



Работа, смеси и концентрации

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Свойства и базовые методы: задания 1-10

Задание 1

Исполнитель выполняет заказ за 12 часов при постоянной производительности. Какую часть заказа он выполнит за 5 часов и сколько времени потребуется на остаток?

Весь заказ принимаем за 1. За час выполняется $\frac{1}{12}$ заказа, за 5 часов - $\frac{5}{12}$.

Осталось $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$, поэтому время остатка равно $\frac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{12}} = 7$ ч. Сумма времён 12 ч, обе доли неотрицательны и в сумме дают 1.

Ответ. $\frac{5}{12}$ заказа; 7 ч.

Задание 2

Первый мастер выполняет заказ за 12 часов, второй - за 18 часов. За сколько часов они выполнят его вместе, если их постоянные производительности складываются?

За час мастера выполняют $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$ заказа. Поэтому $\frac{5}{36}t = 1$, откуда $t = \frac{36}{5} = 7,2$ ч. Проверка долей: первый выполнит $\frac{3}{5}$, второй $\frac{2}{5}$. Время меньше 12 и 18 ч, как и должно быть при совместной работе.

Ответ. 7,2 ч.

Задание 3

Вместе два исполнителя выполняют работу за 6 часов. Первый один выполнил бы её за 10 часов. За сколько часов выполнит работу второй при неизменных производительностях?

Производительность второго - разность общей и первой: $p_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15} > 0$.

Следовательно, его собственное время $T_2 = 15$ ч. Проверка: за 6 ч первый делает $\frac{3}{5}$, второй $\frac{2}{5}$ работы. Вычитание времён $10 - 6$ не даёт ни производительности, ни времени второго.

Ответ. 15 ч.

Задание 4

Три станка выполняют одинаковый заказ по отдельности за 12, 15 и 20 часов. За сколько часов они выполняют один такой заказ вместе?

Примем заказ за 1. Общая производительность $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$, поэтому время

5 ч. Доли станков равны $\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; их сумма 1. Все производительности положительны, а работа завершится раньше, чем на любом одном станке.

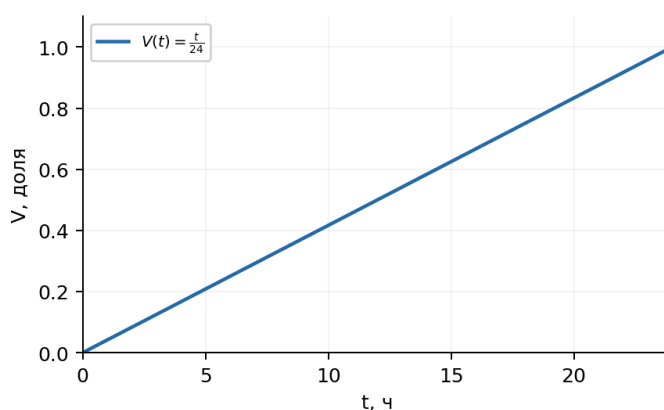
Ответ. 5 ч.

Задание 5

Труба наполняет пустой бассейн за 8 часов, слив опорожняет полный бассейн за 12 часов. Считая расходы постоянными, найдите время наполнения пустого бассейна при одновременно открытых трубе и сливе.

Приток имеет знак плюс, отток - минус. Чистая скорость $p = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} > 0$ бассейна в час. Поэтому бассейн наполнится за 24 ч. За это время поступят 3 объёма бассейна, уйдут 2, останется 1. Постоянный расход слива здесь является условием учебной модели.

Ответ. 24 ч.



Доля заполненного бассейна при постоянном притоке и сливе: от (0; 0) до (24; 1).

Задание 6

Первый работник выполняет заказ за 6 часов, второй - за 12 часов. Они работают по очереди, каждый по одному часу, начиная с первого. Какое время пройдет до завершения заказа? Последний рабочий прекращает работу сразу после завершения.

За полный двухчасовой цикл сделано $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ заказа. После трёх циклов прошло 6 ч и выполнено $\frac{3}{4}$. За следующий час первый выполняет $\frac{1}{6}$, остаётся $1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Второму нужен ровно час. Значит, работа заканчивается на границе четвёртого цикла, через 8 ч. До этого момента доля выполненной работы строго меньше 1; неполного последнего часа нет.

Ответ. 8 ч.

Задание 7

Производительность первого рабочего вдвое выше производительности второго. Вместе они выполняют заказ за 6 часов. Найдите время каждого при самостоятельной работе.

Пусть производительность второго $p > 0$, первого $2p$. Тогда $3p = \frac{1}{6}$, то есть $p = \frac{1}{18}$, $2p = \frac{1}{9}$. Времена обратно пропорциональны производительностям: первый потратит 9 ч, второй 18 ч. Проверка: $\frac{6}{9} + \frac{6}{18} = 1$.

Ответ. Первый - 9 ч, второй - 18 ч.

Задание 8

По плану рабочий должен был изготавливать одинаковое число деталей ежедневно в течение 12 дней. Он делал на 5 деталей в день больше и завершил тот же заказ за 10 дней. Найдите плановую дневную норму и объём заказа.

Пусть плановая норма $x > 0$ деталей. Равенство объёмов даёт $12x = 10(x + 5)$, поэтому $2x = 50$ и $x = 25$. Заказ содержит $12 \cdot 25 = 300$ деталей. Фактически $10 \cdot 30 = 300$. Получены положительные целые количества, соответствующие условию.

