



Урок 19. Векторы и координаты

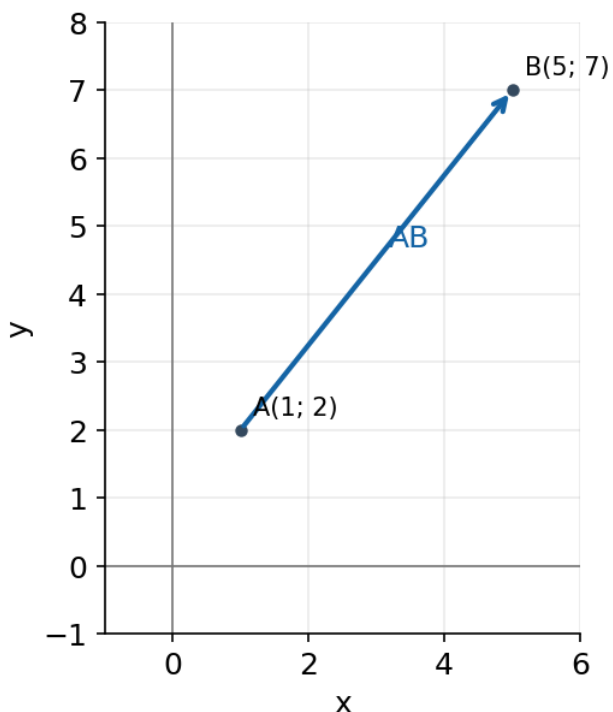
40 заданий с ответами и решениями

01. Начальный уровень: задания 1-20

Задание 1

Даны точки $A(1; 2)$ и $B(5; 7)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Задание 1. Вектор $\overrightarrow{AB}$



Ответ и решение к заданию 1 1. $\overrightarrow{AB} = (5 - 1; 7 - 2) = (4; 5)$.

Ответ: $(4; 5)$

Задание 2

Даны точки $A(-3; 4)$ и $B(2; -1)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Ответ и решение к заданию 2 1. $\overrightarrow{AB} = (2 - (-3); -1 - 4) = (5; -5)$.

Ответ: $(5; -5)$

Задание 3

Дан вектор $\vec{a} = (-4; 6)$. Найдите координаты противоположного вектора $-\vec{a}$.

Ответ и решение к заданию 3 1. Меняем знаки обеих координат.

2. $-\vec{a} = (4; -6)$.

Ответ: $(4; -6)$

Задание 4

Вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $(3; -2)$, точка C имеет координаты $(-1; 5)$. Найдите координаты точки D , если векторы $\vec{CD}$ и $\vec{AB}$ равны.

Ответ и решение к заданию 4 1. К точке C прибавляем вектор $(3; -2)$.

2. $D = (-1 + 3; 5 - 2) = (2; 3)$.

Ответ: $D(2; 3)$

Задание 5

Найдите длину вектора $\vec{a} = (3; 4)$.

Ответ и решение к заданию 5 1. $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5

Задание 6

Найдите длину вектора $\vec{b} = (-5; 12)$.

Ответ и решение к заданию 6 1. $|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Ответ: 13

Задание 7

Найдите расстояние между точками $P(-1; -2)$ и $Q(2; 2)$.

Ответ и решение к заданию 7 1. $\overrightarrow{PQ} = (2 - (-1); 2 - (-2)) = (3; 4)$.

2. $|PQ| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Ответ: 5

Задание 8

Повторение: вероятность, прогрессии, движение и производная.

Два честных игральных кубика бросают независимо. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков не меньше 10.

Ответ и решение к заданию 8 1. Всего 36 равновозможных упорядоченных исходов.

2. Подходят $(4; 6)$, $(5; 5)$, $(6; 4)$, $(5; 6)$, $(6; 5)$, $(6; 6)$ - шесть исходов.

3. $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$

Задание 9

Даны векторы $\vec{a} = (2; -3)$ и $\vec{b} = (4; 1)$. Найдите $a + b$.

Ответ и решение к заданию 9 1. $a + b = (2 + 4; -3 + 1) = (6; -2)$.

