



Урок 24. Рациональные неравенства: полное решение

Рациональные неравенства: полное решение. Правила, способы проверки и восемь пошаговых разборов.

01. Метод интервалов: откуда берутся знаки

Рациональное выражение - отношение многочленов. Между соседними нулями числителя и знаменателя каждый множитель сохраняет знак. Поэтому всё выражение имеет постоянный знак на таком интервале. Достаточно проверить одну точку внутри каждого интервала, но сами граничные точки рассматриваются отдельно.

Почему нельзя просто умножить на знаменатель

Для неравенства $(x - 4)/(x + 2) > 0$ знак $x + 2$ заранее неизвестен. При положительном знаменателе направление неравенства сохраняется, при отрицательном - меняется. Метод интервалов учитывает оба случая сразу. Сначала исключаем $x = -2$, затем отмечаем нуль числителя 4. На интервале $(-2; 4)$ числитель отрицателен, знаменатель положителен; дробь отрицательна. По краям знаки числителя и знаменателя совпадают, поэтому дробь положительна.

Кратность корня и отдельные точки

Множитель $(x - a)^2$ положителен по обе стороны от a , поэтому при переходе через эту точку знак не меняется. Но в самой точке множитель равен нулю. В нестрогом неравенстве такая точка может войти в ответ отдельно, даже если оба соседних интервала не подходят. При нечётной кратности знак меняется.

Если одинаковый множитель сократился, запрет исходного знаменателя сохраняется. Так, $(x - 1)/(x - 1) = 1$ лишь при $x \neq 1$. Для неравенства $(x - 1)/(x - 1) \geq 0$ ответом будет вся числовая прямая без единицы.

Проверка готового ответа

Возьмите по одной точке из каждого выбранного интервала и по одной из отвергнутых. Затем отдельно проверьте все конечные границы по исходному выражению. Бесконечность никогда не включается квадратной скобкой. Проверка отдельных точек помогает обнаружить ошибку, но не заменяет объяснения знаков на всех интервалах.

02. Почему сравниваем именно с нулём

Метод интервалов работает со знаком одного выражения. Поэтому все члены неравенства переносят в одну сторону и получают $F(x) > 0$, $F(x) \geq 0$, $F(x) < 0$ или $F(x) \leq 0$. Только после этого раскладывают числитель и знаменатель на множители.

Нельзя умножать рациональное неравенство на выражение с переменной, не зная его знак. Если безусловно умножить на $x - 2$, знак неравенства может сохраниться или измениться. Общий знаменатель и перенос в одну сторону обходят эту опасность.

Знак произведения и дроби определяется знаками множителей. Положительное число отрицательных множителей даёт положительный результат, нечётное - отрицательный. Метод интервалов систематизирует эту проверку на всей числовой прямой.

Полное решение содержит преобразование к нулю, факторизацию, ОДЗ, критические точки, знаки на каждом интервале, выбор промежутков и ответ. Если любой из этапов пропущен, трудно доказать, что интервалы выбраны полностью.

Неравенство сравнивают с нулём, потому что знак произведения или дроби определяется знаками множителей. Перенос всех слагаемых в одну сторону создаёт единую функцию $F(x)$, для которой находят нули и точки разрыва. Если сравнивать числитель и знаменатель по отдельности без общей дроби, легко потерять случаи. Первая строка полного решения должна иметь вид $F(x) \geq 0$ с одной рациональной дробью.

До преобразований выпишите ограничения исходного выражения. Знаменатель не может быть равен нулю даже тогда, когда такой же множитель затем сокращается. Сокращение меняет формулу, но не возвращает исключённую точку в область определения. На числовой прямой она остаётся выколотой.

Мини-пример показывает смысл переноса: условие $\frac{x+1}{x-2} > 3$ сначала превращают в $\frac{x+1}{x-2} - 3 > 0$, затем в $\frac{7-2x}{x-2} > 0$. Сравнить отдельно числители $x + 1$ и 3 нельзя, потому что знак знаменателя неизвестен. Общая дробь собирает всю информацию в одном выражении.

Перед общим знаменателем оцените степень будущего числителя. Если после раскрытия появилась степень выше ожидаемой, вероятно, лишний множитель внесён дважды. После сборки сравните исходное и новое выражения в одной допустимой точке.

$$A(x) \geq B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) \geq 0$$

Ключевые правила

- Все переносится в одну сторону.
- Не умножайте на выражение неизвестного знака.
- Сначала факторизация, затем числовая прямая.