Ответ. 25 деталей в день; 300 деталей.

Задание 9

Смешали 10 кг 20%-го и 15 кг 40%-го растворов одного вещества. Потерь и химической реакции нет. Найдите массовую долю вещества в смеси.

В первой части $10 \cdot 0,2 = 2$ кг вещества, во второй $15 \cdot 0,4 = 6$ кг. Общая масса 25 кг, вещества 8 кг. Доля $\frac{8}{25} = 0,32$, то есть 32%. Она между 20% и 40%, но не равна их среднему 30%: массы исходных растворов различаются.

Ответ. 32%.

Задание 10

К 20 кг 10%-го раствора добавляют чистое растворимое вещество без потерь. Сколько килограммов добавить, чтобы массовая доля стала 25%?

Пусть добавляют $x \geq 0$ кг. Вещества станет $2 + x$ кг, раствора $20 + x$ кг. Поэтому $2 + x = 0,25(20 + x)$, откуда $0,75x = 3$ и $x = 4$. Знаменатель $20 + x$ положителен.

После добавления получаем 6 кг вещества в 24 кг раствора: $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Ответ. 4 кг.

02. Баланс вещества и замены: задания 11-16

Задание 11

Сколько килограммов воды добавить к 12 кг 30%-го раствора, чтобы массовая доля растворённого вещества стала 18%?

Вещества остаётся $12 \cdot 0,3 = 3,6$ кг. Если добавили $x \geq 0$ кг воды, то

$3,6 = 0,18(12 + x)$, откуда $12 + x = 20$ и $x = 8$. Масса возрастает, доля уменьшается;
 $\frac{3,6}{20} = 0,18$. Линейное уравнение имеет единственное решение.

Ответ. 8 кг.

Задание 12

Из 40 кг 15%-го раствора испаряют только воду. Сколько воды нужно испарить, чтобы массовая доля вещества стала 20%?

Масса вещества сохраняется и равна 6 кг. Воды сначала 34 кг. Пусть испарилось x кг, $0 \leq x \leq 34$. Уравнение $6 = 0,2(40 - x)$ даёт $x = 10$. Это допустимо: воды останется 24 кг, вещества 6 кг, общая масса 30 кг. Доля равна 20%.

Ответ. 10 кг.

Задание 13

Сколько килограммов сплавов с 20% и 50% меди надо взять, чтобы получить 30 кг сплава с 32% меди? Потерь металла нет.

Обозначим массы $x, y \geq 0$. Балансы общей массы и меди:

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ 0,2x + 0,5y = 9,6. \end{cases}$$

Подстановка $x = 30 - y$ даёт $6 + 0,3y = 9,6$, то есть $y = 12$, $x = 18$. Проверка меди: $3,6 + 6 = 9,6$ кг. Разные исходные доли обеспечивают единственность решения.

Ответ. 18 кг 20%-го и 12 кг 50%-го сплава.

Задание 14

Свежий продукт массой 100 кг содержит 80% воды. После сушки он содержит 60% воды. Сухое вещество сохраняется. Найдите конечную массу и массу испарившейся воды.

Сухого вещества сначала 20 кг. После сушки оно составляет $100\% - 60\% = 40\%$ конечной массы M . Поэтому $0,4M = 20$, $M = 50$ кг. Испарилось 50 кг воды. Было 80 кг воды, осталось 30 кг, а $\frac{30}{50} = 60\%$. Нельзя вычитать процентные пункты из исходной массы: проценты относятся к разным массам.

Ответ. 50 кг продукта; 50 кг воды испарилось.

Задание 15

Из 20 кг однородного 30%-го раствора отлили 5 кг, затем добавили 5 кг воды и перемешали. Найдите массовую долю вещества после операции.

В исходном растворе 6 кг вещества. С 5 кг однородной смеси удалили $5 \cdot 0,3 = 1,5$ кг вещества. Осталось 4,5 кг, а после добавления воды общая масса вновь 20 кг. Доля $\frac{4,5}{20} = 0,225$, то есть 22,5%. Удалялся раствор, а не чистая вода и не чистое вещество.

Ответ. 22,5%.

Задание 16

В сосуде 100 кг 20%-го раствора. Дважды удаляют по 10 кг однородной смеси и каждый раз добавляют 10 кг воды. Перед очередным удалением раствор перемешивают. Найдите итоговую массовую долю.

Каждый раз удаляется $\frac{1}{10}$ имеющегося вещества, остаётся $\frac{9}{10}$. После двух операций вещества $20 \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 16,2$ кг. Общая масса восстановлена до 100 кг, поэтому доля 16,2%. По этапам: 20 кг вещества, затем 18 кг, затем 16,2 кг. Второй раз удаляются не прежние 2 кг, а 1,8 кг.

Ответ. 16,2%.

03. Повторение пройденного: задания 17-20**Задание 17**

Повторение: лодка прошла 60 км по течению и 60 км против течения. Собственная скорость 13 км/ч, скорость течения 2 км/ч. Найдите полное время движения.

Скорости относительно берега равны $13 + 2 = 15$ и $13 - 2 = 11$ км/ч. Обе положительны. Времена участков складываются:

$$t = \frac{60}{15} + \frac{60}{11} = \frac{104}{11} \text{ ч.}$$

Проверка: за 4 ч вниз пройдено 60 км, за $\frac{60}{11}$ ч вверх - тоже 60 км. Средняя скорость меньше собственной: $\frac{120}{\frac{104}{11}} = \frac{165}{13} < 13$.