Ответ: $(6; -2)$

Задание 10

Даны векторы $\vec{c} = (5; 2)$ и $\vec{d} = (-1; 4)$. Найдите $c - d$.

Ответ и решение к заданию 10 1. $c - d = (5 - (-1); 2 - 4) = (6; -2)$.

Ответ: $(6; -2)$

Задание 11

Дан вектор $\vec{a} = (-2; 5)$. Найдите $3a$.

Ответ и решение к заданию 11 1. Умножаем обе координаты на 3.

2. $3a = (-6; 15)$.

Ответ: $(-6; 15)$

Задание 12

Даны $\vec{a} = (3; 1)$, $\vec{b} = (-2; 4)$. Найдите $2a - b$.

Ответ и решение к заданию 12 1. $2a = (6; 2)$.

2. $2a - b = (6 - (-2); 2 - 4) = (8; -2)$.

Ответ: $(8; -2)$

Задание 13

Точка $A(1; -2)$, вектор $\overrightarrow{AB} = (5; 3)$. Найдите координаты точки В.

Ответ и решение к заданию 13 1. $B = A + \overrightarrow{AB}$.

2. $B = (1 + 5; -2 + 3) = (6; 1)$.

Ответ: $B(6; 1)$

Задание 14

Точка $B(4; 5)$, вектор $\overrightarrow{AB} = (-3; 2)$. Найдите координаты точки А.

Ответ и решение к заданию 14 1. $A = B - \overrightarrow{AB}$.

2. $A = (4 - (-3); 5 - 2) = (7; 3)$.

Ответ: $A(7; 3)$

Задание 15

Найдите середину отрезка с концами $A(-2; 4)$ и $B(6; -8)$.

Ответ и решение к заданию 15 1. $x_M = \frac{(-2 + 6)}{2} = 2$.

2. $y_M = \frac{(4 - 8)}{2} = -2$.

Ответ: $M(2; -2)$

Задание 16

Повторение: вероятность, прогрессии, движение и производная.

В геометрической прогрессии $b_1 = 3$, $q = 2$. Найдите b_5 .

Ответ и решение к заданию 16 1. $b_5 = b_1 q^4$.

2. $b_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$.

Ответ: 48

Задание 17

Точка $M(4; -1)$ - середина отрезка AB , $A(1; 3)$. Найдите координаты B .

Ответ и решение к заданию 17 1. $B = 2M - A$.

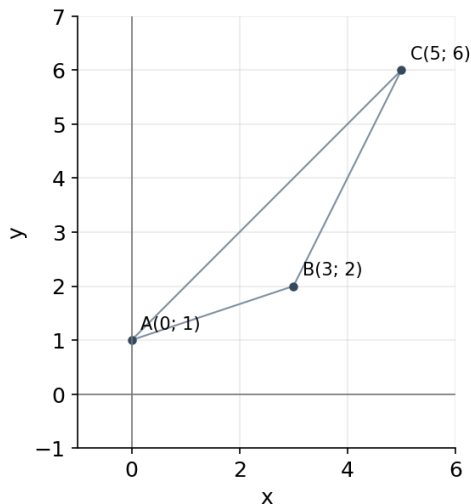
2. $x_B = 8 - 1 = 7$; $y_B = -2 - 3 = -5$.

Ответ: $B(7; -5)$

Задание 18

$A(0; 1)$, $B(3; 2)$, $C(5; 6)$ - три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите D .

Задание 18. Три последовательные вершины



Ответ и решение к заданию 18 1. $D = A + C - B$.

2. $D = (0 + 5 - 3; 1 + 6 - 2) = (2; 5)$.

Ответ: $D(2; 5)$

Задание 19

Точки $A(0; 0)$, $B(3; 0)$, $C(3; 4)$ - вершины треугольника. Найдите его периметр.

Ответ и решение к заданию 19 1. $AB = 3$, $BC = 4$.

2. $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

3. Периметр $3 + 4 + 5 = 12$.

Ответ: 12

Задание 20

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2; -1)$ и $\vec{b} = (3; 4)$.