03. Нули числителя и точки разрыва

Критические точки делят прямую на интервалы постоянного знака. Нули числителя обращают всё выражение в ноль. Нули знаменателя делают выражение неопределённым. На схеме их нужно различать: допустимый ноль можно закрасить при нестрогом знаке, точка разрыва всегда остаётся выколотой.

ОДЗ рационального выражения запрещает только нули знаменателя. Нули числителя допустимы, если знаменатель в этой точке не равен нулю. При строгом неравенстве они не входят в ответ, потому что значение выражения равно нулю, а требуется строго положительное или строго отрицательное.

Если одинаковый множитель есть в числителе и знаменателе, сокращение возможно лишь с сохранением запрета исходного знаменателя. Точка после сокращения остаётся выколотой. Поэтому ОДЗ записывают до сокращения.

Критические точки располагаются по возрастанию. Ошибка в порядке точек автоматически портит всю таблицу знаков, поэтому полезно отдельно проверить отрицательные числа и дроби.

Нули числителя и знаменателя играют разные роли. В нуле числителя дробь может равняться нулю, поэтому при нестрогом знаке точка включается. В нуле знаменателя выражение не определено и точка исключается всегда. На схеме первые точки отмечают кандидатами на включение, вторые - пустыми.

Если один множитель есть и в числителе, и в знаменателе, его можно сократить для анализа знака, но исходную точку разрыва сохраняют отдельно. Ответ упрощённого неравенства затем пересекают с исходным ОДЗ.

Для списка критических точек полезна таблица происхождения: значение, множитель, числитель или знаменатель, кратность. Например, точка 2 может быть нулём числителя после сокращения и одновременно исходным разрывом; решающим остаётся разрыв. Такая таблица предотвращает ошибочную закрашенную точку в ответе.

Упорядочивайте критические точки только после их точного вычисления. Для дробей и радикалов используйте сравнение квадратов или общий знаменатель, а не грубое округление: неверный порядок полностью меняет интервалы.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0, \quad Q(x) \neq 0$$

Ключевые правила

- Нуль знаменателя никогда не входит в ответ.
- Нуль числителя входит только при нестрогом знаке.
- Сокращённый множитель не возвращает запрещённую точку.

Разбор 1. Нуль и полюс

УСЛОВИЕ

Решите $\frac{x-4}{x+2} > 0$.

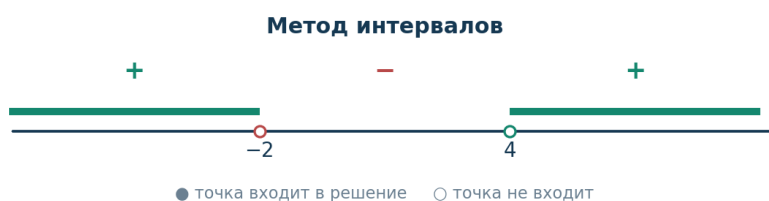


Figure 1: Разбор 1. Нуль и полюс

1. ОДЗ: $x \neq -2$.
2. Критические точки: -2 - полюс, 4 - нуль.
3. На интервалах знаки равны $+$, $-$, $+$.
4. Для строгого положительного знака критические точки не входят.
5. Ответ: $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

ОТВЕТ.

$(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\frac{x+3}{x-1} \leq 0$.

ОДЗ: $x \neq 1$.

Критические точки -3 и 1 .

Выбираем отрицательный интервал и включаем нуль числителя.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$[-3; 1)$

04. Знак линейного множителя

Множитель $x - a$ отрицателен слева от a и положителен справа. Множитель $a - x = -(x - a)$ имеет противоположные знаки. Если выражение записано в виде произведения стандартных множителей $x - a$, знаки удобно начинать справа: при положительном старшем коэффициенте справа стоит плюс.

Для проверки можно взять по одной пробной точке из каждого интервала. Подставлять точные большие значения не нужно: достаточно определить знак каждого множителя. Например, при $x = 0$ множитель $x - 3$ отрицателен, а $x + 2$ положителен.

Знак дроби определяется так же, как знак произведения: одинаковые знаки числителя и знаменателя дают плюс, разные - минус. Деление на отрицательное число меняет знак, но в таблице это учитывается автоматически.

После освоения схема знаков строится без пробных точек на каждом интервале: при проходе через простой корень знак меняется. Однако хотя бы одну контрольную подстановку следует сделать, чтобы проверить начальный знак.