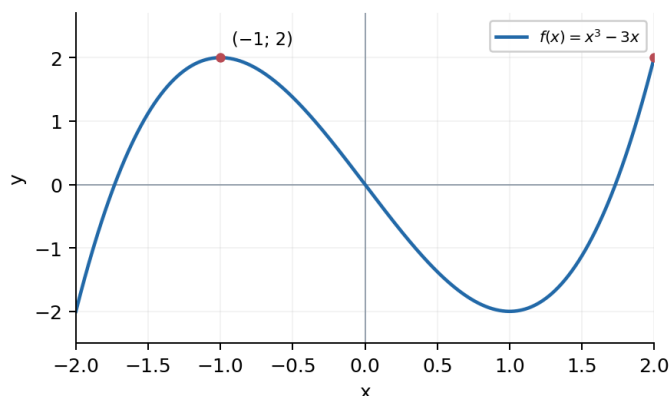
Ответ. $\frac{104}{11}$ ч.

Задание 18

Повторение: найдите наибольшее значение $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-2; 2]$ и все точки его достижения.

Полином непрерывен на отрезке, поэтому максимум существует. Производная $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ обращается в нуль при $x = \pm 1$; обе точки внутри. Проверяем их и концы: $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$. Других внутренних критических точек нет, так что максимальное значение 2 достигается при $x = -1$ и $x = 2$.

Ответ. 2; точки -1 и 2 .



Максимум 2 достигается при $x = -1$ и $x = 2$.

Задание 19

Повторение: решите неравенство $\log_2(x - 1) > 3$.

ОДЗ: $x - 1 > 0$, то есть $x > 1$. Логарифм с основанием $2 > 1$ строго возрастает, поэтому на ОДЗ переход равносильен $x - 1 > 2^3 = 8$. Получаем $x > 9$, и всё это множество принадлежит ОДЗ. Точка 9 не входит из-за строгого знака.

Ответ. $(9; +\infty)$.



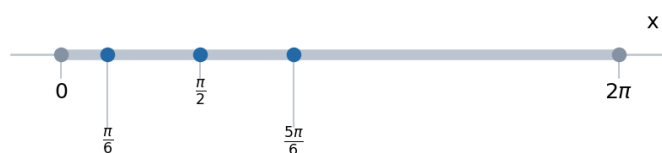
Решение $x > 9$; граничная точка 9 исключена.

Задание 20

Повторение: решите $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

Замена $t = \sin x$ требует $-1 \leq t \leq 1$. Уравнение $(2t - 1)(t - 1) = 0$ даёт допустимые $t = \frac{1}{2}$ и $t = 1$. В первом случае $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, во втором $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. На заданном отрезке во всех трёх сериях подходит только $k = 0$. Концы 0 и 2π не являются корнями, поскольку синус там равен нулю. Серии не пересекаются.

Ответ. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.



Три корня на $[0; 2\pi]$; концы отрезка не являются решениями.

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Первый работник выполняет заказ на 6 часов быстрее второго. Вместе они выполняют его за 4 часа. Найдите самостоятельное время каждого.

Пусть первому нужно $x > 0$ ч, второму $x + 6$ ч. Уравнение производительностей $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$. Умножение на положительное $4x(x+6)$ равносильно и даёт $x^2 - 2x - 24 = 0$, то есть $(x-6)(x+4) = 0$. Корень -4 недопустим. При $x = 6$ второй работает 12 ч; $\frac{4}{6} + \frac{4}{12} = 1$.

Ответ. 6 ч и 12 ч.

Задание 22

Первый мастер выполняет заказ за 12 часов, второй - за 18 часов. Первый работал 4 часа один, затем они работали вместе до завершения. Найдите общее время.

За первые 4 ч выполнена $\frac{1}{3}$ заказа, осталось $\frac{2}{3}$. Совместная производительность $\frac{5}{36}$, поэтому второй этап занимает $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{36}} = \frac{24}{5}$ ч. Полное время $4 + \frac{24}{5} = \frac{44}{5} = 8,8$ ч.

Проверка баланса: $\frac{4}{12} + \frac{24}{5} \cdot \frac{5}{36} = 1$.

Ответ. 8,8 ч.

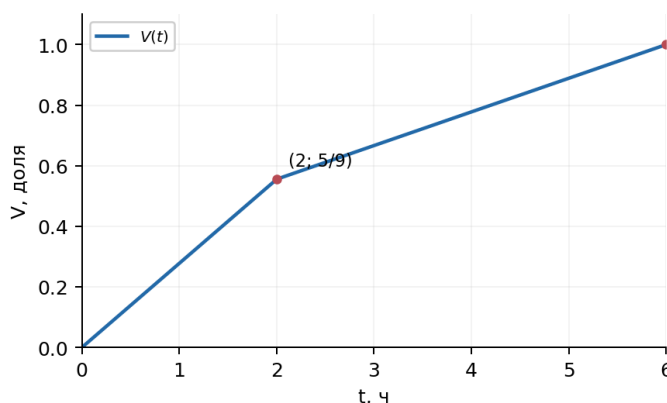
Задание 23

Две трубы наполняют бассейн по отдельности за 6 и 9 часов. Их открыли вместе на 2 часа, затем первую закрыли. Через сколько часов от начала наполнится бассейн?

