

Урок 13. Прикладные расчёты по формуле

В задачах с формулами важно согласовать единицы, правильно подставить данные и выразить неизвестную величину. Разберём расчёты пути, энергии, давления, процентов и степенных зависимостей. Восемь примеров сопровождаются проверкой единиц и результата.

01. Формула как инструкция вычисления

Формула связывает величины: часть из них известна, одну нужно найти. Перед подстановкой выпишите, какая буква означает искомое, и прочитайте единицы каждого данного. Число 2,5 может означать часы, киловатты или сантиметры; одинаковая запись не делает величины взаимозаменяемыми.

Последовательность действий: согласовать единицы, заменить буквы числами, сохранить скобки, выполнить степени и корни, затем умножение, деление и оставшиеся действия. Например, в $mv^2/2$ квадрат относится только к скорости, а не ко всему произведению.

Главное правило. Числовой ответ имеет смысл вместе с единицами. Для сложения величины должны быть выражены в одинаковых единицах.

02. Как выразить неизвестную величину

К обеим частям равенства применяют одно и то же действие. Из $s = vt$ при $v \neq 0$ получаем $t = s/v$. Из $P = UI$ при $U \neq 0$ следует $I = P/U$. Условие ненулевого делителя нужно даже тогда, когда в числовом примере оно выполнено автоматически.

Если неизвестная находится в знаменателе, сначала умножают на него с учётом области допустимых значений. Из $R = \rho l/S$ при ненулевых R и S получается $S = \rho l/R$. Проверка обратной подстановкой надёжнее механического «переноса буквы».

Квадрат создаёт два алгебраических кандидата. Но радиус и модуль скорости неотрицательны, поэтому из $S = \pi r^2$ для положительной площади берут $r = \sqrt{S/\pi}$. В задаче о координате отрицательное значение, напротив, может быть допустимо: решение отбирают по смыслу искомой величины.

03. Перевод единиц

Переход	Действие	Почему
км/ч → м/с	Разделить на 3,6	$1000/3600 = 1/3,6$
м/с → км/ч	Умножить на 3,6	Обратное преобразование
кВт → Вт	Умножить на 1000	Приставка «кило»
см ² → м ²	Разделить на 10 000	Меняются две длины

В формуле кинетической энергии $E = mv^2/2$ джоули получаются при массе в килограммах и скорости в метрах в секунду. Если ответ нужен в км/ч, сначала найдите скорость в

согласованных единицах, а затем переведите результат. Нельзя подставить километры в час и исправить только подпись ответа.

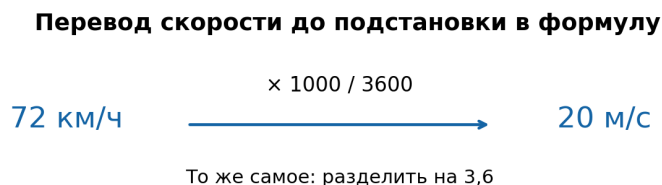


Рис. 1: Перевод скорости: $72 \text{ км/ч} = 72 \cdot 1000 / 3600 \text{ м/с} = 20 \text{ м/с}$.

04. Проценты и повторяющиеся изменения

Процент нужно перевести в долю: $10\% = 0,1$. При каждом увеличении на 10% текущая величина умножается на 1,1, при уменьшении - на 0,9. После n одинаковых изменений коэффициент возводится в степень.

Если увеличение каждый год считается от **первоначальной** суммы, прибавка постоянна и используется $N = N_0(1 + pn)$. Если от текущей, используется $N = N_0(1 + p)^n$. Это разные модели. В заданиях урока встречаются обе; выбор определяется словами условия.

В модели $B = B_0 \cdot 2^{t/3}$ число $t/3$ обозначает количество периодов удвоения. При $t = 6$ произошло два удвоения, а не шесть. Аналогично множитель $(1/2)^{t/3}$ описывает уменьшение вдвое за каждый период из трёх единиц времени.