Знак множителя $x - a$ отрицателен слева от a и положителен справа. Для $a - x$ картина противоположна. Вместо механического чередования можно взять контрольную точку на каждом интервале. Общий отрицательный коэффициент переворачивает знак всего выражения; его отмечают отдельно и не теряют при факторизации.

Контрольные числа выбирают простыми и не совпадающими с критическими точками. Подставлять их достаточно в факторизованный знак, не вычисляя точное значение дроби. Чётное число отрицательных множителей даёт плюс, нечётное - минус.

Если множитель имеет вид $3 - 2x$, его ноль равен $\frac{3}{2}$, а знак справа отрицателен. Можно вынести минус: $3 - 2x = -2(x - \frac{3}{2})$. Тогда коэффициент -2 учитывается один раз, а стандартный множитель $x - \frac{3}{2}$ читается привычно. Оба способа должны дать одинаковую таблицу.

Знак каждого множителя можно записать отдельной строкой. В сложном произведении это медленнее одной общей схемы, но даёт прозрачный контроль и полезно на первых тренировках метода интервалов.

$$x < a \Rightarrow x - a < 0, \quad x > a \Rightarrow x - a > 0$$

Ключевые правила

- $x - a < 0$ слева от a и $x - a > 0$ справа.
- Начальный знак можно проверить одной пробной точкой.
- Для простого корня знак меняется.

Разбор 2. Квадратный трёхчлен в множителях

УСЛОВИЕ

Решите $(x - 2)(x + 3) \geq 0$.

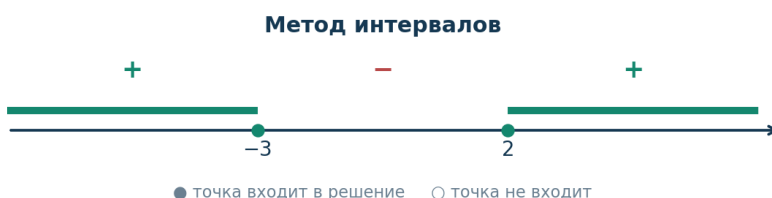


Figure 2: Разбор 2. Квадратный трёхчлен в множителях

1. Критические точки: -3 и 2 .
2. Оба корня простые, поэтому знак меняется в каждой точке.
3. Справа знак плюс; получаем последовательность $+$, $-$, $+$.
4. При нестрогом знаке оба нуля включаются.
5. Ответ: $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

ОТВЕТ.

$(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $(x - 5)(x + 1) \leq 0$.

Критические точки -1 и 5 .

Знаки $+$, $-$, $+$.

Выбираем средний интервал и включаем нули.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

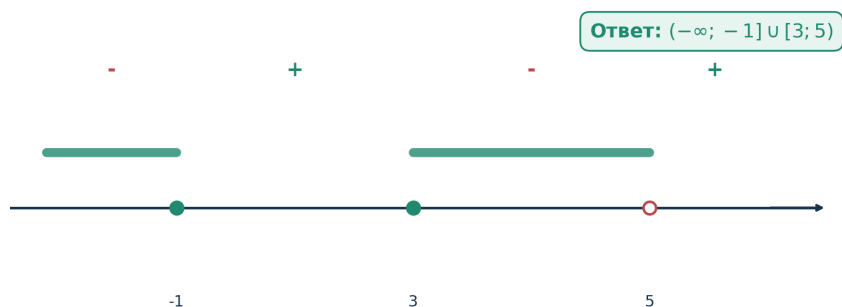
$[-1; 5]$

Разбор 3. Три простых критических точки

УСЛОВИЕ

Решите $\frac{(x+1)(x-3)}{x-5} \leq 0$.

Знаки рационального выражения



ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Figure 3: Разбор 3. Три простых критических точки

1. ОДЗ: $x \neq 5$; нули числителя -1 и 3 .
2. Порядок точек: $-1 < 3 < 5$.
3. Все множители простые, поэтому знаки чередуются: $-$, $+$, $-$, $+$.
4. Выбираем минус и включаем нули числителя.
5. Ответ: $(-\infty; -1] \cup [3; 5)$.

ОТВЕТ.

$(-\infty; -1] \cup [3; 5)$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\frac{(x-2)(x+4)}{x+1} \geq 0$.

Критические точки -4 , -1 , 2 .

Знаки $-$, $+$, $-$, $+$.

