ. 5.

Задание 3

Решите уравнение

$$5^{x+1} = 5^4.$$

Шаг 1. Основание 5 положительно и не равно 1, поэтому функция 5^t взаимно однозначна.

Шаг 2. Приравниваем показатели: $x + 1 = 4$.

Шаг 3. Получаем $x = 3$.

Ответ. 3

Задание 4

Решите $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x} = \frac{1}{16}$.

Правая часть равна $\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Поэтому $x^2 - 3x = 4$, то есть $(x - 4)(x + 1) = 0$. Основание положительно и не равно 1, обе степени определены для всех x .

Ответ. $-1; 4$.

Задание 5

Решите уравнение

$$4^{x+2} = 4^8.$$

Шаг 1. Основание 4 положительно и не равно 1, поэтому функция 4^t взаимно однозначна.

Шаг 2. Приравниваем показатели: $x + 2 = 8$.

Шаг 3. Получаем $x = 6$.

Ответ. 6

Задание 6

Решите $2^x + 2^{x+1} = 24$.

Выносим 2^x : $3 \cdot 2^x = 24$. Значит, $2^x = 8$ и $x = 3$.

Ответ. 3.

Задание 7

Решите $4^x = -2$.

Показательная функция 4^x строго положительна для любого действительного x , поэтому не может равняться отрицательному числу.

Ответ. Корней нет.

Задание 8

Решите уравнение

$$\log_2(x+1) = 3.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x+1 > 0$.

Шаг 2. По определению логарифма $x+1 = 2^3$.

Шаг 3. Отсюда $x = 7$; аргумент в этой точке равен $8 > 0$.

Ответ. 7

Задание 9

Решите $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) = -2$.

ОДЗ: $x > \frac{1}{3}$. По определению $3x-1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$, поэтому $x = \frac{5}{3}$. Найденное значение входит в ОДЗ.

Ответ. $\frac{5}{3}$.

Задание 10

Решите $\log_x 9 = 2$.

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$. По определению $x^2 = 9$. Из кандидатов ± 3 допустим только 3.

Ответ. 3.

02. Применение и сочетание приёмов**Задание 11**

Решите $\log_2(x^2-4) = 3$.

ОДЗ: $x < -2$ или $x > 2$. По определению $x^2-4 = 8$, откуда $x = \pm 2\sqrt{3}$. Оба числа входят в ОДЗ; аргумент равен 8.

Ответ. $-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}$.

Задание 12

Решите $\log_2(\log_3 x) = 1$.

ОДЗ: $\log_3 x > 0$, то есть $x > 1$. Сначала $\log_3 x = 2$, затем $x = 9$. Оба логарифма определены.

Ответ. 9.

Задание 13

Решите уравнение

$$\log_2 x \cdot \log_x 8 = 3.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

Шаг 2. По формуле перехода к новому основанию $\log_x 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 x} = \frac{3}{\log_2 x}$.

Шаг 3. Поэтому левая часть равна $\log_2 x \cdot \frac{3}{\log_2 x} = 3$ для каждого x из ОДЗ.

Шаг 4. Уравнение является тождеством на своей области определения.

Проверка полноты. Единственное сокращаемое выражение $\log_2 x$ не равно нулю именно благодаря условию $x \neq 1$.

Ответ. $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Задание 14

Решите $\log_2(x - 1) = \log_4(4x - 4)$.

ОДЗ: $x > 1$. Обозначим $t = \log_2(x - 1)$. Правая часть равна $\frac{2+t}{2}$. Из $t = \frac{2+t}{2}$ получаем $t = 2$, то есть $x = 5$. Проверка: $\log_2 4 = \log_4 16 = 2$.

Ответ. 5.

Задание 15

Решите уравнение

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Шаг 1. Вводим $t = 2^x$; обязательно $t > 0$.

Шаг 2. Получаем квадратное уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Шаг 3. Разлагаем трёхчлен и оставляем только положительные корни t .

Шаг 4. Каждый корень является целой степенью основания 2, поэтому возвращаемся к x .

Шаг 5. Получаем $x = 0; 2$; взаимная однозначность показательной функции гарантирует полноту.

Ответ. 0; 2

Задание 16

Решите уравнение

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Шаг 1. Вводим $t = 3^x$; обязательно $t > 0$.

Шаг 2. Получаем квадратное уравнение $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Шаг 3. Разлагаем трёхчлен и оставляем только положительные корни t .

