



Прикладные расчёты

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Свойства и базовые методы: задания 1-10

Задание 1

Электродвигатель за 5 минут совершил полезную работу 600 кДж. Его КПД равен 80%. Найдите среднюю потребляемую мощность в ваттах. Используйте

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{зат}}} \text{ и } P = \frac{A_{\text{зат}}}{t}.$$

Переведём данные: $A_{\text{пол}} = 600000$ Дж, $t = 300$ с, $\eta = 0,8$. КПД относится к затраченной, а не к полезной энергии.

Затраченная энергия $A_{\text{зат}} = \frac{600000}{0,8} = 750000$ Дж. Поэтому $P = \frac{750000}{300} = 2500$ Вт.

Проверка: полезная мощность $0,8 \cdot 2500 = 2000$ Вт, за 300 с она даёт 600 кДж.

Ответ. 2500 Вт.

Задание 2

Алюминиевая деталь с замкнутой пустой полостью имеет массу 5,4 кг и внешний объём 2500 см^3 . Плотность алюминия $2,7 \text{ г/см}^3$. Найдите объём полости; массой воздуха пренебрегите.

Масса металла равна 5400 г. Из $m = \rho V$ объём самого алюминия

$$V_{\text{мет}} = \frac{5400}{2,7} = 2000 \text{ см}^3.$$

Внешний объём складывается из объёмов металла и полости. Значит, $V_{\text{пол}} = 2500 - 2000 = 500 \text{ см}^3$. Он положителен и меньше внешнего объёма, как и должно быть.

Ответ. 500 см^3 .

Задание 3

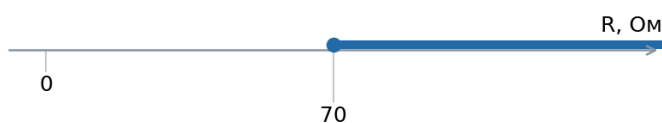
В учебной модели цепи ток $I = \frac{220}{R + 40}$ А, где $R \geq 0$ - сопротивление добавочного резистора в омах. При каких R ток не превышает 2 А?

При $R \geq 0$ знаменатель положителен. Поэтому умножение не меняет знак неравенства:

$$\frac{220}{R + 40} \leq 2 \Leftrightarrow 220 \leq 2R + 80 \Leftrightarrow R \geq 70.$$

Пересечение с физическим ограничением не меняет ответ. При $R = 70$ ток ровно 2 А; при увеличении сопротивления ток уменьшается.

Ответ. $R \in [70; +\infty)$ Ом.



Допустимые сопротивления: граница 70 Ом включена.

Задание 4

Шкалы температур связаны формулой $F = 1,8C + 32$. Устройство работает при $95 \leq F \leq 104$. Найдите допустимый диапазон температуры C .

Вычитаем 32 из всех частей двойного неравенства, затем делим на положительное число 1,8:

$$95 \leq 1,8C + 32 \leq 104 \Leftrightarrow 63 \leq 1,8C \leq 72 \Leftrightarrow 35 \leq C \leq 40.$$

Обе границы включены. Подстановка даёт соответственно 95 и 104 градуса по Фаренгейту.

Ответ. От 35 до 40 °С включительно.



Рабочий диапазон температуры: от 35 до 40 °С включительно.

Задание 5

Кинетическая энергия тела массой 4 кг равна 450 Дж. Найдите модуль скорости по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$.

Подстановка даёт $450 = 2v^2$, то есть $v^2 = 225$. Алгебраические корни равны 15 и -15 , но модуль скорости по определению неотрицателен.

Остаётся $v = 15$ м/с. Проверка: $\frac{4 \cdot 15^2}{2} = 450$ Дж.

Ответ. 15 м/с.

Задание 6

Скорость при равноускоренном разгоне из состояния покоя задана формулой $v = \sqrt{2la}$. При $a = 9000$ км/ч² найдите путь l в километрах, соответствующий скорости 120 км/ч. Данные: ФИПИ, методические рекомендации ЕГЭ-2026, профильный уровень, пример 9.1.

Единицы согласованы: l в километрах, ускорение в км/ч². При $l \geq 0$ обе части равенства неотрицательны, поэтому возведение в квадрат равносильно:

$$120^2 = 2 \cdot l \cdot 9000, \quad l = \frac{14400}{18000} = 0,8.$$

Подстановка под корень возвращает 120. Переводить ускорение в м/с² здесь не требуется.

Ответ. 0,8 км.

Задание 7

После двух последовательных скидок 10% и 20% товар стоит 7200 рублей. Найдите исходную цену и общую скидку в процентах от неё.

Коэффициенты уменьшения равны 0,9 и 0,8. Вторая скидка берётся от уже сниженной цены, поэтому общий коэффициент $0,9 \cdot 0,8 = 0,72$, а не 0,7.

Из $0,72P = 7200$ получаем $P = 10000$ рублей. Общая скидка составляет $(1 - 0,72) \cdot 100\% = 28\%$.

Ответ. 10 000 рублей; 28%.

Задание 8

Цена снизилась на 20%. На сколько процентов нужно повысить новую цену, чтобы вернуться к первоначальной?

Пусть исходная цена $P > 0$. После снижения она равна $0,8P$. Для восстановления необходим коэффициент k с условием $0,8Pk = P$, откуда $k = 1,25$.

Рост равен 25% от новой цены. Проверка на цене 100 рублей: после снижения остаётся 80, прибавка 20 составляет четверть от 80.