Ответ $[-4; -1) \cup [2; +\infty)$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$[-4; -1) \cup [2; +\infty)$

05. Кратность корня и сохранение знака

Если множитель входит в чётной степени, например $(x - 2)^2$, он не меняет знак при переходе через 2 . Выражение касается нуля и возвращается к прежнему знаку. При нечётной степени знак меняется.

Кратность важна и для знаменателя. Через точку, где знаменатель содержит $(x - a)^2$, знак дроби не меняется, но сама точка остаётся выколотой. На рисунке линия решения прерывается в этой точке.

Не нужно раскрывать квадратный множитель. Факторизованный вид сразу показывает корень и его кратность. Раскрытие скобок делает таблицу знаков менее прозрачной и увеличивает риск арифметической ошибки.

Если один и тот же корень возникает в нескольких множителях, складываются их кратности после учёта сокращения. Но исходные запреты знаменателя сохраняются.

При корне нечётной кратности знак множителя меняется, при корне чётной - сохраняется. Это следует из поведения степеней: $(x - a)^2$ неотрицателен по обе стороны, а $(x - a)^3$ имеет знак $x - a$. В таблице чётный корень нельзя проходить автоматическим чередованием.

Кратность определяют после полного разложения и сокращения, но точку исходного разрыва всё равно исключают. Поэтому отдельно хранят ОДЗ и отдельно - упрощённую функцию знаков.

Корень чётной кратности может входить в ответ одиночной точкой при нестрогом знаке, если по соседству функция имеет противоположный требуемому знак. Например, квадратный множитель может касаться нуля, не создавая целого положительного интервала. Поэтому после выбора знаков отдельно проверяют допустимые нули числителя.

Точка чётной кратности визуально похожа на касание графика оси. Функция достигает нуля и возвращается в ту же полуплоскость. Эта графическая модель объясняет сохранение знака без механического правила.

$$(x - a)^{2k} \geq 0$$

$$(x - a)^{2k+1} \text{ меняет знак при } x = a$$

Ключевые правила

- Чётная кратность - знак сохраняется.
- Нечётная кратность - знак меняется.
- Точка разрыва выколота при любой кратности.

Разбор 4. Чётная кратность

УСЛОВИЕ

Решите $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-4} \geq 0$.



Figure 4: Разбор 4. Чётная кратность

1. ОДЗ: $x \neq 4$; нули -1 и 2 , причём 2 имеет чётную кратность.
2. Справа знак плюс; через 4 знак меняется, через 2 сохраняется, через -1 меняется.
3. Получаем знаки $+$, $-$, $-$, $+$ слева направо.
4. Выбираем неотрицательные значения; оба нуля числителя включаем, полюс исключаем.
5. Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$.

ОТВЕТ.

$$(-\infty; -1] \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $(x+3)^2(x-1) \leq 0$.

Нули -3 кратности 2 и 1 кратности 1.

Знак не меняется в -3 и меняется в 1 .

Ответ $\{-3\} \cup (-\infty; 1]$; точка -3 уже лежит в интервале, поэтому итог $(-\infty; 1]$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

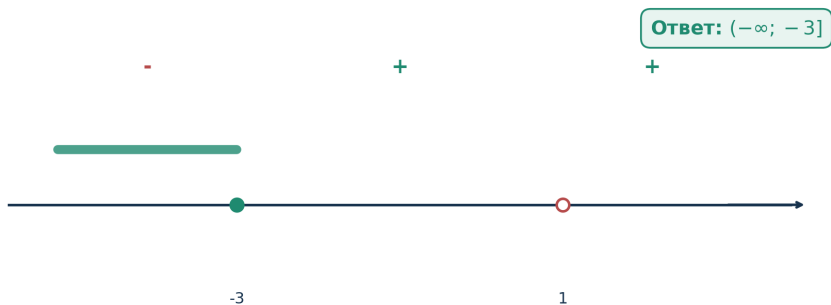
$$(-\infty; 1]$$

Разбор 5. Чётный полюс

УСЛОВИЕ

Решите $\frac{x+3}{(x-1)^2} \leq 0$.

Знаки рационального выражения



ПОДПИСАННАЯ СХЕМА

Figure 5: Разбор 5. Чётный полюс

1. ОДЗ: $x \neq 1$; нуль числителя -3 .
2. Знаменатель положителен при всех допустимых x и не меняет знак через 1 .
3. Знак дроби определяется числителем: отрицателен слева от -3 , равен нулю при -3 .
4. Полюс 1 не влияет на выбранную левую часть, но остаётся запрещённым.
5. Ответ: $(-\infty; -3]$.