05. Ограничения и несколько ответов

Фраза «не должна превышать» переводится знаком $\leq$. При положительном напряжении 220 В ограничение $P \leq 2200$ и формула $P = 220I$ дают $I \leq 10$. Если просят максимальный ток, в ответ идёт граничное значение 10 А.

Квадратная зависимость может давать два момента времени для одной высоты: один при подъёме, второй при спуске. Сохраните оба неотрицательных корня, если условие не ограничивает этап движения. При наличии ограничения на время проверьте каждый корень отдельно.

06. Оценка и точность

Сначала проверьте порядок величины. Если удвоить радиус, площадь круга вырастет в четыре раза, а длина окружности - в два. Если удвоить скорость, кинетическая энергия вырастет в четыре раза при неизменной массе. Эти проверки помогают заметить потерянный квадрат.

Используйте значение π , прямо указанное в условии. Не округляйте дроби и корни раньше последнего действия. Если точность не задана, сохраняйте точное значение, а десятичное приближение подписывайте отдельно.

07. Подробные объяснения и разобранные примеры

Разбор 1. Прямая подстановка в формулу пути**УСЛОВИЕ**

Автомобиль движется равномерно со скоростью 72 км/ч в течение 2,5 часа. Найдите путь.

$$s = vt$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Если искомая величина уже стоит слева, подставляем согласованные данные и выполняем действия по порядку.

ДО РЕШЕНИЯ.

За 2 часа автомобиль проедет 144 км, ещё за полчаса - 36 км; ответ должен быть около 180 км.

1. Выписываем данные

$$v = 72 \text{ км/ч}, \quad t = 2,5 \text{ ч}$$

Скорость и время уже согласованы по часам.

2. Подставляем

$$s = 72 \cdot 2,5$$

Каждую букву заменяем её числом.

3. Вычисляем удобным способом

$$72 \cdot 2,5 = 72 \cdot \frac{5}{2} = 36 \cdot 5 = 180$$

Десятичную дробь заменяем обыкновенной.

4. Приписываем единицу

$$s = 180 \text{ км}$$

$$\text{км/ч} \cdot \text{ч} = \text{км}.$$

Проверка. $180 = 144 + 36$, что совпадает с предварительной оценкой.

Типичная ошибка. Делить скорость на время или оставить ответ без единицы.

ОТВЕТ. 180 км; в краткий ответ записывается число 180.

$$180$$

Разбор 2. Квадрат величины в формуле энергии

УСЛОВИЕ

Найдите кинетическую энергию тела массой 4 кг, движущегося со скоростью 3 м/с.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Степень относится только к скорости v : сначала вычисляем v^2 , затем умножаем на массу и делим на 2.

ДО РЕШЕНИЯ.

Все данные уже в СИ; перевод единиц не нужен.

1. Подставляем с обозначениями

$$E_k = \frac{4 \cdot 3^2}{2}$$

$m=4$, $v=3$.

2. Вычисляем квадрат

$$3^2 = 9$$

Степень выполняется раньше умножения.

3. Завершаем расчёт

$$E_k = \frac{4 \cdot 9}{2} = 18$$

Можно сначала сократить $4/2$ до 2.

4. Записываем единицу

$$E_k = 18 \text{ Дж}$$

Кинетическая энергия измеряется в джоулях.

Проверка. При удвоении скорости энергия выросла бы в 4 раза - формула действительно квадратичная по v .

Типичная ошибка. Возвести в квадрат всё произведение mv или заменить 3^2 на 6.

ОТВЕТ.

18

Разбор 3. Выражаем ускорение из второго закона Ньютона**УСЛОВИЕ**

На тело массой 12 кг действует сила 84 Н. Найдите ускорение.

$$F = ma$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Чтобы оставить a в одиночестве, делим обе части равенства на множитель m .

ДО РЕШЕНИЯ.

84 больше 12 в 7 раз, поэтому ожидаем ускорение 7 м/с².

1. Выражаем неизвестную

$$a = \frac{F}{m}$$

В исходной формуле a умножается на m .

2. Подставляем

$$a = \frac{84}{12}$$

Числитель - сила, знаменатель - масса.