За 2 ч заполнено $2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{9} < 1$ бассейна, значит переключение

действительно происходит до наполнения. Осталось $\frac{4}{9}$. Вторая труба заполняет эту долю за $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{9}} = 4$ ч. Всего $2 + 4 = 6$ ч. График накопленного объема меняет наклон в момент 2 ч, но остаётся непрерывным.

Ответ. Через 6 ч.



После закрытия первой трубы при $t = 2$ ч наклон уменьшается; $V(6) = 1$.

Задание 24

Первый и второй работники выполняют заказ за 12 часов, второй и третий - за 15 часов, первый и третий - за 20 часов. Найдите совместное время всех троих и самостоятельное время каждого.

Обозначим производительности p_1, p_2, p_3 . Сложение трёх парных равенств даёт

$$2(p_1 + p_2 + p_3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}.$$

Поэтому общая скорость $\frac{1}{10}$, время 10 ч. Вычитая из общей скорости

соответствующие пары, получаем $p_1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$, $p_2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$,

$p_3 = \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}$. Все положительные и дают исходные суммы, что проверяет существование модели, а не только формальный ответ.

Ответ. Вместе 10 ч; отдельно 30, 20 и 60 ч.

Задание 25

Два сплава содержат соответственно 40% и 25% меди. Более богатого медью сплава взяли на 10 кг больше. После соединения без потерь получили 35%-й сплав. Определите его массу. Данные: ФИПИ, рекомендации ЕГЭ-2026, пример 10.7.

Пусть масса второго сплава $x > 0$ кг, первого $x + 10$ кг. Баланс меди:

$$0,4(x + 10) + 0,25x = 0,35(2x + 10).$$

Отсюда $0,65x + 4 = 0,7x + 3,5$, значит $x = 10$. Массы исходных сплавов 20 и 10 кг, итоговая масса 30 кг. Проверка: меди $8 + 2,5 = 10,5$ кг, и $\frac{10,5}{30} = 0,35$. Требуемая доля лежит между исходными.

Ответ. 30 кг.

Задание 26

Из двух руд получают металл. Первая содержит 25% металла, из которого удаётся извлечь 90%; вторая содержит 40%, из которого извлекают 80%. Из 100 кг смеси этих руд получили 27,25 кг металла. Найдите массы руд.

Пусть первой руды $x \in [0; 100]$ кг, второй $100 - x$. Выход из килограмма первой равен $0,25 \cdot 0,9 = 0,225$ кг, из второй $0,4 \cdot 0,8 = 0,32$ кг. Поэтому $0,225x + 0,32(100 - x) = 27,25$. Получаем $0,095x = 4,75$, $x = 50$. Проверка выходов: $11,25 + 16 = 27,25$ кг. Проценты извлечения относятся к содержащемуся металлу, а не ко всей массе руды.

Ответ. По 50 кг каждой руды.

Задание 27

Заказ содержит 600 деталей. Рабочий повысил дневную норму на 5 деталей и закончил заказ на 4 дня раньше плана. Найдите первоначальную норму, если она постоянна и положительна.

Пусть норма $x > 0$ деталей в день. Плановое и фактическое времена равны $\frac{600}{x}$ и $\frac{600}{x+5}$. Условие $\frac{600}{x} - \frac{600}{x+5} = 4$ на ОДЗ равносильно $x(x+5) = 750$. Уравнение $(x-25)(x+30) = 0$ даёт единственный положительный корень 25. План - 24 дня, факт - 20 дней; разность 4. Обе нормы и оба числа дней целые.

Ответ. 25 деталей в день.

Задание 28

Смешивают три раствора с массовыми долями 10%, 30% и 60%. Требуется 50 кг 34%-го раствора. Масса 10%-го раствора должна быть вдвое больше массы 30%-го. Найдите все три массы.

Обозначим массу 30%-го через $y \geq 0$, тогда 10%-го $2y$, 60%-го $50 - 3y \geq 0$. Баланс вещества: $0,1 \cdot 2y + 0,3y + 0,6(50 - 3y) = 17$. Отсюда $30 - 1,3y = 17$, $y = 10$. Получаем 20, 10, 20 кг. Проверка: $2 + 3 + 12 = 17$ кг вещества в 50 кг смеси; все ограничения выполнены. Линейное уравнение исключает другие составы.

Ответ. 20 кг, 10 кг и 20 кг соответственно.

Задание 29

Из 20 кг однородного раствора неизвестной массовой доли отлили 2 кг, затем добавили 2 кг чистого вещества. После растворения получилась массовая доля 28%. Найдите исходную долю.

Пусть исходная доля $c \in [0; 1]$. В оставшихся 18 кг смеси вещества $18c$ кг. После добавления масса вновь 20 кг, вещества $18c + 2$. Поэтому $18c + 2 = 20 \cdot 0,28 = 5,6$, откуда $c = 0,2$. Проверка: сначала 4 кг вещества, удалено 0,4 кг, добавлено 2 кг; стало 5,6 кг.

Ответ. 20%.

Задание 30

В двух сосудах по 100 кг 40%-го раствора. В первом один раз заменяют 20 кг смеси водой. Во втором дважды заменяют по 10 кг, перемешивая после каждой замены. Где концентрация меньше и на сколько процентных пунктов?