ОТВЕТ.

$$(-\infty; -3]$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\frac{x-2}{(x+1)^2} \geq 0$.

ОДЗ: $x \neq -1$.

Знаменатель положителен.

Числитель неотрицателен при $x \geq 2$, ответ $[2; +\infty)$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$[2; +\infty)$$

06. Многочлен в числителе: сначала разложение

Квадратный трёхчлен перед методом интервалов раскладывают на линейные множители. Если корни равны x_1 и x_2 , то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Знак старшего коэффициента нельзя терять.

Формулы сокращённого умножения часто дают разложение быстрее дискриминанта: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, $x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$. Квадрат сразу показывает чётную кратность.

Если многочлен не имеет действительных корней и старший коэффициент положителен, он положителен на всей прямой. Такой множитель не создаёт критических точек, но может влиять на общий знак постоянным плюсом.

После факторизации сравните результат с исходным выражением, раскрыв только крайние коэффициенты или подставив простое значение. Неверный знак одного множителя переворачивает выбранные интервалы.

Квадратный трёхчлен раскладывают как $a(x - x_1)(x - x_2)$. Если дискриминант отрицателен, корней нет, а знак совпадает со знаком старшего коэффициента. Если дискриминант равен нулю, возникает корень чётной кратности. Эти случаи уменьшают число критических точек.

До формулы корней проверяют разность квадратов, квадрат суммы и общий множитель. После разложения полезно восстановить старший и свободный коэффициенты, чтобы подтвердить отсутствие ошибки знака.

Если квадратный трёхчлен не раскладывается на целые множители, это не повод переходить к десятичным приближениям. Точные корни по дискриминанту упорядочивают на прямой. При громоздких радикалах знак можно определить по старшему коэффициенту и кратностям, не подставляя сложные контрольные числа.

Если квадратный множитель всегда положителен, его можно исключить из анализа знака, но не из обсуждения нулей, если он способен обратиться в ноль. При строгом неравенстве такая точка исключается.

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ключевые правила

- Сохраняйте старший коэффициент.
- Используйте ФСУ до вычисления дискриминанта.
- Критические точки создают только действительные нули и полюса.

07. Общий знаменатель без потери ОДЗ

Если в неравенстве несколько дробей, сначала выпишите нули всех исходных знаменателей. Затем перенесите всё в одну сторону и приведите к общему знаменателю. Полученная дробь должна быть упрощена и разложена на множители.

Знак общего знаменателя не предполагается положительным. Именно поэтому после сложения дробей метод интервалов применяется ко всей дроби. Нельзя просто умножить обе части на общий знаменатель.

При сокращении общий множитель может исчезнуть из формулы, но соответствующая запрещённая точка остаётся на числовой прямой. В ответе возле неё всегда круглая скобка.

Проверка общего знаменателя: умножьте каждый новый числитель на недостающие множители и убедитесь, что все исходные слагаемые восстановлены. Ошибки здесь чаще связаны не с методом интервалов, а с обычным сложением дробей.

При общем знаменателе каждое слагаемое умножают на недостающий множитель. Числитель приводят и снова раскладывают, знаменатель оставляют факторизованным. Развёрнутая большая дробь скрывает критические точки и затрудняет таблицу.

Умножать неравенство на выражение с переменной без анализа знака нельзя. Метод интервалов оставляет знаменатель на месте и учитывает его знак. Умножение на заведомо положительный квадрат возможно, но точки ОДЗ всё равно сохраняются.

После приведения к общему знаменателю проверьте равенство числителя в одной простой допустимой точке. Подстановка $x = 0$ или $x = 1$ в исходную разность и в полученную дробь быстро обнаруживает потерянный знак или множитель. Точка не должна обращаться в ноль исходного знаменателя.

ОДЗ исходных дробей записывают до объединения. Даже если общий знаменатель содержит больше множителей, запрещёнными являются все его нули; возможные сокращения не отменяют исходные ограничения.

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD}, \quad B \neq 0, D \neq 0$$

Ключевые правила

- ОДЗ записывается по исходным знаменателям.
- Общий знаменатель не считается положительным.
- После сокращения запрещённые точки сохраняются.

Разбор 6. Два полюса

УСЛОВИЕ

Решите $\frac{x-1}{(x+2)(x-4)} < 0$.