Шаг 4. Каждый корень является целой степенью основания 3, поэтому возвращаемся к x .

Шаг 5. Получаем $x = 0; 2$; взаимная однозначность показательной функции гарантирует полноту.

Ответ. 0; 2

03. Повторение пройденного**Задание 17**

Накопительное повторение. Решите

$$\sqrt{x+2} = 2.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x \geq -2$.

Шаг 2. Возводим в квадрат: $x + 2 = 4$.

Шаг 3. Получаем $x = 2$ и проверяем.

Ответ. 2

Задание 18

Накопительное повторение. Вычислите

$$\sin 30^\circ + \cos 60^\circ.$$

Шаг 1. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Шаг 2. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Шаг 3. Сумма равна 1.

Ответ. 1

Задание 19**Накопительное повторение.** Упростите

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

с ОДЗ.

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq 2$.**Шаг 2.** $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.**Шаг 3.** Сокращаем на ОДЗ.**Шаг 4.** Получаем $x + 2$.**Шаг 5.** Запрещённую точку сохраняем.**Ответ.** $x + 2, x \neq 2$ **Задание 20****Накопительное повторение.** Сравните $\sqrt{65} - 8$ и

$$\frac{1}{16}.$$

Шаг 1. Рационализируем:

$$\sqrt{65} - 8 = \frac{1}{\sqrt{65} + 8}.$$

Шаг 2. $\sqrt{65} > 8$.**Шаг 3.** Знаменатель больше 16.**Шаг 4.** При положительных знаменателях дробь меньше.**Шаг 5.** Получаем $\sqrt{65} - 8 < \frac{1}{16}$.**Ответ.** $\sqrt{65} - 8 < \frac{1}{16}$

04. Многошаговые задачи

Задание 21

Решите уравнение

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Шаг 1. Вводим $t = 2^x$; обязательно $t > 0$.

Шаг 2. Получаем квадратное уравнение $t^2 - 6t + 8 = 0$.

Шаг 3. Разлагаем трёхчлен и оставляем только положительные корни t .

Шаг 4. Каждый корень является целой степенью основания 2, поэтому возвращаемся к x .

Шаг 5. Получаем $x = 1; 2$; взаимная однозначность показательной функции гарантирует полноту.

Ответ. 1; 2

Задание 22

Решите $4^x + 2^x - 6 = 0$.

Пусть $t = 2^x > 0$. Тогда $(t + 3)(t - 2) = 0$; отрицательное значение $t = -3$ отбрасываем. Из $2^x = 2$ получаем $x = 1$.

Ответ. 1.

Задание 23

Решите $9^x - 4 \cdot 6^x + 4 \cdot 4^x = 0$.

Делим на $4^x > 0$: $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 4\left(\frac{3}{2}\right)^x + 4 = 0$. Замена $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ даёт $(t - 2)^2 = 0$. Отсюда $x = \log_{\frac{3}{2}} 2$ — единственный корень.

Ответ. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Задание 24

Решите уравнение

$$\log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) = \log_2 3.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x > 3$.

Шаг 2. На ОДЗ объединяем логарифмы: $\log_2((x - 1)(x - 3)) = \log_2 3$.

Шаг 3. Равенство логарифмов с одним допустимым основанием даёт $(x - 1)(x - 3) = 3$.

Шаг 4. Квадратное уравнение имеет кандидаты $x = 4$ и $x = 0$.

Шаг 5. После проверки ОДЗ остаётся 4.

Ответ. 4

Задание 25

Решите уравнение

$$\log_3(x) + \log_3(x - 2) = \log_3 3.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x > 2$.

Шаг 2. На ОДЗ объединяем логарифмы: $\log_3((x)(x - 2)) = \log_3 3$.

Шаг 3. Равенство логарифмов с одним допустимым основанием даёт $(x)(x - 2) = 3$.

Шаг 4. Квадратное уравнение имеет кандидаты $x = 3$ и $x = -1$.

Шаг 5. После проверки ОДЗ остаётся 3.

Ответ. 3

Задание 26

Решите $\log_2(x - 1) - \log_2(x - 3) = 1$.

ОДЗ: $x > 3$. Объединяем в логарифм частного: $\frac{x - 1}{x - 3} = 2$. Отсюда $x - 1 = 2x - 6$, то есть $x = 5$. Он допустим.