В первом остаётся доля $1 - \frac{20}{100} = 0,8$ исходного вещества, концентрация $40\% \cdot 0,8 = 32\%$. Во втором остаётся доля $0,9^2 = 0,81$, концентрация 32,4%.

Разность 0,4 процентного пункта. При второй небольшой замене удаляется уже разбавленный раствор, поэтому вещества теряется меньше, чем при одной большой замене. Общая масса добавленной воды одинакова, но результат различается.

Ответ. В первом; на 0,4 процентного пункта.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34

Задание 31

В сосуде 60 кг 30%-го раствора. Сначала удаляют x кг смеси и добавляют столько же воды. После перемешивания снова удаляют x кг, затем добавляют x кг 60%-го раствора. Итоговая доля вещества $\frac{1}{3}$. Найдите $x > 0$.

Допустимо $0 < x \leq 60$. Изначально вещества 18 кг. После первой замены остаётся $18 \left(1 - \frac{x}{60}\right)$, после второго удаления - $18 \left(1 - \frac{x}{60}\right)^2$. Затем поступает $0,6x$ кг вещества. Масса смеси вновь 60 кг, поэтому

$$18 \left(1 - \frac{x}{60}\right)^2 + 0,6x = 20.$$

Линейные члены сокращаются: $18 + \frac{x^2}{200} = 20$. Кандидаты $x = \pm 20$, из которых подходит только 20. Проверка по этапам: 18 кг вещества, затем 12, затем 8, наконец 20. Ни одно удаление не превышает имеющуюся массу.

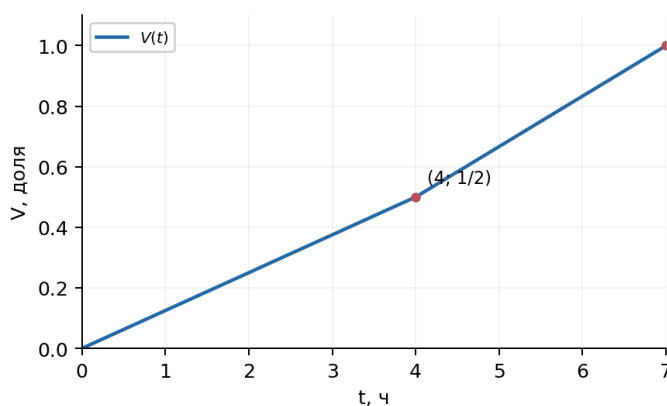
Ответ. 20 кг.

Задание 32

Две трубы наполняют бассейн за 10 и 15 часов. Сначала обе трубы и слив работают 4 часа, затем слив закрывают, и трубы завершают наполнение ещё за 3 часа. Расходы постоянны. За сколько часов слив опорожняет полный бассейн?

Приток $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ объёма в час. Последние 3 ч дают $\frac{1}{2}$ бассейна, поэтому первые 4 ч тоже дали $\frac{1}{2}$. Для расхода слива $q \geq 0$ получаем $4 \left(\frac{1}{6} - q\right) = \frac{1}{2}$, то есть $q = \frac{1}{24}$. Время опорожнения 24 ч. Чистая скорость первого этапа $\frac{1}{8} > 0$; заполнение монотонно от 0 до $\frac{1}{2}$, затем до 1, поэтому преждевременного переполнения не было.

Ответ. 24 ч.



При закрытии слива в момент 4 ч скорость наполнения возрастает; бассейн полон при 7 ч.

Задание 33

Два работника вместе выполняют заказ за 6 часов. Первый в одиночку справляется на 5 часов быстрее второго. Найдите оба самостоятельных времени и долю заказа, выполненную первым при совместной работе.

Пусть первое время $x > 0$, второе $x + 5$. Уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$ равносильно $x^2 - 7x - 30 = 0$ на положительной области. Корни 10 и -3 ; второй исключён.

Времена 10 и 15 ч. За совместные 6 ч первый выполнит $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, второй $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. В сумме 1; отношение производительностей соответствует найденным временам.

Ответ. 10 ч и 15 ч; доля первого $\frac{3}{5}$.

Задание 34

В сосуде А 20 кг 40%-го раствора, в В 30 кг 10%-го раствора того же вещества. Из А переливают 10 кг в В и перемешивают; затем 10 кг полученной смеси переливают обратно в А. Найдите конечные массовые доли в обоих сосудах.

Сначала вещества в А 8 кг, в В 3 кг. Первый перенос несёт 4 кг вещества: в А остаются 10 кг смеси и 4 кг вещества, в В становятся 40 кг смеси и 7 кг вещества. Доля в В равна $\frac{7}{40}$. Обратный перенос несёт $10 \cdot \frac{7}{40} = \frac{7}{4}$ кг вещества.

Поэтому в А теперь $4 + \frac{7}{4} = \frac{23}{4}$ кг вещества при массе 20 кг: доля $\frac{23}{80} = 28,75\%$. В В остаётся $7 - \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$ кг в 30 кг смеси: доля 17,5%. Общая масса вещества

$\frac{23}{4} + \frac{21}{4} = 11$ кг сохранилась. Обратный перенос не возвращает исходный состав.