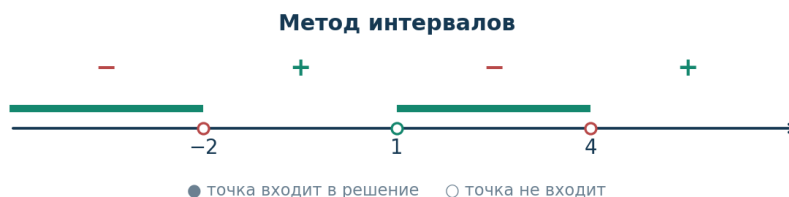


Figure 6: Разбор 6. Два полюса

1. ОДЗ: $x \neq -2$, $x \neq 4$; нуль числителя 1.
2. Критические точки: $-2 < 1 < 4$.
3. Все кратности нечётные, поэтому знаки чередуются: $-$, $+$, $-$, $+$.
4. Выбираем отрицательные интервалы; все границы при строгом знаке исключаются.
5. Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; 4)$.

ОТВЕТ.

$(-\infty; -2) \cup (1; 4)$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\frac{x+2}{(x-1)(x-5)} > 0$.

Критические точки $-2, 1, 5$.

Знаки $-$, $+$, $-$, $+$.

Ответ $(-2; 1) \cup (5; +\infty)$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$(-2; 1) \cup (5; +\infty)$

08. Строгие и нестрогие знаки

При $F(x) > 0$ или $F(x) < 0$ все критические точки записываются круглыми скобками. При $F(x) \geq 0$ или $F(x) \leq 0$ нули числителя могут включаться квадратными скобками, а нули знаменателя по-прежнему исключаются.

Фраза «выбираем плюс» недостаточна, если не указано, что делать с нулями. Перед записью ответа ещё раз посмотрите на исходный знак. Равенство в значке определяет включение допустимых нулей.

Бесконечность всегда записывается с круглой скобкой. Символ бесконечности не является числом и не может принадлежать множеству решений.

Изолированный корень возможен при нестрогом неравенстве и чётной кратности, когда вокруг него знак не подходит. Тогда в ответе появляется одноточечное множество. Такие случаи полезно видеть по таблице, а не пытаться угадывать по формуле.

Строгое неравенство исключает нули функции, нестрогое включает допустимые нули числителя. Точки разрыва не включаются никогда. После таблицы пройдите по каждой границе: определено ли выражение и разрешено ли равенство знаком задачи?

Бесконечность не является числом и всегда имеет круглую скобку. Несколько промежутков объединяют знаком объединения. Квадратная скобка у конечной точки - отдельное утверждение о её принадлежности.

Запись интервала отвечает одновременно за знак и границы. Если при условии ≥ 0 точка числителя включена, ставят квадратную скобку; при > 0 - круглую. У точки знаменателя всегда круглая. После записи прочитайте ответ словами: «от ... до ..., включая или не включая границы». Так легче заметить несогласованный символ.

Для ответа вида одного луча проверьте направление на очень большом положительном или отрицательном числе. Старшие степени дают быструю оценку и помогают заметить, если выбран противоположный луч.

$$F(x) > 0 : \text{ нули не входят}$$

$$F(x) \geq 0 : \text{ допустимые нули входят}$$

Ключевые правила

- Квадратная скобка возможна только у допустимого нуля числителя.
- Возле бесконечности всегда круглая скобка.
- Исходный строгий или нестрогий знак проверяется перед ответом.

09. Системы рациональных неравенств

Система требует одновременного выполнения всех условий. Каждое неравенство можно решить отдельно, затем пересечь полученные множества. На общей числовой прямой остаются только участки, отмеченные во всех строках.

Совокупность, напротив, требует выполнения хотя бы одного условия и приводит к объединению множеств. В условии задания 15 чаще встречается одно сложное неравенство, но различие систем и совокупностей необходимо для промежуточных преобразований.

Если одно условие системы задаёт ОДЗ, не превращайте его в отдельную декоративную строку. Оно реально участвует в пересечении и может удалить границу или целый интервал.

Ответ системы удобно проверять одной точкой из каждого оставшегося компонента и отдельной проверкой границ. Для исключённых промежутков достаточно понимать, какое условие нарушается.

Система требует выполнения всех условий, поэтому решения пересекают. Удобно решить каждое неравенство отдельно и изобразить множества на разных строках. В совокупности достаточно одного условия, поэтому множества объединяют. Логические слова «и» и «или» определяют операцию не меньше, чем сами формулы.