Ответ. На 25%.

Задание 9

Цена сначала выросла на 20%, а затем уменьшилась на 10% и стала равна 1080 рублям. Найдите исходную цену и итоговое процентное изменение.

Последовательные изменения дают коэффициент $1,2 \cdot 0,9 = 1,08$. Следовательно, исходная цена $\frac{1080}{1,08} = 1000$ рублей.

Итоговая цена составляет 108% от исходной: рост равен 8%. Проценты 20 – 10 складывать нельзя, поскольку базы начисления различны.

Ответ. 1000 рублей; повышение на 8%.

Задание 10

В баке 48 л топлива. Требуется сохранить резерв не менее 6 л. Расход постоянен и равен 8 л на 100 км. Какое наибольшее расстояние можно проехать?

На движение разрешено израсходовать не более $48 - 6 = 42$ л. Если путь $s \geq 0$ км, расход равен $\frac{8s}{100}$ л.

Условие $\frac{8s}{100} \leq 42$ равносильно $s \leq 525$. При 525 км остаётся ровно 6 л, поэтому граница допустима и максимум достигается.

Ответ. 525 км.

02. Формулы и зависимости: задания 11-16**Задание 11**

Нагреватель потребляет 2 кВт; 80% энергии идёт на нагрев 2 кг воды от 20 до 80 °С. Удельная теплоёмкость $c = 4200$ Дж/(кг·°С). Найдите время нагрева по формулам $Q = cm\Delta T$, $Q = \eta Pt$. Потерями, кроме учтённых КПД, пренебрегите.

Разность температур $\Delta T = 60$ °С, мощность $P = 2000$ Вт. Требуемая теплота $Q = 4200 \cdot 2 \cdot 60 = 504000$ Дж.

Полезная мощность $\eta P = 0,8 \cdot 2000 = 1600$ Вт. Поэтому $t = \frac{504000}{1600} = 315$ с. Это 5 минут 15 секунд; делить на полную мощность без учёта КПД было бы неверно.

Ответ. 315 с.

Задание 12

Путь свободного падения из состояния покоя в принятой модели равен $h = 5t^2$ метров. За какое время тело пройдёт 80 м? Считать $t \geq 0$ и не учитывать сопротивление воздуха.

Из $5t^2 = 80$ следует $t^2 = 16$. Получаем два алгебраических корня $t = \pm 4$.

Отрицательный корень исключён условием $t \geq 0$. При $t = 4$ путь $5 \cdot 16 = 80$ м. На неотрицательной полуоси функция $5t^2$ строго возрастает, поэтому других допустимых времён нет.

Ответ. 4 с.

Задание 13

Период математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где $l > 0$, $g = 9,8$ м/с². Найдите длину маятника, если период равен π секундам.

Деление на $2\pi > 0$ даёт $\sqrt{\frac{l}{9,8}} = \frac{1}{2}$. Обе части положительны, значит, квадрат сохраняет равносильность:

$$\frac{l}{9,8} = \frac{1}{4}, \quad l = 2,45.$$

Проверка: $2\pi\sqrt{\frac{2,45}{9,8}} = \pi$. Длина положительна.

Ответ. 2,45 м.

Задание 14

Масса вещества описывается законом $m = 116 \cdot 2^{-\frac{t}{9}}$ мг, где $t \geq 0$ измеряется в минутах. Когда масса станет равна 29 мг? Данные: ФИПИ, методические рекомендации ЕГЭ-2026, профильный уровень, пример 9.3.

Делим на 116: $2^{-\frac{t}{9}} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$. Показательная функция с основанием 2 строго возрастает, поэтому равенство значений равносильно равенству показателей.

Из $-\frac{t}{9} = -2$ получаем $t = 18$. Это два периода полураспада: 116 мг превращаются в 58 мг, затем в 29 мг. Время неотрицательно и единственно.

Ответ. Через 18 минут.

Задание 15

Уровень сигнала задаётся формулой $L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$, где $I > 0$, $I_0 > 0$. Во сколько раз увеличилась интенсивность I , если уровень вырос на 20 единиц, а I_0 не изменилось?

Для двух состояний вычитаем формулы:

$$L_2 - L_1 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} = 20.$$

Аргумент положителен. Поэтому $\log_{10} \frac{I_2}{I_1} = 2$, откуда $\frac{I_2}{I_1} = 10^2 = 100$. Изменение уровня аддитивно, а интенсивности - мультипликативно.

Ответ. В 100 раз.

Задание 16

В кладке 20 рядов: в первом 15 кирпичей, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Найдите общее число кирпичей.

Числа образуют арифметическую прогрессию с $a_1 = 15$, $d = 2$. В двадцатом ряду $a_{20} = 15 + 19 \cdot 2 = 53$ кирпича.

Сумма $S_{20} = \frac{20(15 + 53)}{2} = 680$. Обоснование формулы: при попарном сложении первого с последним, второго с предпоследним и так далее получаются 10 пар по 68 кирпичей.

Ответ. 680 кирпичей.

03. Повторение пройденного: задания 17-20

Задание 17

Повторение: рациональные неравенства. Решите $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$.

ОДЗ: $x \neq -2$. Критические точки -2 и 1 делят прямую на три промежутка. При $x < -2$ оба множителя отрицательны, дробь положительна; при $-2 < x < 1$ знаки различны; при $x > 1$ оба положительны.

В точке 1 дробь равна нулю, поэтому точку включаем. Точку -2 исключаем независимо от знака неравенства.