Ответ. А - 28,75%; В - 17,5%.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40

Задание 35

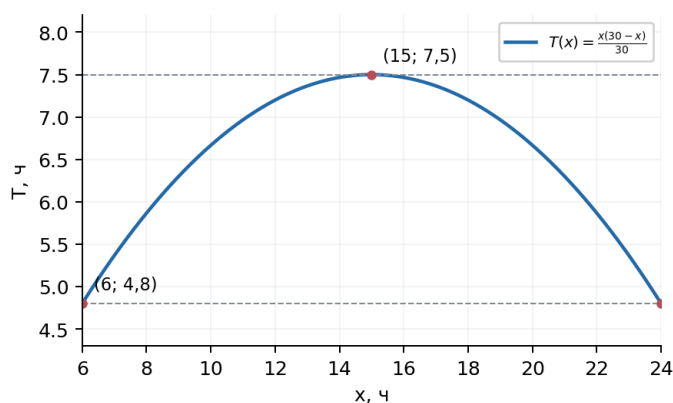
Два работника выполняют заказ по отдельности за x и $30 - x$ часов, где $6 \leq x \leq 24$. Для каждого $a \geq 0$ определите число значений x , при которых совместное время равно a часов. Укажите граничные случаи.

Оба времени положительны. Совместное время

$$T(x) = \frac{x(30-x)}{30} = \frac{15}{2} - \frac{(x-15)^2}{30}.$$

На $[6; 15]$ функция строго возрастает, на $[15; 24]$ строго убывает. Значения на концах одинаковы: $T(6) = T(24) = \frac{24}{5}$; максимум $\frac{15}{2}$ при $x = 15$. Потому вне $\left[\frac{24}{5}; \frac{15}{2}\right]$ решений нет; внутри, кроме максимума, горизонтальный уровень пересекает обе ветви. Формула корней $x = 15 \pm \sqrt{225 - 30a}$ подтверждает их допустимость: при $\frac{24}{5} \leq a < \frac{15}{2}$ корень под радикалом лежит в $(0; 81]$, то есть отклонение от 15 не больше 9. При максимуме обе записи совпадают.

Ответ. 2 значения при $\frac{24}{5} \leq a < \frac{15}{2}$; 1 при $a = \frac{15}{2}$; 0 в остальных случаях. При $a = \frac{24}{5}$ значения $x = 6, 24$, при максимуме $x = 15$.



Допустимый отрезок $[6; 24]$; минимум на концах $24/5$, максимум $15/2$ в вершине.

Задание 36

Нужно изготовить 100 кг смеси с 40% вещества из растворов с долями 10%, 30% и 70%. Цена килограмма равна соответственно 20, 30 и 60 рублям. 30%-го раствора имеется не более 60 кг; остальных достаточно. Массы можно выбирать непрерывно. Найдите самый дешёвый допустимый состав и его стоимость.

Пусть массы $x, y, z \geq 0$, причём $y \leq 60$. Балансы $x + y + z = 100$ и

$$0,1x + 0,3y + 0,7z = 40. \text{ Исключая } y, \text{ получаем } z = 25 + \frac{x}{2}, y = 75 - \frac{3x}{2}.$$

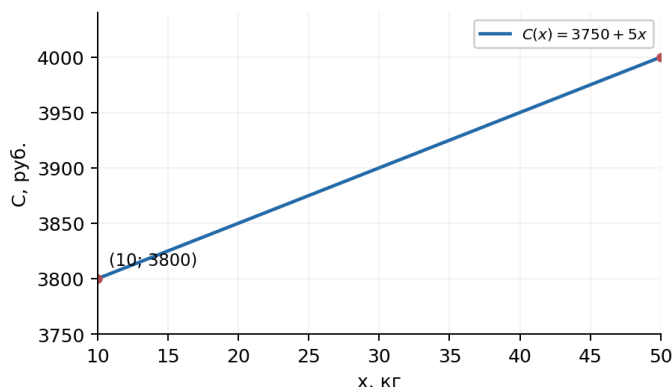
Неотрицательность и ограничение запаса равносильны $10 \leq x \leq 50$; z на этом отрезке положителен. Стоимость

$$C = 20x + 30\left(75 - \frac{3x}{2}\right) + 60\left(25 + \frac{x}{2}\right) = 3750 + 5x.$$

Она строго возрастает по x , поэтому единственный минимум достигается при $x = 10$. Тогда $y = 60$, $z = 30$, стоимость 3800 рублей. Проверка вещества:

$1 + 18 + 21 = 40$ кг. Все возможные составы описаны одним отрезком, значит более дешёвого скрытого варианта нет.

Ответ. 10, 60 и 30 кг соответственно; 3800 рублей.



Все допустимые составы: x от 10 до 50 кг. Стоимость строго возрастает.

Задание 37

Первый мастер выполняет заказ за 12 часов и начинает в момент 0. Второй выполняет его за 18 часов и может присоединиться через $a \geq 0$ часов после начала; если заказ уже готов, он не работает. Найдите полное время $T(a)$ и все задержки, при которых заказ будет готов не позднее 9 часов от начала.