Если одно условие полностью содержится в другом, пересечение равно меньшему множеству. Если множества не пересекаются, система решений не имеет. Эти выводы лучше сделать по числовым прямым, чем по памяти.

Пересечение можно выполнять по границам: левая граница результата является более строгой из левых, правая - более строгой из правых. Но при объединениях и выколотых точках безопаснее использовать прямые. Если одно множество состоит из двух лучей, пересечение рассматривают для каждого луча отдельно.

В системе точка принадлежит ответу только тогда, когда проходит каждое условие и все ОДЗ. Проверка одной формулы не подтверждает принадлежность всей системе.

$$X_{\text{системы}} = X_1 \cap X_2$$

$$X_{\text{совокупности}} = X_1 \cup X_2$$

Ключевые правила

- Система - пересечение, совокупность - объединение.
- ОДЗ участвует в пересечении наравне с другими условиями.
- Границы проверяются в каждом исходном условии.

10. Как проверять таблицу знаков

Первую проверку выполняют справа от всех критических точек. При больших положительных x каждый стандартный множитель $x - a$ положителен, поэтому знак определяется старшим коэффициентом. Затем при переходе через каждую точку знак меняется только при нечётной кратности.

Вторую проверку выполняют подстановкой простой точки, например 0, если она не критическая. Нужно определить только знак, а не точное значение. Совпадение с таблицей подтверждает порядок точек и начальный знак.

Третья проверка относится к границам. Для каждой квадратной скобки убедитесь, что это нуль числителя и знаменатель не равен нулю. Для каждой точки разрыва убедитесь, что она исключена даже после сокращения.

Наконец, сравните характер ответа с поведением степени. Если числитель имеет на одну степень больше знаменателя и старший коэффициент положителен, справа выражение положительно. Эта оценка помогает заметить полностью перевёрнутую таблицу.

Таблицу знаков проверяют двумя способами: контрольной точкой на каждом интервале и правилом кратностей. Если способы расходятся, ошибка находится в разложении, порядке точек или отрицательном коэффициенте. Для крайнего правого интервала знак можно оценить по старшим множителям.

После выбора интервалов подставьте одно число из решения и одно из соседнего отвергнутого промежутка в исходное неравенство. Такая проверка обнаруживает перевёрнутый знак и ошибочную скобку быстрее полного повторного решения.

При большом числе множителей знак правого интервала равен знаку отношения старших коэффициентов. Двигаясь влево, меняйте его у каждой точки нечётной кратности. Затем выборочно подтвердите один интервал подстановкой. Такое сочетание структуры и числового контроля быстрее, чем полное вычисление на каждом промежутке.

Таблица должна содержать все интервалы, включая крайние лучи. Пропуск левого или правого луча - частая причина неполного ответа, особенно когда критических точек много.

$$x \rightarrow +\infty : \text{знак определяется старшими коэффициентами}$$

Ключевые правила

- Проверьте знак справа по старшим членам.
- Подставьте одну удобную контрольную точку.
- Отдельно проверьте каждую включённую и исключённую границу.

11. Полная запись задания 15

В экзаменационной работе решение должно быть воспроизводимым. После преобразования к одной дроби запишите ОДЗ, разложение на множители и критические точки. Нарисуйте числовую прямую с нулями и полюсами, подпишите знаки всех интервалов и только затем перенесите выбранные промежутки в ответ.

Слишком подробная арифметика не заменяет логики. Не нужно подставлять пять больших чисел, если изменение знака объясняется кратностью. Но нельзя ставить знаки без любого обоснования: достаточно одной контрольной точки и правила перехода через корни.

Ответ пишется как объединение промежутков по возрастанию. Квадратные и круглые скобки должны соответствовать решению, а не внешнему виду шаблона. Если решений нет, используется знак пустого множества.

Контрольный алгоритм: одна сторона - ноль; факторизация; ОДЗ; критические точки; знаки; границы; ответ. Если все семь пунктов видны, решение обычно устойчиво к проверке и легко исправляется при найденной арифметической ошибке.

Полная запись задания 15 содержит ОДЗ, перенос к нулю, общий знаменатель, факторизацию, критические точки, знаки и итоговые интервалы. Фраза «по методу интервалов» без разметки не показывает, где учтены разрывы и кратности.

Окончательный ответ сверяют с исходным выражением, а не только с сокращённой дробью. Особое внимание уделяют точкам, в которых сокращался общий множитель: они могут выглядеть обычными на новой формуле, но остаются запрещёнными.