Ответ и решение к заданию 20 1. $a \cdot b = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 6 - 4 = 2$.

Ответ: 2

02. Средний уровень: задания 21-35

Задание 21

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = (-3; 5)$ и $\vec{b} = (2; -4)$.

Ответ и решение к заданию 21 1. $a \cdot b = (-3) \cdot 2 + 5 \cdot (-4) = -6 - 20 = -26$.

Ответ: -26

Задание 22

При каком y векторы $\vec{a} = (4; y)$ и $\vec{b} = (3; -2)$ перпендикулярны?

Ответ и решение к заданию 22 1. Для перпендикулярности $a \cdot b = 0$.

2. $4 \cdot 3 + y \cdot (-2) = 0$.

3. $12 - 2y = 0, y = 6$.

Ответ: 6

Задание 23

При каком k векторы $\vec{a} = (k; 3)$ и $\vec{b} = (6; -4)$ перпендикулярны?

Ответ и решение к заданию 23 1. $6k + 3 \cdot (-4) = 0$.

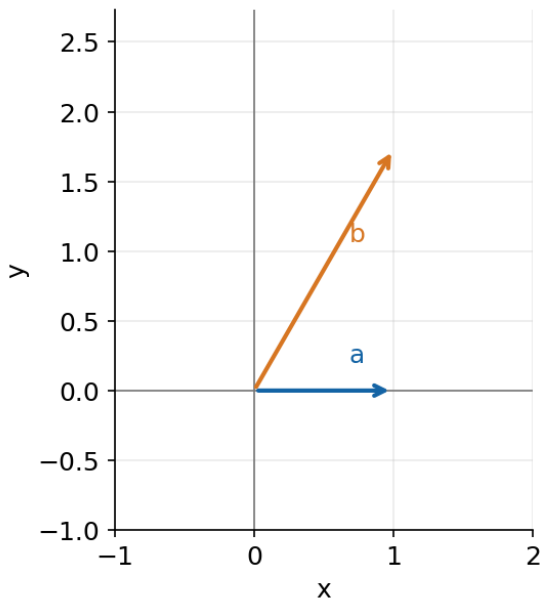
2. $6k - 12 = 0, k = 2$.

Ответ: 2

Задание 24

Найдите угол между векторами $\vec{a} = (1; 0)$ и $\vec{b} = (1; \sqrt{3})$.

Задание 24. Угол между векторами



Ответ и решение к заданию 24 1. $a \cdot b = 1$.

2. $|a| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{1+3} = 2$.

3. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, поэтому $\alpha = 60^\circ$.

Ответ: 60°

Задание 25

Найдите угол между векторами $\vec{a} = (1; 1)$ и $\vec{b} = (-1; 1)$.

Ответ и решение к заданию 25 1. $a \cdot b = -1 + 1 = 0$.

2. Ненулевые векторы со скалярным произведением 0 перпендикулярны.

3. Угол равен 90° .

Ответ: 90°

Задание 26

Определите, коллинеарны ли векторы $\vec{a} = (2; -3)$ и $\vec{b} = (-6; 9)$.

Ответ и решение к заданию 26 1. $b = -3a$, так как $-3 \cdot 2 = -6$ и $-3 \cdot (-3) = 9$.

2. Векторы коллинеарны и направлены противоположно.

Ответ: да, коллинеарны

Задание 27

Повторение: вероятность, прогрессии, движение и производная.

Собственная скорость лодки 12 км/ч, скорость течения 2 км/ч. За сколько часов лодка пройдёт 30 км по течению?

Ответ и решение к заданию 27 1. Скорость по течению $12 + 2 = 14$ км/ч.

2. $t = \frac{30}{14} = \frac{15}{7}$ ч.

Ответ: $\frac{15}{7}$ ч

Задание 28

Вектор $\vec{a} = (x; 6)$ имеет длину 10. Найдите все значения x .

Ответ и решение к заданию 28 1. $x^2 + 6^2 = 10^2$.

2. $x^2 + 36 = 100$, $x^2 = 64$.