Ответ. $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.



Решение рационального неравенства: -2 исключено, 1 включено.

Задание 18

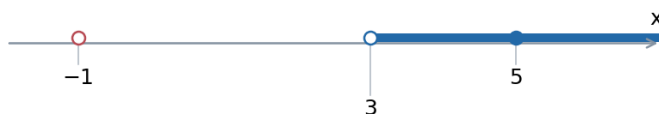
Повторение: логарифмические уравнения. Решите $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$.

ОДЗ: одновременно $x-1 > 0$ и $x-3 > 0$, то есть $x > 3$. Только на ОДЗ объединяем логарифмы:

$$\log_2((x-1)(x-3)) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 8.$$

Получаем $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) = 0$. Корни 5 и -1; второй не входит в ОДЗ. При $x = 5$ сумма равна $\log_2 4 + \log_2 2 = 3$.

Ответ. 5.



ОДЗ $x > 3$; из двух алгебраических корней подходит только 5.

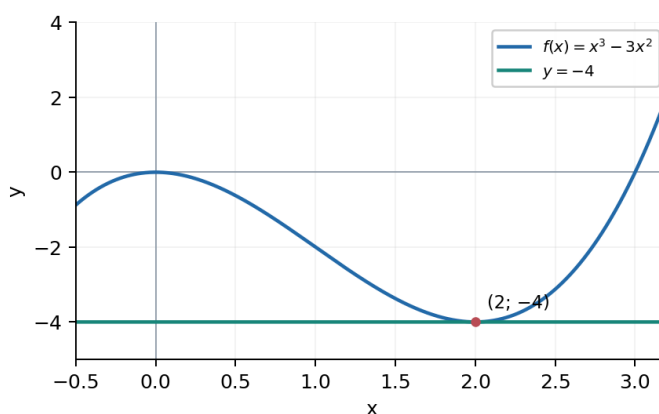
Задание 19

Повторение: производная. Найдите уравнение касательной к графику $f(x) = x^3 - 3x^2$ в точке с абсциссой 2.

Производная $f'(x) = 3x^2 - 6x$, поэтому $f'(2) = 0$. Ордината точки $f(2) = 8 - 12 = -4$.

Формула касательной $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$ даёт $y = -4$. Нулевой наклон означает горизонтальную прямую, а не вертикальную $x = 2$.

Ответ. $y = -4$.



Горизонтальная касательная в точке (2; -4).

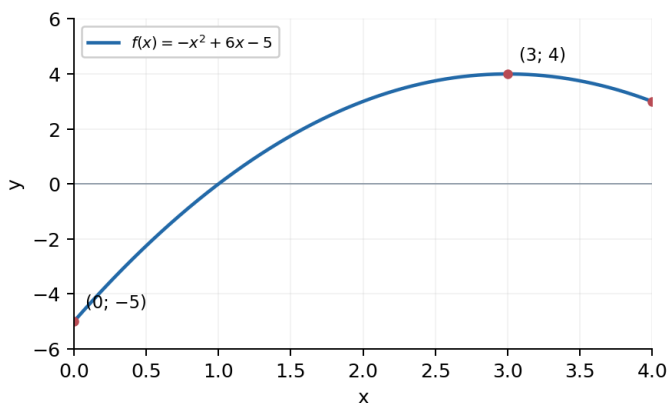
Задание 20

Повторение: наибольшее и наименьшее значения. Найдите оба экстремальных значения функции $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ на $[0; 4]$ и точки их достижения.

Функция непрерывна на отрезке. Производная $f'(x) = 6 - 2x$ обращается в нуль при $x = 3$, внутри отрезка.

Сравниваем все кандидаты: $f(0) = -5$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$. Других внутренних критических точек нет, производная существует всюду. Значит, минимум равен -5, максимум 4.

Ответ. Минимум -5 при $x = 0$; максимум 4 при $x = 3$.



На отрезке $[0; 4]$ сравниваются концы и вершина.

04. Составные задачи: задания 21-30

Задание 21

К 20 кг 15%-го раствора добавляют 40%-й раствор того же вещества. Сколько килограммов нужно добавить, чтобы получить 25%-й раствор? Проценты массовые, потерь вещества нет.

Пусть $x \geq 0$ - масса добавки. Исходная масса растворённого вещества $0,15 \cdot 20 = 3$ кг; в добавке $0,4x$ кг. Общая масса $20 + x$ кг.

Баланс вещества $3 + 0,4x = 0,25(20 + x)$ даёт $0,15x = 2$, откуда $x = \frac{40}{3}$. Коэффициент при x ненулевой, поэтому решение единственно и положительно.

Концентрация 25% лежит между 15% и 40%, что согласуется со смешиванием.

Ответ. $\frac{40}{3}$ кг.

Задание 22

Из 30 кг 12%-го раствора выпаривают только воду до получения 18%-го раствора. Сколько воды нужно удалить?

Масса растворённого вещества остаётся $30 \cdot 0,12 = 3,6$ кг. Если удалено x кг воды, то $0 \leq x < 30$, а масса смеси $30 - x$.

Уравнение $\frac{3,6}{30 - x} = 0,18$ равносильно $30 - x = 20$, то есть $x = 10$. В исходном

растворе 26,4 кг воды, поэтому удалить 10 кг возможно. Проверка: $\frac{3,6}{20} = 0,18$.

Ответ. 10 кг воды.