В конце проверьте, не потерялась ли исходная формулировка. Если требовалось найти наименьшее целое решение, после получения множества нужно выбрать соответствующее целое. Если спрашивалась сумма целых решений на отрезке, сначала пересекают ответ с отрезком. Решённое неравенство - промежуточный результат, а не всегда окончательный ответ задачи.

После завершения перечитайте знак исходной задачи. Верно построенная таблица для положительных значений даёт неверный ответ, если условие требовало отрицательные. Это простая, но обязательная финальная проверка. Затем сопоставьте количество частей ответа с таблицей: каждый выбранный знак должен иметь отражение в записанном множестве.

ноль $\rightarrow$ множители $\rightarrow$ ОДЗ $\rightarrow$ знаки $\rightarrow$ ответ

Ключевые правила

- В решении видны критические точки и знаки всех интервалов.
- Ответ записывается по возрастанию.
- Каждая скобка имеет математическое объяснение.

12. Типичные ошибки и способы самопроверки

- Умножать неравенство на знаменатель неизвестного знака.
- Не переносить всё выражение в одну сторону.
- Путать ноль числителя с нулём знаменателя.
- Включать точку разрыва при нестрогом знаке.
- Исключать допустимый ноль числителя при $\geq$ или $\leq$.
- Менять знак через корень чётной кратности.
- Терять запрет после сокращения общего множителя.
- Ставить квадратную скобку возле бесконечности.
- Записывать ответ без доказанной таблицы знаков.

13. Дополнительные разборы

Разбор 7. Рациональное неравенство после показательной замены

УСЛОВИЕ

Решите неравенство.

$$\frac{2}{3^x + 27} \geq \frac{1}{3^x - 27}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. Замена $t = 3^x$ переводит задачу в рациональное неравенство, но добавляет условие $t > 0$.

ДО РЕШЕНИЯ. Знаменатель $3^x - 27$ не равен нулю, поэтому $x \neq 3$.

1. Вводим замену

$$t = 3^x > 0, \quad t \neq 27$$

Показательная функция положительна.

2. Переносим влево

$$\frac{2}{t + 27} - \frac{1}{t - 27} = \frac{t - 81}{(t + 27)(t - 27)} \geq 0$$

Приводим дроби к общему знаменателю.

3. Учитываем t+27

$$\frac{t - 81}{t - 27} \geq 0$$

При $t > 0$ множитель $t + 27$ всегда положителен.

4. Применяем интервалы

$$t \in (0; 27) \cup [81; +\infty)$$

27 - полюс, 81 - допустимый нуль числителя.

5. Возвращаемся к x

$$x < 3 \quad \text{или} \quad x \geq 4$$

3^x возрастает, $27 = 3^3$ и $81 = 3^4$.

Проверка. $x=0$ подходит; $x=3$ запрещён; $x=4$ даёт равенство.

Типичная ошибка. Перемножить обе части на неизвестный по знаку знаменатель без метода интервалов.

ОТВЕТ. $(-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$

Разбор 8. Три критические точки после показательной замены

УСЛОВИЕ

Решите неравенство.

$$\frac{4}{3^x - 27} \geq \frac{1}{3^x - 9}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. После общей дроби отдельно отмечаем нуль числителя и оба нуля знаменателя.

ДО РЕШЕНИЯ. ОДЗ исходного выражения: $x \neq 2$ и $x \neq 3$.

1. Делаем замену

$$t = 3^x > 0, \quad t \neq 9, 27$$

Значения 9 и 27 обращают знаменатели в ноль.

2. Собираем дробь

$$\frac{4}{t-27} - \frac{1}{t-9} = \frac{3(t-3)}{(t-27)(t-9)} \geq 0$$

Числитель равен $4(t-9)-(t-27)=3(t-3)$.

3. Расставляем точки

$$3 < 9 < 27$$

Точка 3 - нуль числителя, 9 и 27 - полюса.

4. Выбираем знаки

$$t \in [3; 9) \cup (27; +\infty)$$

Ноль 3 включаем, полюса исключаем.

5. Возвращаемся к x

$$x \in [1; 2) \cup (3; +\infty)$$

$3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$; основание больше единицы.

Проверка. $x=1$ даёт равенство; $x=2$ и $x=3$ исключены исходными знаменателями.

Типичная ошибка. Включить $x=2$ или $x=3$ из-за нестрогого знака: точки разрыва не включаются никогда.

ОТВЕТ. $[1; 2) \cup (3; +\infty)$