Ответ. 5.

Задание 27

Решите $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$.

При $x > 0$ замена $t = \log_2 x$ принимает все действительные значения.

$(t - 1)(t - 2) = 0$, поэтому $x = 2$ или 4. Обратное соответствие однозначно.

Ответ. 2; 4.

Задание 28

Решите $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2(3x + 1)$.

ОДЗ: $x > 1$. Тогда $x^2 - 1 = 3x + 1$, то есть $x^2 - 3x - 2 = 0$. Кандидаты $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$; условию $x > 1$ удовлетворяет только число со знаком плюс.

Ответ. $\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

Задание 29

Решите уравнение

$$2^{x+1} = 8^{x-1}.$$

Шаг 1. Обе части положительны; приводим основания к степени одного простого числа.

Шаг 2. Получаем $2^{x+1} = 2^{3x-3}$.

Шаг 3. Показательная функция с таким основанием взаимно однозначна.

Шаг 4. Приравниваем показатели: $x + 1 = 3x - 3$.

Шаг 5. Решение линейного уравнения: $x = 2$.

Ответ. 2

Задание 30

Решите уравнение

$$9^{x-1} = 27^{2-x}.$$

Шаг 1. Обе части положительны; приводим основания к степени одного простого числа.

Шаг 2. Получаем $3^{2x-2} = 3^{6-3x}$.

Шаг 3. Показательная функция с таким основанием взаимно однозначна.

Шаг 4. Приравниваем показатели: $2x - 2 = 6 - 3x$.

Шаг 5. Решение линейного уравнения: $x = \frac{8}{5}$.

Ответ. $\frac{8}{5}$

05. Задания с развёрнутым решением

Задание 31

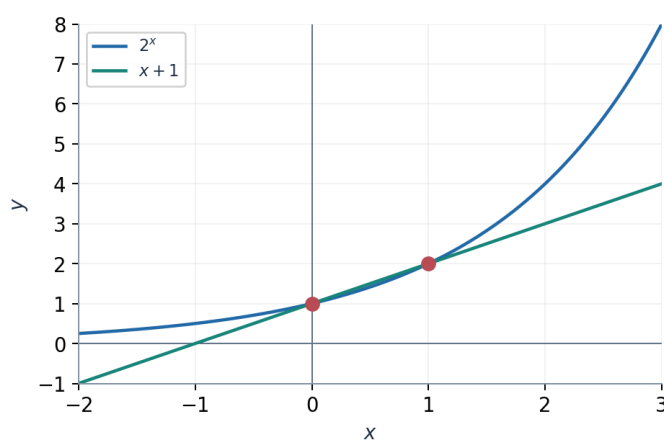
Решите $2^x = x + 1$ и докажите полноту ответа.

Шаг 1. Подстановка даёт $x = 0$ и $x = 1$.

Шаг 2. Функция $f(x) = 2^x - x - 1$ строго выпукла: $f''(x) = (\ln 2)^2 2^x > 0$. У строго выпуклой функции не может быть трёх нулей: средний из них лежал бы строго ниже хорды, соединяющей крайние нули, то есть имел бы отрицательное значение.

Шаг 3. Два найденных корня исчерпывают ответ.

Ответ. 0; 1.



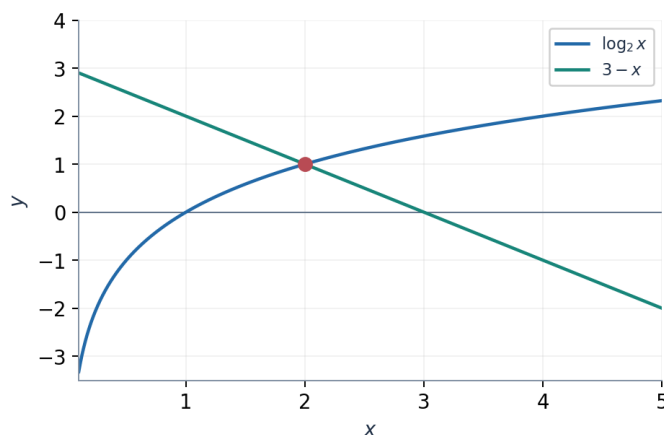
Пересечения $x = 0$ и $x = 1$; строгая выпуклость исключает третье.

Задание 32

Решите $\log_2 x = 3 - x$ и докажите единственность корня.