Задание 23

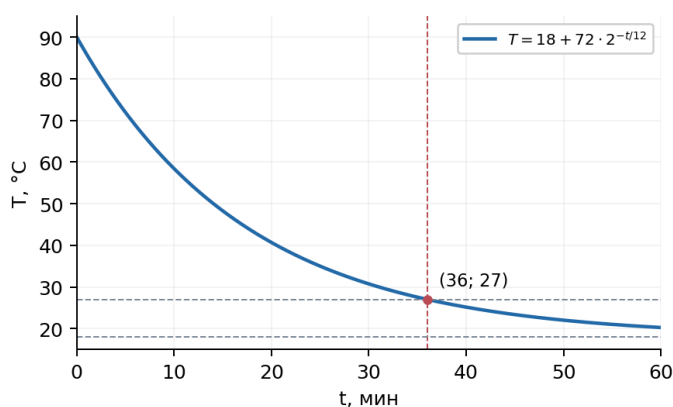
Температура жидкости $T(t) = 18 + 72 \cdot 2^{-\frac{t}{12}}$ °C, $t \geq 0$ - минуты после начала охлаждения. Найдите самое раннее время, когда температура не превышает 27 °C.

Условие преобразуется без потери равносильности:

$$18 + 72 \cdot 2^{-\frac{t}{12}} \leq 27 \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{12}} \leq \frac{1}{8} = 2^{-3}.$$

Основание 2 больше единицы, поэтому $-\frac{t}{12} \leq -3$. При умножении на -12 знак меняется: $t \geq 36$. На границе температура равна 27 °C, а затем продолжает уменьшаться к 18 °C.

Ответ. Через 36 минут.



Охлаждение: температура впервые равна 27 °C через 36 минут.

Задание 24

Оборудование изначально стоит 1 000 000 рублей. После каждого полного года его расчётная стоимость уменьшается на 20% от текущей. Через сколько полных лет она впервые станет не больше 500 000 рублей?

После n полных лет стоимость $1000000 \cdot 0,8^n$, где n - неотрицательное целое. Последовательность строго убывает, так как коэффициент 0,8 лежит между нулём и единицей.

Через 3 года стоимость 512000 рублей, что больше порога; через 4 года - 409600 рублей, что меньше порога. Монотонность исключает более раннее выполнение условия. Дробное значение времени не является ответом на вопрос о полных годах.

Ответ. Через 4 года.

Задание 25

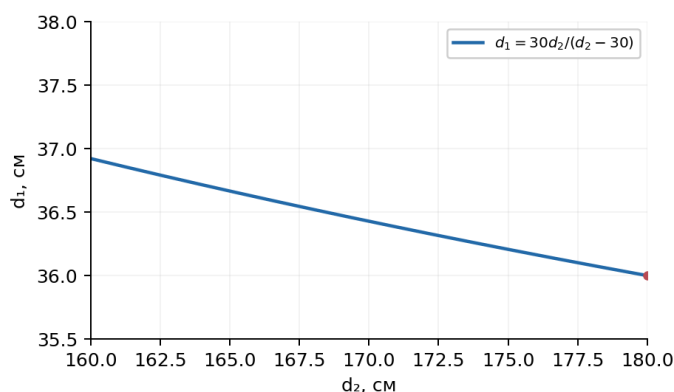
Для тонкой линзы в принятой модели $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30}$, расстояния в сантиметрах. Известно $20 \leq d_1 \leq 40$ и $160 \leq d_2 \leq 180$. Найдите наименьшее возможное d_1 . Данные: ФИПИ, методические рекомендации ЕГЭ-2026, профильный уровень, пример 9.4. Условие дополнено явными ограничениями модели.

Из формулы $d_1 = \frac{30d_2}{d_2 - 30}$. На заданном отрезке знаменатель положителен.

Производная по d_2 равна $-\frac{900}{(d_2 - 30)^2} < 0$, поэтому d_1 убывает.

Минимум достигается при $d_2 = 180$ и равен $\frac{5400}{150} = 36$ см. Максимум на отрезке равен $\frac{4800}{130} = \frac{480}{13} < 40$; весь полученный диапазон лежит в $[20; 40]$. Значит, дополнительное ограничение не исключает точку минимума.

Ответ. 36 см.



Расстояние d_1 убывает при росте d_2 ; минимум на правом конце.

Задание 26

Два учебных тарифа на месяц: А - 350 рублей плюс 20 рублей за каждую использованную минуту; В - 500 рублей плюс 15 рублей за минуту. Число минут n - неотрицательное целое. С какого значения n тариф В строго дешевле?

Сравниваем полные стоимости: $500 + 15n < 350 + 20n$. Перенос слагаемых даёт $150 < 5n$, то есть $n > 30$.

Так как минуты целые, первое подходящее значение - 31. При 30 минутах оба тарифа стоят 950 рублей, равенство не удовлетворяет слову «строго». При 31 минуте стоимости 970 и 965 рублей соответственно.

Ответ. Начиная с 31 минуты.

Задание 27

На изначально пустой счёт в конце каждого из трёх лет вносят по 100 000 рублей. Перед очередным взносом на уже имеющуюся сумму начисляют 10% годовых. Сколько денег будет сразу после третьего взноса?

Первый взнос участвует в двух начислениях, второй - в одном, третий ещё не получает процентов. Поэтому итог

$$100000 \cdot 1,1^2 + 100000 \cdot 1,1 + 100000 = 331000.$$

Проверка по годам: после первого взноса 100000; после второго $110000 + 100000 = 210000$; после третьего $231000 + 100000 = 331000$. Начислять проценты на третий взнос заранее нельзя.