3. $x = -8$ или $x = 8$.

Ответ: $-8; 8$

Задание 29

Точка $P(x; 4)$ находится на расстоянии 5 от начала координат. Найдите все значения x .

Ответ и решение к заданию 29 1. $OP^2 = x^2 + 4^2 = 25$.

2. $x^2 = 9$.

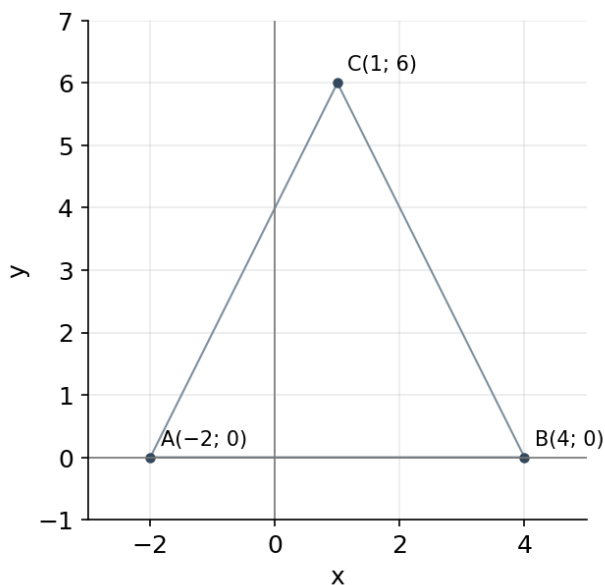
3. $x = -3$ или $x = 3$.

Ответ: $-3; 3$

Задание 30

В треугольнике $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 6)$ найдите длину медианы, проведённой из C к стороне AB .

Задание 30. Медиана треугольника



Ответ и решение к заданию 30 1. Середина AB: $M\left(\frac{(-2+4)}{2}; 0\right) = (1; 0)$.

2. $\overrightarrow{CM} = (1 - 1; 0 - 6) = (0; -6)$.

3. $|\overrightarrow{CM}| = 6$.

Ответ: 6

Задание 31

Диагональ AC параллелограмма имеет концы $A(-1; 2)$ и $C(7; -4)$. Найдите точку пересечения диагоналей.

Ответ и решение к заданию 31 1. Диагонали параллелограмма делятся пополам.

2. $M = \left(\frac{(-1+7)}{2}; \frac{(2-4)}{2}\right) = (3; -1)$.

Ответ: $M(3; -1)$

Задание 32

Точку $P(4; -2)$ перенесли на вектор $\vec{a} = (-3; 5)$. Найдите координаты образа P_1 .

Ответ и решение к заданию 32 1. $P_1 = P + a$.

2. $P_1 = (4 - 3; -2 + 5) = (1; 3)$.

Ответ: $P_1(1; 3)$

Задание 33

Объект сначала переместился на вектор $\vec{a} = (6; 8)$, затем на $\vec{b} = (-2; 1)$. Найдите итоговый вектор и его длину.

Ответ и решение к заданию 33 1. $a + b = (6 - 2; 8 + 1) = (4; 9)$.

2. $|a + b| = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{97}$.

Ответ: $(4; 9)$, длина $\sqrt{97}$

Задание 34

Повторение: вероятность, прогрессии, движение и производная.

Для функции $f(x) = x^3 - 3x$ найдите $f'(2)$.

Ответ и решение к заданию 34 1. $f'(x) = 3x^2 - 3$.

2. $f'(2) = 3 \cdot 4 - 3 = 9$.

Ответ: 9

Задание 35

В прямоугольнике $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(6; 4)$, $D(0; 4)$ найдите скалярное произведение $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$.

Ответ и решение к заданию 35 1. $\vec{AC} = (6; 4)$.

2. $\vec{BD} = (0 - 6; 4 - 0) = (-6; 4)$.

3. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 6 \cdot (-6) + 4 \cdot 4 = -36 + 16 = -20$.

Ответ: -20

03. Повышенный уровень: задания 36-40

Задание 36

При каком k векторы $\vec{a} = (k; 6)$ и $\vec{b} = (4; -8)$ коллинеарны?