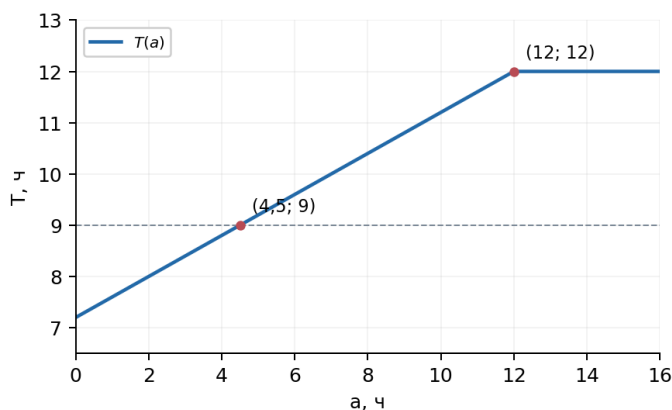
Если $a \geq 12$, первый успевает всё сделать до присоединения, поэтому $T(a) = 12$.

Если $0 \leq a < 12$, к присоединению сделана доля $\frac{a}{12}$, а остаток $1 - \frac{a}{12}$ положителен. Его выполняют со скоростью $\frac{5}{36}$, поэтому

$$T(a) = a + \frac{1 - \frac{a}{12}}{\frac{5}{36}} = \frac{36}{5} + \frac{2a}{5}.$$

При $a \rightarrow 12$ эта формула даёт 12 и согласуется с первым случаем. Требование $T \leq 9$ в первом случае невозможно, а во втором равносильно $36 + 2a \leq 45$, то есть $a \leq \frac{9}{2}$. Пересечение с $0 \leq a < 12$ даёт $\left[0; \frac{9}{2}\right]$. При граничной задержке первый делает $\frac{3}{8}$, а вместе за оставшиеся 4,5 ч выполняют $\frac{5}{8}$.

Ответ. $T(a) = \frac{36}{5} + \frac{2a}{5}$ при $0 \leq a < 12$; $T(a) = 12$ при $a \geq 12$. Допустимые задержки $0 \leq a \leq \frac{9}{2}$ ч.



Полное время: рост до задержки 12 ч, затем постоянное значение 12 ч; уровень 9 ч достигается при $a = 4,5$.



Задержки, позволяющие закончить заказ не позднее 9 ч.

Задание 38

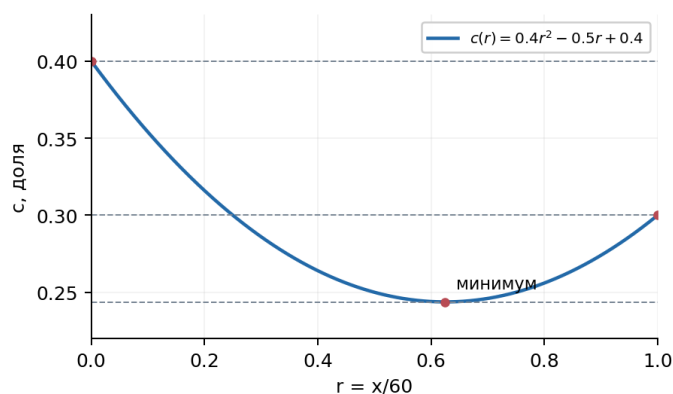
В 60 кг 40%-го раствора сначала заменяют x кг смеси водой, затем после перемешивания заменяют x кг смеси 30%-м раствором. Допустимо $0 \leq x \leq 60$. Для каждого $a \in [0; 1]$ определите число значений x , дающих итоговую массовую долю a . Найдите критические доли и соответствующие массы.

Положим $r = \frac{x}{60} \in [0; 1]$. После двух удалений исходного вещества остаётся $24(1-r)^2$ кг; второй долив добавляет $18r$ кг. Масса смеси 60 кг, поэтому

$$c(r) = \frac{2}{5}(1-r)^2 + \frac{3}{10}r = \frac{2}{5}r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{2}{5} = \frac{39}{160} + \frac{2}{5}\left(r - \frac{5}{8}\right)^2.$$

Минимум $c_* = \frac{39}{160}$ достигается при $r = \frac{5}{8}$, то есть $x = 37,5$ кг. На $\left[0; \frac{5}{8}\right]$ функция строго убывает от $\frac{2}{5}$ до c_* ; на $\left[\frac{5}{8}; 1\right]$ возрастает до $\frac{3}{10}$. Поэтому уровни $(c_*, \frac{3}{10}]$ пересекают обе ветви, а $(\frac{3}{10}; \frac{2}{5}]$ - только левую. При $a = c_*$ корень один, вне диапазона нет. Проверим верхний конец правой ветви: при $a = \frac{3}{10}$ уравнение $4r^2 - 5r + 1 = 0$ даёт $r = \frac{1}{4}, 1$, то есть $x = 15, 60$. При $a = \frac{2}{5}$ корни $r = 0, \frac{5}{4}$, но второй вне ОДЗ, остаётся $x = 0$. Полное удаление $x = 60$ разрешено условием и даёт 30%-й раствор.

Ответ. 0 значений при $a < c_*$ или $a > \frac{2}{5}$; 1 при $a = c_*$ и при $\frac{3}{10} < a \leq \frac{2}{5}$; 2 при $c_* < a \leq \frac{3}{10}$. Критические случаи разобраны выше.



