



Числа, вычисления и свойства чисел

Задания для самостоятельной работы

40 заданий. Записывайте ход решения в тетради. Ответы и подробные разборы находятся в отдельном PDF этого урока.

Имя: _____

Дата: _____

01. Основа метода: задания 1-10

Задание 1

Разложите 360 на простые множители и найдите число его натуральных делителей.

Задание 2

Найдите $\gcd(84, 126)$ и $\text{lcm}(84, 126)$. Затем проверьте их произведение.

Задание 3

Докажите, что $2n + 1$ и $4n + 4$ взаимно просты при любом натуральном n .

Задание 4

Найдите число натуральных делителей 216 и число тех из них, которые являются квадратами.

Задание 5

Найдите наименьшее натуральное число, делящееся одновременно на 12, 15 и 18.

Задание 6

Сколько целых чисел от 100 до 200 включительно делятся на 7?

Задание 7

Докажите, что квадрат любого нечётного целого числа даёт остаток 1 при делении на 8.

Задание 8

Выполните деление -137 на 11 с остатком: найдите целые q, r , где $-137 = 11q + r$ и $0 \leq r < 11$.

Задание 9

Найдите все натуральные числа n , дающие остаток 2 при делении на 5 и остаток 3 при делении на 7.

Задание 10

Найдите все натуральные n , для которых $\frac{84}{n}$ является простым числом.

02. Преобразования и ограничения: задания 11-16**Задание 11**

Алгоритмом Евклида найдите $\gcd(252, 198)$ и представьте его в виде $252x + 198y$.

Задание 12

Алгоритмом Евклида найдите $\gcd(391, 299)$ и представьте его в виде $391x + 299y$.

Задание 13

Найдите остаток от деления числа 3^{17} на 5.

Задание 14

Найдите остаток от деления 7^{2026} на 100.

Задание 15

Найдите остаток от деления $2^{100} + 3^{100}$ на 5.

Задание 16

Докажите, что $10^n - 1$ делится на 9 при любом натуральном n .

03. Повторение пройденного: задания 17-20**Задание 17**

Вычислите без десятичного приближения:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}.$$

Задание 18

Вычислите без десятичного приближения:

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{18} - \frac{1}{9}.$$

Задание 19

Цена товара была равна 2400 рублей. Сначала её увеличили на 15%, затем новую цену уменьшили на 10%. Найдите итоговую цену.

Задание 20

Цена товара была равна 3600 рублей. Сначала её увеличили на 20%, затем новую цену уменьшили на 25%. Найдите итоговую цену.

04. Составные задачи: задания 21-30**Задание 21**

Найдите наименьшее натуральное m , при котором $72m$ является полным квадратом.

Задание 22

Найдите наименьшее натуральное m , для которого $180m$ одновременно является полным квадратом и полным кубом.

Задание 23

Найдите наименьшее натуральное m , для которого $540m$ является полным кубом.

Задание 24

Найдите все натуральные $m < 50$, для которых $72m$ является полным квадратом.

Задание 25

Найдите все четырёхзначные числа вида $\overline{2a3b}$, которые делятся на 45. Здесь a, b - цифры.

Задание 26

Найдите все трёхзначные числа-палиндромы $\overline{aba}$, которые делятся на 11.

Задание 27

Докажите, что произведение любых пяти последовательных целых чисел делится на 120.

Задание 28

Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6 даёт остаток на единицу меньше делителя.

Задание 29

Найдите все пары неотрицательных целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению

$$8x + 12y = 96.$$

Задание 30

Найдите все пары положительных целых чисел (x, y) , для которых $5x + 7y = 100$, и наибольшее значение xy .

05. Развёрнутое решение: задания 31–36**Задание 31**

Найдите все натуральные n , для которых $n + 1$ делит $n^2 + 5$.

Задание 32

Натуральные a, b удовлетворяют $\text{НОД}(a, b) = 18$ и $\text{НОК}(a, b) = 7560$.

а) Найдите число упорядоченных пар. б) Найдите наименьшую сумму $a + b$. в) Докажите единственность минимальной пары с точностью до перестановки.

Задание 33

а) Приведите пример натурального числа, которое делится на 72 и имеет ровно 18 натуральных делителей.

б) Может ли натуральное число, делящееся на 216, иметь ровно 18 натуральных делителей?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 72 и имеет ровно 18 натуральных делителей.

Задание 34

Натуральные числа a и b удовлетворяют условиям

$$\text{НОД}(a, b) = 12$$

и

$$\text{НОК}(a, b) = 2520.$$

а) Приведите одну такую упорядоченную пару.

б) Докажите, что после деления обоих чисел на 12 получатся взаимно простые числа.

в) Найдите количество всех упорядоченных пар (a, b) .

Задание 35

а) Приведите целое n , для которого $n^2 + 1$ делится на 5.

б) Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком целом n .

в) Найдите наибольшее натуральное k , для которого $n^5 - n$ делится на k при любом целом n .

Задание 36

а) Приведите натуральное число, которое делится на 90 и имеет ровно 24 натуральных делителя.

б) Объясните, какие наборы показателей простых множителей могут дать ровно 24 делителя.

в) Найдите наименьшее такое число.

06. Сложные задачи на доказательство: задания 37-40**Задание 37**

- а) Верно ли, что среди любых двенадцати целых чисел найдутся два с разностью, делящейся на 12?
- б) Постройте набор из двенадцати целых чисел, в котором разность никакой пары не делится на 12.
- в) Найдите наименьшее m , при котором среди любых m целых чисел обязательно найдутся два с разностью, делящейся на 12.

Задание 38

Неотрицательные целые числа x и y удовлетворяют уравнению

$$14x + 21y = 210.$$

Найдите все решения, их количество и наибольшее возможное значение произведения xy .

Задание 39

- а) Докажите, что $n^3 - n$ делится на 6 при любом целом n .
- б) Найдите все остатки n при делении на 5, для которых $n^2 \equiv 1 \pmod{5}$.
- в) Найдите все остатки n при делении на 30, для которых $n^2 \equiv 1 \pmod{30}$.

Задание 40

Даны десять различных натуральных чисел. Среднее арифметическое любых четырёх из них и любых пяти из них является целым числом.

- а) Могут ли в набор входить 403 и 2013?
- б) Могут ли в набор входить 403 и полный квадрат?
- в) В набор входят 1 и n^2 , где $n > 1$ - натуральное. Найдите наименьшее возможное n .

По задаче 19 варианта 2 официальной демоверсии ФИПИ ЕГЭ-2026.
Формулировка адаптирована; решение авторское.