ОДЗ: $x > 0$. Функция $\log_2 x + x$ строго возрастает как сумма двух строго возрастающих функций. При $x = 2$ её значение равно 3. Поэтому это единственный корень.

Ответ. 2.



Возрастающий логарифм и убывающая прямая имеют одно пересечение.

Задание 33

Решите уравнение

$$3^x + 3^{1-x} = 4.$$

Шаг 1. Положим $t = 3^x > 0$. Тогда $3^{1-x} = \frac{3}{t}$.

Шаг 2. Получаем $t + \frac{3}{t} = 4$, или после умножения на t : $t^2 - 4t + 3 = 0$.

Шаг 3. Отсюда $t = 1$ или $t = 3$. Возвращаясь к x , имеем $3^x = 1$ либо $3^x = 3$.

Шаг 4. Следовательно, $x = 0$ или $x = 1$.

Проверка. При $x = 0$ сумма равна $1 + 3$, при $x = 1$ — $3 + 1$; замена охватывает все положительные t .

Ответ. $x = 0; 1$.

Задание 34

Решите уравнение

$$\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$. Положим $t = \log_2 x$, тогда $t \neq 0$ и $\log_x 2 = \frac{1}{t}$.

Шаг 2. Уравнение $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ после умножения на $2t$ принимает вид $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Шаг 3. Корни: $t = \frac{1}{2}$ и $t = 2$. Оба ненулевые.

Шаг 4. Следовательно, $x = \sqrt{2}$ или $x = 2^2 = 4$.

Проверка. Для $x = \sqrt{2}$ логарифмы равны $\frac{1}{2}$ и 2; для $x = 4$ — 2 и $\frac{1}{2}$.

Ответ. $x = \sqrt{2}; 4$.

Задание 35

Решите уравнение

$$3^x + 4^x = 5^x$$

и докажите, что других корней нет.

Шаг 1. Разделим уравнение на положительное 5^x : $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$.

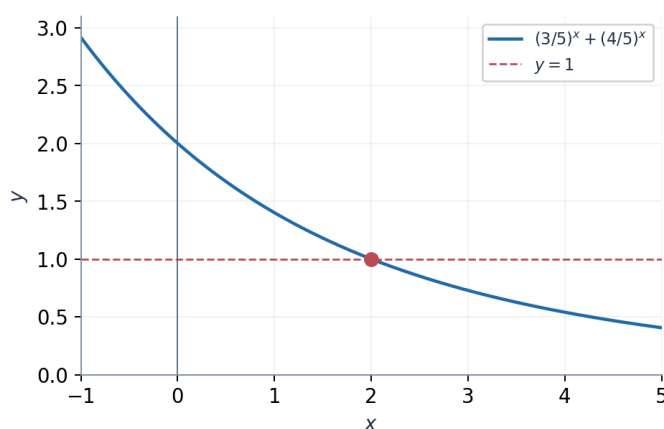
Шаг 2. Каждая из функций $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ строго убывает на $\mathbb{R}$, поэтому их сумма также строго убывает. Значит, уравнение имеет не более одного корня.

Шаг 3. При $x = 2$ получаем $9 + 16 = 25$, то есть равенство выполняется.

Шаг 4. Следовательно, найденный корень единственный.

Проверка полноты. Строгая монотонность доказана на всей числовой прямой, а не только в окрестности найденного значения.

Ответ. $x = 2$.



После деления на 5^x левая часть строго убывает; уровень 1 достигается только при $x = 2$.

Задание 36

Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 1) = 1 + \log_2(x - 1).$$

Шаг 1. ОДЗ требует $x^2 - 1 > 0$ и $x - 1 > 0$. Совместно это даёт $x > 1$.

Шаг 2. На ОДЗ правая часть равна $\log_2 2 + \log_2(x - 1) = \log_2(2x - 2)$.

Шаг 3. Из равенства логарифмов следует $x^2 - 1 = 2x - 2$, то есть $(x - 1)^2 = 0$.

Шаг 4. Единственный алгебраический кандидат $x = 1$ не принадлежит ОДЗ. Следовательно, решений нет.

Проверка полноты. Логарифм с основанием 2 взаимно однозначен на положительных аргументах, поэтому иных кандидатов после приравнивания аргументов нет.

Ответ. Решений нет.