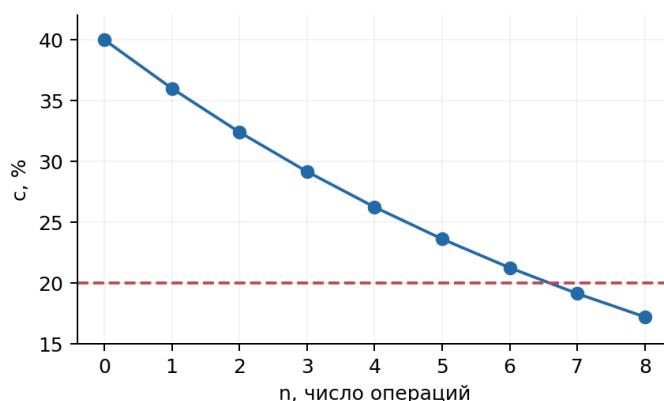
Вершина $(5/8; 39/160)$; на концах доли $2/5$ и $3/10$. Считаем пересечения только при $0 \leq r \leq 1$.

Задание 39

В баке 100 кг 40%-го раствора. За одну операцию удаляют 10 кг хорошо перемешанной смеси и добавляют 10 кг воды. Какое минимальное целое число операций нужно, чтобы массовая доля стала строго меньше 20%?

Каждая операция умножает массу вещества на $\frac{9}{10}$ и возвращает общую массу к 100 кг. По индукции после $n \geq 0$ операций $c_n = \frac{2}{5} \left(\frac{9}{10}\right)^n$. Нужно $\left(\frac{9}{10}\right)^n < \frac{1}{2}$. Последовательность строго убывает, так как каждый следующий положительный член в 0,9 раза меньше предыдущего. Точные соседние значения: $0,9^6 = 0,531441 > \frac{1}{2}$, $0,9^7 = 0,4782969 < \frac{1}{2}$. Поэтому при шести и при любом меньшем числе операций условие ещё не выполнено, при семи выполнено. Концентрации соответственно 21,25764% и 19,131876%. Логарифм допустим, но округление логарифма не должно подменять проверку строгой границы.

Ответ. 7 операций.



Только целые числа операций: при $n = 6$ концентрация выше 20%, при $n = 7$ ниже.

Задание 40

В сосуде 100 кг 40%-го раствора. Сначала заменяют водой x кг смеси, затем после перемешивания заменяют водой ещё $40 - x$ кг. Допустимо $0 \leq x \leq 40$. Для каждого $a \in [0; 100]$ найдите все x , при которых итоговая концентрация не превышает a процентов. Когда удаляется больше всего вещества?

Оба удаления допустимы и после каждого масса восстанавливается до 100 кг. Доля исходного вещества, оставшаяся после операций, равна $\left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{40-x}{100}\right)$. Итоговая концентрация в процентах:

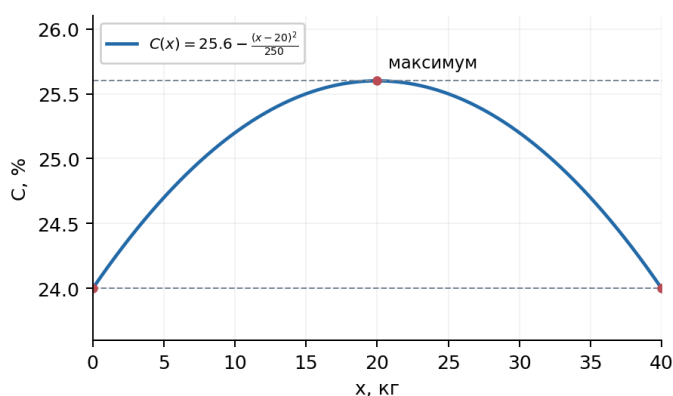
$$C(x) = 40 \left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{40-x}{100}\right) = \frac{128}{5} - \frac{(x-20)^2}{250}.$$

На $[0; 40]$ квадрат $(x - 20)^2$ пробегает $[0; 400]$, значит $24 \leq C(x) \leq \frac{128}{5}$. Если $a < 24$, решений нет. Если $a \geq \frac{128}{5}$, подходит весь отрезок. В оставшемся случае $24 \leq a < \frac{128}{5}$ неравенство равносильно

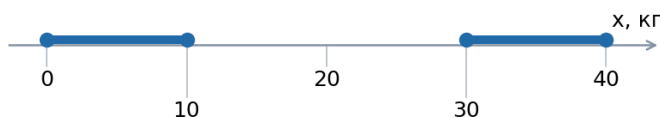
$$|x - 20| \geq d, \quad d = \sqrt{6400 - 250a}, \quad 0 < d \leq 20.$$

Отсюда $x \in [0; 20 - d] \cup [20 + d; 40]$. Все концы включаются, поскольку исходное неравенство нестрогое. При $a = 24$ это две точки $0, 40$; при $a = \frac{128}{5}$ получаем весь отрезок, включая $x = 20$. Максимальное удаление вещества соответствует минимальной конечной концентрации 24%, то есть $x = 0$ или 40 : одна ненулевая замена 40 кг. Тогда удаляется $40 - 24 = 16$ кг вещества. При равном делении замен остаётся 25,6 кг вещества, поэтому оно удаляется менее эффективно.

Ответ. Пустое множество при $a < 24$; $[0; 20 - d] \cup [20 + d; 40]$ при $24 \leq a < \frac{128}{5}$; $[0; 40]$ при $a \geq \frac{128}{5}$, где $d = \sqrt{6400 - 250a}$. Больше всего вещества удаляется при $x = 0$ или 40 .



Итоговая концентрация от 24% на концах до 25,6% при равных заменах.



Пример отбора при $a = 25,2\%$: $x \in [0; 10] \cup [30; 40]$.