Ответ. 331 000 рублей.

Задание 28

Предприятие наращивает выпуск на одно и то же количество изделий за месяц. В третьем месяце выпущено 11 изделий, в двенадцатом - 47. Найдите общий выпуск за первые 20 месяцев.

Пусть первый выпуск a_1 , ежемесячная прибавка d . Тогда $a_1 + 2d = 11$, $a_1 + 11d = 47$. Вычитая, получаем $9d = 36$, поэтому $d = 4$, $a_1 = 3$.

Двадцатый выпуск $a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79$. Сумма $S_{20} = \frac{20(3 + 79)}{2} = 820$. Все месячные выпуски положительные целые, так что модель производства допустима.

Ответ. 820 изделий.

Задание 29

Учебный кредит 900 000 рублей погашают за три года равными частями основного долга. Перед ежегодным платежом на оставшийся основной долг начисляют соответственно 10%, 12% и 14%; эти проценты полностью выплачивают вместе с очередной частью долга. Найдите сумму всех платежей.

Каждый год возвращают $\frac{900000}{3} = 300000$ рублей основного долга. До начисления процентов остатки равны 900000, 600000 и 300000 рублей.

Проценты составят 90000, 72000 и 42000 рублей. Платежи - 390000, 372000 и 342000 рублей. Их сумма $900000 + 90000 + 72000 + 42000 = 1104000$. Равны части основного долга, но не полные платежи.

Ответ. 1 104 000 рублей.

Задание 30

На счёт внесли 400 000 рублей. После начисления процентов за первый год сняли 44 000 рублей. После начисления такого же неотрицательного годового процента за второй год на счёте стало 435 600 рублей. Найдите ставку.

Обозначим годовой коэффициент $q = 1 + \frac{p}{100} \geq 1$. После снятия остаётся $400000q - 44000 > 0$, затем сумма становится $(400000q - 44000)q$.

В тысячах рублей уравнение $400q^2 - 44q - 435,6 = 0$ раскладывается как $400(q - 1,1)(q + 0,99) = 0$. Корень $-0,99$ нарушает $q \geq 1$; остаётся $q = 1,1$.

Проверка: $(440000 - 44000) \cdot 1,1 = 435600$. Ставка $(q - 1) \cdot 100\% = 10\%$.

Ответ. 10% годовых.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34**Задание 31**

Тело тормозит с начальной скоростью 24 м/с и постоянным замедлением 3 м/с². До остановки путь $S(t) = 24t - \frac{3}{2}t^2$, скорость $v(t) = 24 - 3t$. Через сколько секунд после начала торможения путь составит 90 м? Модель действует только пока $v(t) \geq 0$. Данные: ФИПИ, методические рекомендации ЕГЭ-2026, профильный уровень, пример 9.6. Условие дополнено явными ограничениями модели.

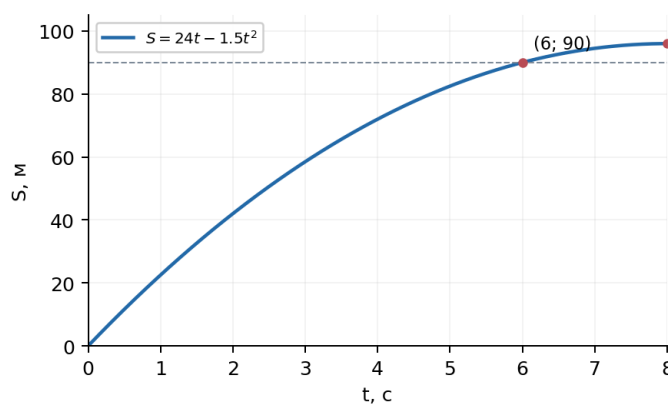
Физическая область: $t \geq 0$ и $24 - 3t \geq 0$, то есть $0 \leq t \leq 8$. Уравнение пути

$$24t - \frac{3}{2}t^2 = 90 \Leftrightarrow t^2 - 16t + 60 = (t - 6)(t - 10) = 0.$$

Из корней 6 и 10 допустим только 6. Корень 10 соответствует продолжению параболы после остановки, где формула уже не описывает пройденный путь.

На $[0; 8]$ путь возрастает до 96 м, поэтому момент достижения 90 м единственный. Подстановка $t = 6$ даёт $144 - 54 = 90$.

Ответ. Через 6 с.



Физическая часть графика заканчивается при остановке $t = 8$ с.

Задание 32

Энергия конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$ Дж. Его ёмкость может быть любой от 2 до 6 мкФ включительно, причём $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$. Найдите наибольшее $U \geq 0$, при котором энергия не превышает 0,12 Дж при любой допустимой ёмкости.

Для фиксированного U энергия не убывает при увеличении C , так как $U^2 \geq 0$. Поэтому необходимо и достаточно выполнить ограничение при наибольшей ёмкости $C = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$.

Получаем $3 \cdot 10^{-6} U^2 \leq 0,12$, то есть $U^2 \leq 40000$. С учётом $U \geq 0$ имеем $0 \leq U \leq 200$. Граница достигается при максимальной ёмкости; большее напряжение нарушит условие именно при ней.

Ответ. 200 В.

Задание 33

При выпуске x изделий цена одного равна $500 - 2x$ рублей. Затраты составляют $100x + 2000$ рублей. Допускается целое $x \geq 0$ с неотрицательной ценой. Найдите выпуск максимальной прибыли и все выпуски со строго положительной прибылью.