3. Вычисляем

$$a = 7$$

$$12 \cdot 7 = 84.$$

4. Проверяем формулой

$$12 \cdot 7 = 84$$

Обратная подстановка восстанавливает данную силу.

Проверка. Н·кг⁻¹ = м/с², единица согласована.

Типичная ошибка. Найти m/F вместо F/m .

ОТВЕТ. 7 м/с²; в краткий ответ записывается число 7.

$$7$$

Разбор 4. Перевод площади перед подстановкой**УСЛОВИЕ**

Сила 500 Н действует равномерно на площадь 250 см². Найдите давление в паскалях.

$$p = \frac{F}{S}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Для паскалей площадь нужна в м^2 . При переводе квадратных единиц коэффициент 100 тоже возводится в квадрат.

ДО РЕШЕНИЯ.

250 см^2 - это $0,025 \text{ м}^2$, а не $2,5 \text{ м}^2$ и не $0,25 \text{ м}^2$.

1. Переводим площадь

$$250 \text{ см}^2 = 250 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,025 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2.$$

2. Подставляем

$$p = \frac{500}{0,025}$$

Теперь единицы соответствуют определению паскаля.

3. Убираем десятичный знаменатель

$$p = \frac{500000}{25} = 20000$$

Умножаем числитель и знаменатель на 1000.

4. Записываем единицу

$$p = 20000 \text{ Па}$$

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2.$$

Проверка. Площадь мала, поэтому давление заметно больше 500 Па; порядок результата разумен.

Типичная ошибка. Использовать 250 в формуле с паскалями, не переведя см^2 в м^2 .

ОТВЕТ.

$$20000$$

Разбор 5. Процент внутри степенной формулы**УСЛОВИЕ**

На счёт внесли 50 000 рублей под 10% годовых с ежегодной капитализацией. Какая сумма будет через 2 года?

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Процент r сначала переводим в долю $r/100$; скобку возводим в степень числа периодов.

ДО РЕШЕНИЯ.

Без капитализации прибавилось бы 10 000 рублей; с капитализацией итог немного больше 60 000.

1. Подставляем данные

$$A = 50000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

$P=50000$, $r=10$, $n=2$.

2. Упрощаем скобку

$$1 + \frac{10}{100} = 1,1$$

10%=0,1 от текущей суммы.

3. Возводим в квадрат

$$1,1^2 = 1,21$$

Капитализация происходит дважды.

4. Вычисляем итог

$$A = 50000 \cdot 1,21 = 60500$$

Во второй год проценты начисляются и на проценты первого года.

Проверка. После первого года 55 000, после второго 60 500 - тот же результат.

Типичная ошибка. Подставить 10 вместо 0,1 или умножить исходную сумму на 20% без капитализации.

ОТВЕТ.

60500

Разбор 6. Логарифм в формуле работы газа

УСЛОВИЕ

В водолазном колоколе работа A вычисляется по формуле $A = \alpha \nu T \cdot \log_2(p_2/p_1)$. Дано: $\alpha = 10,9$ Дж/(моль·К), $\nu = 3$ моль, $T = 300$ К, $p_1 = 1,4$ атм, $A = 29\,430$ Дж. Найдите p_2 .

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Сначала делением изолируем логарифм, затем переводим логарифмическое равенство в степенное.

ДО РЕШЕНИЯ.

Все множители положительны; отношение p_2/p_1 также должно быть положительным.

1. Подставляем известные данные

$$29430 = 10,9 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,4}$$

Неизвестной остаётся только p_2 .

2. Вычисляем коэффициент

$$10,9 \cdot 3 \cdot 300 = 9810$$

Удобно сначала $3 \cdot 300 = 900$.

3. Изолируем логарифм

$$\log_2 \frac{p_2}{1,4} = \frac{29430}{9810} = 3$$

Делим обе части на 9810.

4. Переходим к степени

$$\frac{p_2}{1,4} = 2^3 = 8$$

По определению логарифма.

5. Находим давление

$$p_2 = 1,4 \cdot 8 = 11,2$$

Умножаем обе части на p_1 .

Проверка. $p_2/p_1 = 11,2/1,4 = 8$, а $\log_2 8 = 3$.