06. Итоговые задачи повышенной сложности

Задание 37

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$2^x + 2^{-x} = a.$$

Шаг 1. Пусть $t = 2^x > 0$. Тогда уравнение имеет вид $t + \frac{1}{t} = a$.

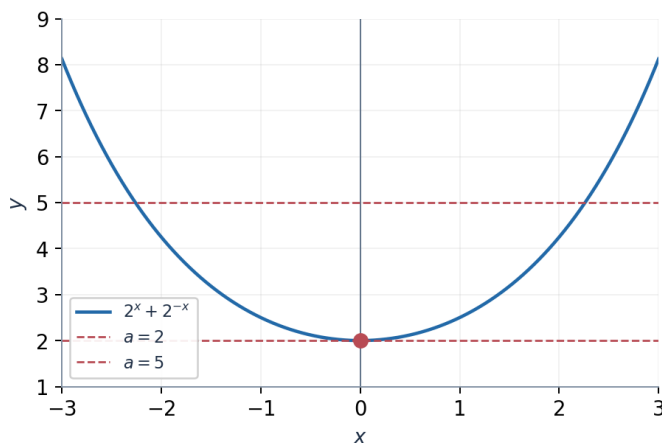
Шаг 2. По неравенству $t + \frac{1}{t} \geq 2$ для $t > 0$, причём равенство достигается только при $t = 1$.

Шаг 3. Функция $t + \frac{1}{t}$ убывает на $(0; 1]$ и возрастает на $[1; +\infty)$; значения t и $\frac{1}{t}$ дают одну и ту же сумму.

Шаг 4. Поэтому при $a < 2$ решений нет, при $a = 2$ имеется одно решение $x = 0$, а при $a > 2$ — два взаимно противоположных решения.

Проверка полноты. Монотонность на двух ветвях гарантирует ровно по одному пересечению при $a > 2$.

Ответ. 0 решений при $a < 2$; 1 при $a = 2$; 2 при $a > 2$.



Минимум 2 достигается при $x = 0$. Горизонталь выше 2 даёт два корня.

Задание 38

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$\log_2(x-1) + \log_2(5-x) = a.$$

Шаг 1. ОДЗ: $1 < x < 5$. На нём уравнение равносильно $(x-1)(5-x) = 2^a$.

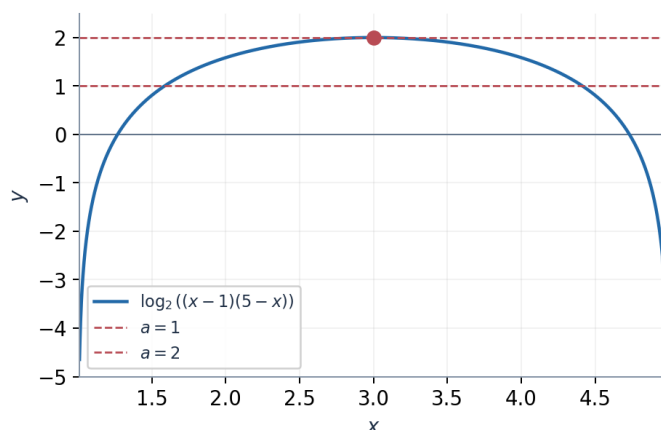
Шаг 2. Функция $f(x) = (x-1)(5-x)$ — обращённая вниз парабола с нулями 1 и 5 и максимумом $f(3) = 4$.

Шаг 3. Правая часть 2^a всегда положительна. При $0 < 2^a < 4$ горизонтальная прямая пересекает дугу дважды; при $2^a = 4$ — один раз; при $2^a > 4$ — ни разу.

Шаг 4. Условия равносильны соответственно $a < 2$, $a = 2$ и $a > 2$.

Проверка полноты. На промежутках $(1;3]$ и $[3;5)$ парабола строго монотонна, поэтому число пересечений установлено точно.

Ответ. 2 решения при $a < 2$; 1 при $a = 2$; 0 при $a > 2$.



ОДЗ $(1; 5)$, максимум 4 при $x = 3$. По обе стороны вершины функция строго монотонна.

Задание 39

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$2^x + 2^{a-x} = 3.$$

Шаг 1. Положим $t = 2^x > 0$. Тогда $2^{a-x} = \frac{2^a}{t}$, и уравнение равносильно $t^2 - 3t + 2^a = 0$.