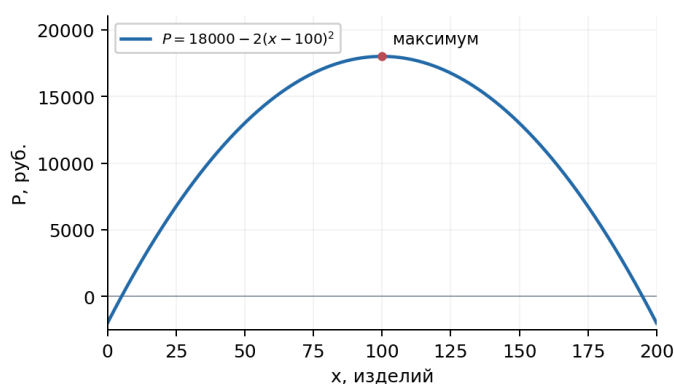
Область выпуска: целые $0 \leq x \leq 250$. Прибыль - выручка минус затраты:

$$P(x) = x(500 - 2x) - (100x + 2000) = 18000 - 2(x - 100)^2.$$

Квадрат неотрицателен, поэтому максимум 18000 рублей достигается единственно при $x = 100$, допустимом целом числе.

Для положительной прибыли $(x - 100)^2 < 9000$, то есть $100 - 30\sqrt{10} < x < 100 + 30\sqrt{10}$. Границы лежат соответственно между 5 и 6, между 194 и 195. Поэтому подходят все целые от 6 до 194; они входят в физическую область. Равенство прибыли нулю не включается.

Ответ. 100 изделий, 18 000 рублей; прибыль положительна при $x = 6, 7, \dots, 194$.



Прибыль максимальна при 100 изделиях; нули ограничивают прибыльные выпуски.

Задание 34

Нужно приготовить 60 кг смеси концентрации не менее 25% из 15%-го раствора по 80 рублей за килограмм и 40%-го по 140 рублей за килограмм. Массы могут быть дробными; потерь нет. Найдите наименьшую стоимость и массы компонентов.

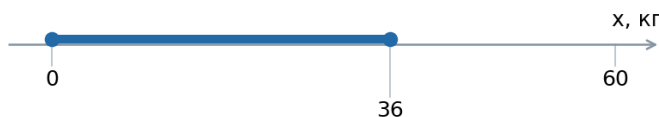
Пусть x кг - дешёвый раствор; дорогого $60 - x$ кг, $0 \leq x \leq 60$. Условие концентрации:

$$0,15x + 0,4(60 - x) \geq 0,25 \cdot 60 \Leftrightarrow x \leq 36.$$

Стоимость $C(x) = 80x + 140(60 - x) = 8400 - 60x$ строго убывает. На допустимом отрезке $[0; 36]$ минимум при $x = 36$, значит, дорогого раствора нужно 24 кг.

Стоимость $80 \cdot 36 + 140 \cdot 24 = 6240$ рублей. Проверка вещества: $5,4 + 9,6 = 15$ кг, ровно 25% от 60 кг. Более дешёвый вариант требовал бы $x > 36$ и не достигал нужной концентрации.

Ответ. 6240 рублей; 36 кг 15%-го и 24 кг 40%-го раствора.



Допустимая масса дешёвого раствора: от 0 до 36 кг;
минимум стоимости справа.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40

Задание 35

Кредит 331 000 рублей выдан на три года. В конце каждого года долг сначала увеличивается на 10%, затем вносится один и тот же платёж P . После третьего платежа долг равен нулю; до этого он положителен. Найдите платёж, выведя уравнение через последовательные остатки.

Пусть $D_0 = 331000$, $q = 1,1$. Порядок операций означает $D_k = qD_{k-1} - P$.
Последовательно:

$$D_1 = qD_0 - P, \quad D_2 = q^2D_0 - (q + 1)P,$$

$$D_3 = q^3D_0 - (q^2 + q + 1)P.$$

Условие $D_3 = 0$ даёт единственный платёж, поскольку коэффициент $q^2 + q + 1 > 0$:

$$P = \frac{331000 \cdot 1,331}{3,31} = 133100.$$

Остатки после первых платежей: $D_1 = 364100 - 133100 = 231000$,

$D_2 = 254100 - 133100 = 121000$. Оба положительны. Третий: $133100 - 133100 = 0$. Таким образом, проверено и конечное равенство, и отсутствие досрочного погашения.

Сумма платежей 399300 рублей; она превышает выданную сумму, что согласуется с положительной ставкой.

Ответ. 133 100 рублей.

Задание 36

В баке 100 л однородного раствора, содержащего 20 кг соли. На каждом шаге удаляют 20 л тщательно перемешанного раствора и доливают 20 л чистой воды. Объём после каждого шага снова 100 л. После какого наименьшего числа шагов содержание соли станет не больше 5 кг? Докажите минимальность.

При удалении пятой части объёма уходит пятая часть соли. Вода соли не добавляет, поэтому $M_{n+1} = \frac{4}{5}M_n$, $M_0 = 20$. Индукцией: $M_n = 20 \left(\frac{4}{5}\right)^n$ кг для любого целого $n \geq 0$.

Нужно $\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{1}{4}$. Можно записать $n \geq \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln \frac{4}{5}}$, меняя знак при делении на отрицательный логарифм, но для точного отбора достаточно соседних целых.