Типичная ошибка. Считать $\log_2(p_2/p_1) = 3$ как $p_2/p_1 = 6$.

ОТВЕТ.

$$11,2$$

Разбор 7. Ускорение из формулы скорости**УСЛОВИЕ**

Скорость автомобиля вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l - путь в километрах, a - ускорение в км/ч². Найдите a , если $l = 1$ км и $v = 120$ км/ч.

$$v = \sqrt{2la}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Чтобы убрать квадратный корень, возводим обе части в квадрат, затем делим на известные множители.

ДО РЕШЕНИЯ.

Все величины неотрицательны, поэтому возведение в квадрат не создаёт выбора знака для скорости.

1. Возводим в квадрат

$$v^2 = 2la$$

Квадрат устраняет квадратный корень.

2. Выражаем ускорение

$$a = \frac{v^2}{2l}$$

Делим обе части на 2l.

3. Подставляем

$$a = \frac{120^2}{2 \cdot 1}$$

Единицы уже соответствуют формуле.

4. Вычисляем

$$a = \frac{14400}{2} = 7200$$

$$120^2 = 14\,400.$$

Проверка. $\sqrt{2 \cdot 1 \cdot 7200} = \sqrt{14400} = 120$.

Типичная ошибка. Не возвести v в квадрат или поделить только на 1, забыв множитель 2.

ОТВЕТ.

$$7200$$

Разбор 8. Четвёртая степень в законе излучения**УСЛОВИЕ**

Мощность излучения звезды вычисляется по формуле $P = \sigma S T^4$. Дано: $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$, $S = (1/256) \cdot 10^{21}$, $P = 9,12 \cdot 10^{26}$. Найдите температуру T в кельвинах.

$$P = \sigma S T^4$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Сначала выражаем T^4 , аккуратно объединяем степени десяти и только потом извлекаем корень четвёртой степени.

ДО РЕШЕНИЯ.

Температура звезды измеряется тысячами кельвинов; ответ порядка единиц или миллионов был бы подозрителен.

1. Выражаем четвёртую степень

$$T^4 = \frac{P}{\sigma S}$$

Делим обе части на положительное произведение σS .

2. Подставляем

$$T^4 = \frac{9,12 \cdot 10^{26}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{256} \cdot 10^{21}}$$

Сохраняем дробь до сокращения.

3. Упрощаем числа и степени

$$T^4 = 4096 \cdot 10^{12} = 4,096 \cdot 10^{15}$$

$9,12/5,7=1,6$; $1,6 \cdot 256=409,6$; показатель $26-(-8+21)=13$.

4. Распознаём четвёртую степень

$$4,096 \cdot 10^{15} = 8000^4$$

$$8000^4 = 8^4 \cdot 10^{12} = 4096 \cdot 10^{12}.$$

5. Учитываем смысл величины

$$T = 8000$$

Температура положительна, отрицательный корень не рассматривается.

Проверка. Порядок $8 \cdot 10^3$ К соответствует предварительной оценке.

Типичная ошибка. Извлечь квадратный корень вместо корня четвёртой степени или потерять отрицательный показатель у σ .

ОТВЕТ.

$$8000$$

08. Опорные формулы

$$s = vt, \quad E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad F = ma$$

$$p = \frac{F}{S}, \quad A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$v = \sqrt{2la} \Leftrightarrow a = \frac{v^2}{2l}$$

$$P = \sigma S T^4 \Leftrightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}}$$

09. Вопросы по теме

Нужно ли знать физическую формулу наизусть?

В этих заданиях используйте формулу из условия. Важно понять обозначения, согласовать единицы и выполнить преобразования.

Когда округлять результат?

В последнем действии, если условие требует приближения. Промежуточные округления могут изменить ответ.

10. Самостоятельная работа

Сначала решите задания 1-20 в тесте. После проверки переходите к заданиям 21-35, затем к 36-40. Задания на повторение выделены отдельно. К каждому ошибочному ответу запишите причину и повторите решение без подсказки.

Предыдущая тема: Экстремумы и наибольшее значение.

Следующая тема: Текстовые задачи: движение.