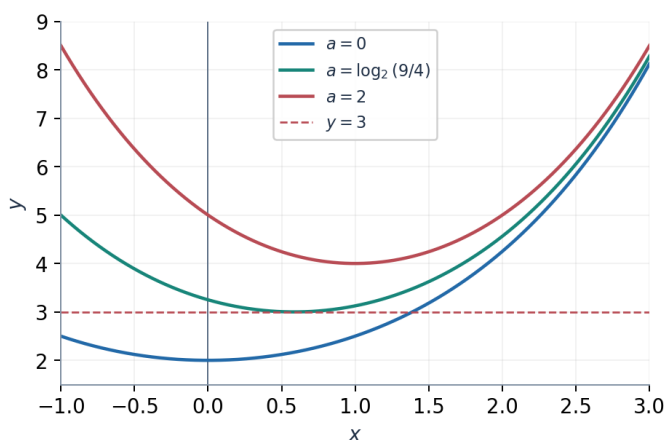
Шаг 2. Произведение корней равно $2^a > 0$, а сумма равна $3 > 0$, поэтому при наличии двух действительных корней оба положительны и дают допустимые x .

Шаг 3. Дискриминант $D = 9 - 4 \cdot 2^a$. Он положителен при $2^a < \frac{9}{4}$, равен нулю при $2^a = \frac{9}{4}$ и отрицателен при $2^a > \frac{9}{4}$.

Шаг 4. Следовательно, решений два при $a < \log_2 \left(\frac{9}{4} \right)$, одно при $a = \log_2 \left(\frac{9}{4} \right)$, ни одного при $a > \log_2 \left(\frac{9}{4} \right)$.

Проверка полноты. Положительность алгебраических корней доказана через Виета, поэтому ни один действительный корень по t не теряется при обратном переходе.

Ответ. 2 решения при $a < \log_2 \left(\frac{9}{4} \right)$; 1 при равенстве; 0 при $a > \log_2 \left(\frac{9}{4} \right)$.



Минимум равен $2 \cdot 2^{(a/2)}$; сравниваем его с 3, включая случай касания.

Задание 40

Найдите все a , при которых уравнение $\log_2^2 x - 2a \log_2 x + a + 2 = 0$ имеет ровно два различных решения на интервале $(1; 16)$.

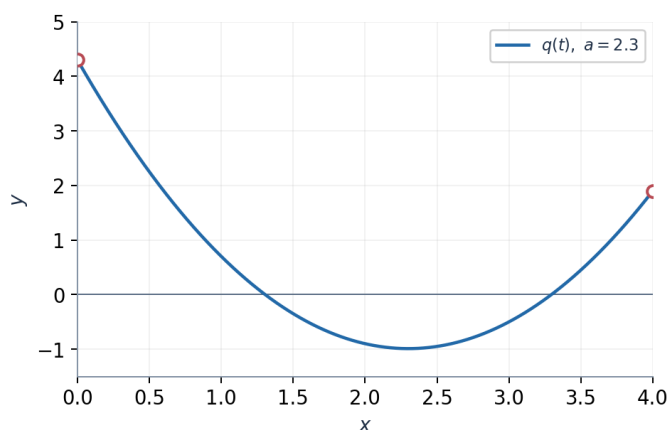
Шаг 1. При замене $t = \log_2 x$ интервал превращается в $0 < t < 4$. Нужны два различных корня $q(t) = t^2 - 2at + a + 2$ строго внутри $(0; 4)$.

Шаг 2. Необходимы и достаточны: вершина внутри интервала ($0 < a < 4$), два различных корня ($D/4 = a^2 - a - 2 > 0$), оба конца выше оси ($q(0) = a + 2 > 0$, $q(4) = 18 - 7a > 0$). Достаточность следует из того, что вершина ниже оси, а оба конца выше неё: по одному корню лежит с каждой стороны вершины.

Шаг 3. Условие дискриминанта даёт $a < -1$ или $a > 2$. Вместе с остальными получаем $2 < a < \frac{18}{7}$.

Границы. При $a = 2$ корень по t двойной, значит, решение по x одно. При $a = \frac{18}{7}$ один корень равен 4 и соответствует запрещённому концу $x = 16$.

Ответ. $a \in \left(2; \frac{18}{7}\right)$.



Для двух корней внутри $(0; 4)$ вершина должна быть ниже оси, оба конца — выше.



Параметр: обе граничные точки исключены.