Ответ и решение к заданию 36 1. Условие коллинеарности: $k \cdot (-8) - 6 \cdot 4 = 0$.

2. $-8k - 24 = 0$.

3. $k = -3$.

Ответ: -3

Задание 37

Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = (3; 4)$ и $\vec{b} = (4; 3)$.

Ответ и решение к заданию 37 1. $a \cdot b = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$.

2. $|a| = |b| = 5$.

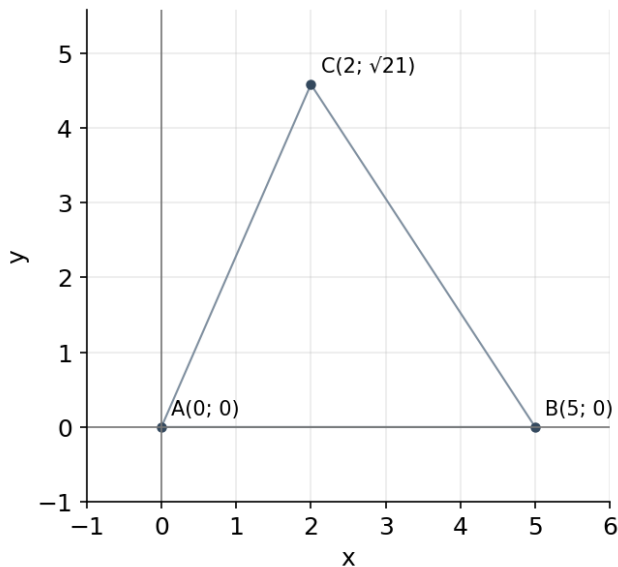
3. $\cos \alpha = \frac{24}{(5 \cdot 5)} = \frac{24}{25}$.

Ответ: $\frac{24}{25}$

Задание 38

В треугольнике $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(2; \sqrt{21})$ найдите косинус угла BAC .

Задание 38. Угол BAC



Ответ и решение к заданию 38 1. $\overrightarrow{AB} = (5; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2; \sqrt{21})$.

2. $AB \cdot AC = 10$.

3. $|AB| = 5$, $|AC| = \sqrt{4 + 21} = 5$.

4. $\cos \angle BAC = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$

Задание 39

На векторах $\vec{a} = (4; 1)$ и $\vec{b} = (1; 3)$ построен параллелограмм. Найдите его площадь.

Ответ и решение к заданию 39 1. $S = |x_a y_b - y_a x_b|$.

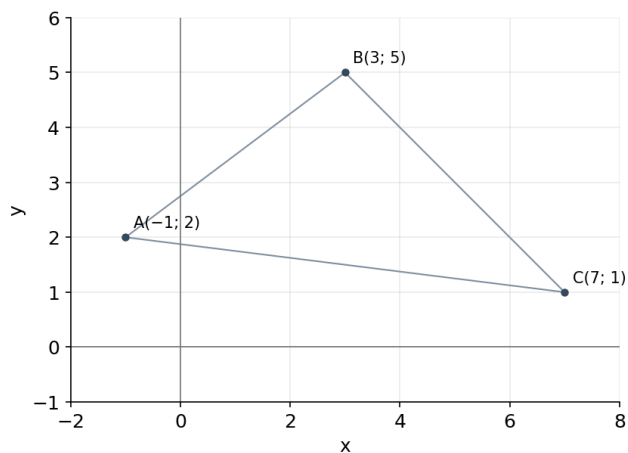
2. $S = |4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = |12 - 1| = 11$.

Ответ: 11

Задание 40

$A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(7; 1)$ - три последовательные вершины параллелограмма ABCD. Найдите длину диагонали BD.

Задание 40. Три последовательные вершины



Ответ и решение к заданию 40 1. $D = A + C - B = (-1 + 7 - 3; 2 + 1 - 5) = (3; -2)$.

2. $\overrightarrow{BD} = (3 - 3; -2 - 5) = (0; -7)$.

3. $|\overrightarrow{BD}| = 7$.

Ответ: 7