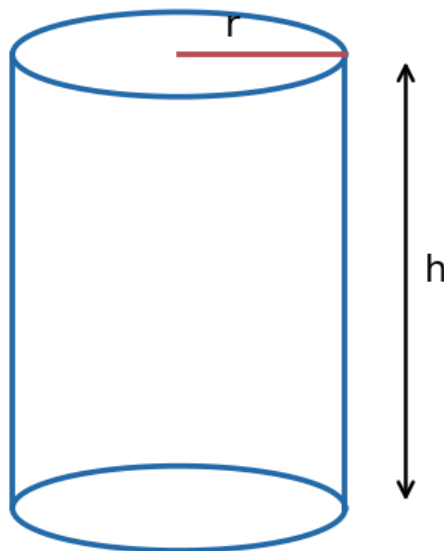
$M_6 = 5,24288 > 5$, а $M_7 = 4,194304 < 5$. Поскольку $0 < \frac{4}{5} < 1$, последовательность строго убывает; все более ранние шаги дают ещё большую массу.

Следовательно, первый подходящий шаг - седьмой. Ошибка вычитать каждый раз 4 кг игнорировала бы снижение концентрации.

Ответ. После 7 шагов.

Задание 37

Закрытый цилиндрический сосуд должен иметь объём 250π см³. Радиус основания не может превышать 4 см; толщиной материала пренебрегают. Найдите радиус и высоту сосуда с наименьшей полной площадью поверхности и саму площадь.



$$V = 250\pi \text{ см}^3; \quad 0 < r \leq 4 \text{ см}$$

Закрытый цилиндр: два основания и боковая поверхность;
схема не в масштабе.

Область радиуса $0 < r \leq 4$. Из объёма $\pi r^2 h = 250\pi$ получаем $h = \frac{250}{r^2} > 0$. Площадь двух оснований и боковой поверхности:

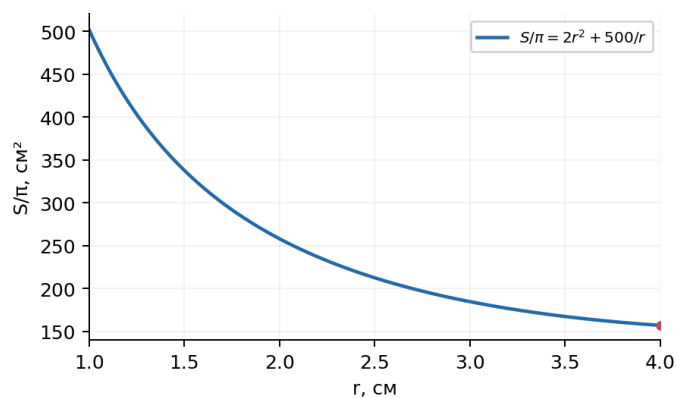
$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}.$$

Производная

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} = \frac{4\pi(r^3 - 125)}{r^2}.$$

Свободная критическая точка $r = 5$ не входит в область. Для каждого $r \in (0; 4]$ производная отрицательна, поэтому площадь строго убывает и минимум достигается на правой границе.

При $r = 4$ высота $h = \frac{250}{16} = \frac{125}{8}$ см, площадь $S = 32\pi + 125\pi = 157\pi$ см². При $r \rightarrow 0+$ площадь стремится к бесконечности; потерянного минимума на открытом конце нет. Сосуд с радиусом 5 см был бы недопустимым, несмотря на меньшую площадь без ограничения.



На допустимом интервале площадь строго убывает; $r = 5$ не входит в область.

Ответ. $r = 4$ см, $h = \frac{125}{8}$ см; $S_{\min} = 157\pi$ см².

Задание 38

Кредит 1 200 000 рублей погашается за целое число $n \geq 1$ лет равными частями основного долга. Перед каждым платежом начисляется 10% на текущий остаток, проценты сразу выплачиваются. Каждый полный платёж должен быть не больше 360 000 рублей, а сумма всех платежей - не больше 1 620 000 рублей. Найдите все возможные n .

Обозначим исходный долг $D = 1200000$. Перед k -м начислением остаток $D \frac{n-k+1}{n}$, поэтому

$$P_k = \frac{D}{n} + 0,1D \frac{n-k+1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Платежи строго убывают, значит, ограничение каждого платежа равносильно ограничению первого:

$$\frac{1200000}{n} + 120000 \leq 360000 \Leftrightarrow n \geq 5.$$

При умножении на n знак не меняется, так как $n > 0$.

Сумма остатков до начисления равна $\frac{D}{n}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{D(n+1)}{2}$. Поэтому общая выплата

$$D + \frac{0,1D(n+1)}{2} = 1200000 + 60000(n+1).$$

Второе ограничение даёт $n+1 \leq 7$, то есть $n \leq 6$. Пересечение с целыми $n \geq 1$ состоит из 5 и 6.

Проверка границ: при $n = 5$ первый платёж 360000, сумма 1560000; при $n = 6$ первый платёж 320000, сумма 1620000. Оба равенства разрешены. При меньшем сроке нарушается первое ограничение, при большем - второе.



Сроки, удовлетворяющие обоим ограничениям: только 5 и 6 лет.

Ответ. 5 или 6 лет.

Задание 39

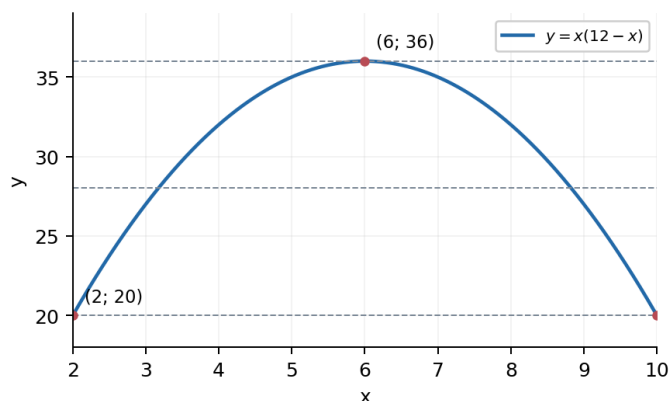
В учебной непрерывной модели прибыль $P(x) = x(12 - x) - a$ условных денежных единиц, объём выпуска $x \in [2; 10]$, постоянные затраты $a \geq 0$. При каких a существуют ровно два разных допустимых объёма выпуска с нулевой прибылью? Разберите также критические значения параметра.

Выделяем квадрат: $P(x) = 36 - a - (x - 6)^2$. Нулевая прибыль равносильна $(x - 6)^2 = 36 - a$.

Если $a > 36$, правая часть отрицательна - корней нет. При $a = 36$ единственный корень $x = 6$. При $0 \leq a < 36$ два разных алгебраических корня $x_{\pm} = 6 \pm \sqrt{36 - a}$.

Отрезок $[2; 10]$ симметричен относительно 6. Поэтому либо оба корня допустимы, либо оба вне отрезка. Условие допустимости $\sqrt{36 - a} \leq 4$ равносильно $a \geq 20$. Вместе с различностью корней получаем $20 \leq a < 36$.

При $a = 20$ корни ровно 2 и 10, обе границы входят. При $20 < a < 36$ корни внутри отрезка. При $0 \leq a < 20$ один корень меньше 2, другой больше 10. Таким образом, все случаи рассмотрены, а значение 36 исключено из ответа из-за совпадения корней.



Два пересечения на $[2; 10]$ существуют для уровней от 20 включительно до 36 не включительно.



Параметр затрат: 20 включается, 36 исключается.

Ответ. $a \in [20; 36)$.

Задание 40

Установка работает t часов, $1 \leq t \leq 6$. Её условные затраты описывает функция $C(t) = t + \frac{4}{t}$. Бюджет $a \geq 0$. Для каждого a найдите все допустимые времена, при которых $C(t) \leq a$. Укажите все значения параметра, при которых меняется вид ответа.

Так как $t > 0$, неравенство равносильно $t^2 - at + 4 \leq 0$ на $[1; 6]$. Кроме того,

$$C(t) - 4 = \frac{(t-2)^2}{t} \geq 0.$$

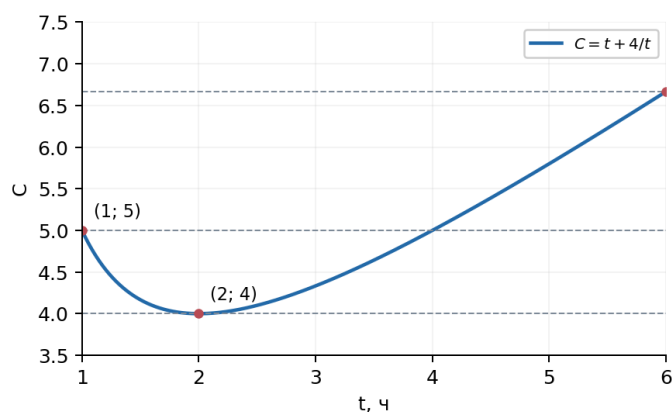
Поэтому при $0 \leq a < 4$ решений нет; при $a = 4$ подходит только $t = 2$.

Для $a > 4$ дискриминант положителен. Обозначим

$$r_-(a) = \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{2}, \quad r_+(a) = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2}.$$

Квадратный трёхчлен неположителен между корнями включительно. Искомое множество - $[r_-; r_+] \cap [1; 6]$.

Чтобы раскрыть пересечение, исследуем границы. $C'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}$ отрицательна на $[1; 2)$ и положительна на $(2; 6]$. Значения $C(1) = 5$, $C(2) = 4$, $C(6) = \frac{20}{3}$. Поэтому левая граница рабочего отрезка начинает входить при $a = 5$, правая - при $a = \frac{20}{3}$.



Бюджетные уровни: 4 - минимум, 5 - левый конец, $20/3$ - правый конец.

При $4 < a < 5$ оба корня внутри $[1; 6]$: ответ $[r_-; r_+]$. При $a = 5$ корни 1 и 4. При $5 \leq a < \frac{20}{3}$ нижний корень не больше 1, а верхний меньше 6: ответ $[1; r_+]$.

При $a = \frac{20}{3}$ корни $\frac{2}{3}$ и 6, ответ уже весь $[1; 6]$. При большем бюджете весь отрезок остаётся допустимым: на нём максимум затрат $\frac{20}{3}$. Таким образом, иных изменений вида ответа нет.

Ответ. При $0 \leq a < 4$ - $\emptyset$; при $a = 4$ - $\{2\}$; при $4 < a < 5$ - $[r_-; r_+]$; при $5 \leq a < \frac{20}{3}$ - $[1; r_+]$; при $a \geq \frac{20}{3}$ - $[1; 6]$. Критические значения: 4, 5, $\frac{20}{3}$.