



Алгебраические выражения

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Тождества и допустимые значения	2
02. Квадрат суммы, квадрат разности и разность квадратов	3
03. Куб суммы, куб разности и разложение кубов	6
04. Разложение многочлена на множители	8
05. Алгебраические дроби: действия и сокращение	11
06. Вычисление значений и симметрические выражения	14
07. Бином Ньютона: вывод и применение	16
08. Следствия тождеств: оценки и формулы Виета	19
09. Выбор преобразования и типичные ошибки	21
10. Проверка понимания	22
11. От преобразования к исследованию параметра	23

01. Тождества и допустимые значения

Начните с числового примера. Записи $2(3 + 4)$ и $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ выглядят по-разному, но обе дают 14. Распределительный закон позволяет так же раскрыть $2(x + 4)$ при любом x . Преобразование меняет запись, сохраняя значение там, где исходное выражение определено.

С дробями есть дополнительная проверка: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ только при $x \neq 1$. При $x = 1$ справа получается 2, а слева деление на ноль. Сокращение не возвращает запрещённую точку.

Что в алгебре принимается, а что доказывается

Свойства сложения и умножения действительных чисел — исходные законы числовой системы: переместительный, сочетательный и распределительный. На школьном уровне они выступают аксиомами. Например,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Определение. Два выражения тождественно равны на области D , если при каждом допустимом значении переменных из D они имеют одинаковое значение.

Область важна. Например,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

не является равенством при $x = 1$: левая часть там не определена. Корректная запись:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1.$$

Почему делить на ноль нельзя

Деление $a : b$ определяется как умножение a на число, обратное к b . Обратное число b^{-1} должно удовлетворять

$$b \cdot b^{-1} = 1.$$

Для $b = 0$ такое число невозможно: $0 \cdot c = 0$ для любого c , но не 1. Поэтому выражение $\frac{a}{0}$ не определено.

Это объясняет ОДЗ рационального выражения: каждый знаменатель обязан быть ненулевым **до, во время и после** преобразований.

ОДЗ до преобразования, а не после

Рассмотрим

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}.$$

Сначала

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3),$$

поэтому $x \neq 2$, $x \neq 3$. Затем

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x + 3}{x - 2},$$

но исходное ограничение $x \neq 3$ сохраняется. Упрощённое выражение совпадает с исходным на исходной области, а не на собственной более широкой области.

02. Квадрат суммы, квадрат разности и разность квадратов

Почему появляется удвоенное произведение. Квадрат со стороной $a + b$ при $a, b > 0$ можно разделить на квадраты площадей a^2 , b^2 и два прямоугольника площадью ab . Поэтому $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Геометрическая картинка объясняет формулу для положительных длин; раскрытие скобок ниже доказывает её для любых действительных чисел.

Простой пример. $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Подстановка $x = 2$ даёт 25 с обеих сторон. Проверка помогает обнаружить ошибку, но сама по себе не доказывает тождество.

Квадрат суммы и квадрат разности**Квадрат суммы**

Теорема.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Доказательство.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$= a(a + b) + b(a + b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Коэффициент 2 появляется не «в середине формулы», а из двух одинаковых произведений: a из первой скобки на b из второй и b из первой на a из второй.

Квадрат разности

Подставим вместо b число $-b$ в уже доказанную формулу:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2.$$

Следовательно,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Контроль знака. Последний член всегда $+b^2$, потому что квадрат отрицательного числа положителен.

Разность квадратов

Теорема.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Доказательство.

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Формула работает в обе стороны:

- слева направо — факторизация;
- справа налево — быстрое умножение.

Почему нет формулы для суммы квадратов над действительными числами такого же вида? Если бы

$$a^2 + b^2 = (a - b)(a + b),$$

то правая часть была бы $a^2 - b^2$. Контрпример $a = b = 1$ мгновенно разрушает ложное равенство: $2 \neq 0$.

Полный разбор: восстановление формулы под стрессом

Предположим, ученик помнит только, что в разложении $(a - b)^3$ «знаки чередуются», но не уверен в коэффициентах. Восстановление строится без таблицы:

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2.$$

Сначала выводится квадрат:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

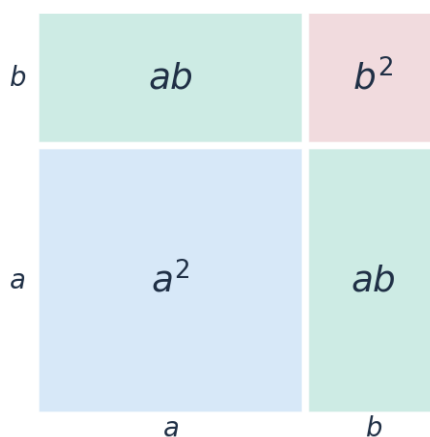
Затем умножение:

$$\begin{aligned} & (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Что контролируется.

- крайние члены — кубы;
- степени a уменьшаются от 3 до 0;
- степени b возрастают от 0 до 3;
- сумма степеней в каждом члене равна 3;
- коэффициенты 1, 3, 3, 1 совпадают с третьей строкой треугольника Паскаля.

Даже если допущена арифметическая ошибка, четыре структурные проверки помогают её найти.



Квадрат суммы: площадь большого квадрата равна $a^2 + 2ab + b^2$; на схеме $a, b > 0$.

03. Куб суммы, куб разности и разложение кубов

Не путайте две записи. $(a + b)^3$ означает куб всей суммы, а $a^3 + b^3$ - сумму двух кубов. При $a = b = 1$ получаются соответственно 8 и 2. Поэтому у этих выражений разные формулы. Сначала определите, что именно возводится в степень.

Куб суммы и куб разности

Эти формулы обязательны. Их нельзя заменять фразой «аналогично квадрату».

Куб суммы

Теорема.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Первое доказательство: последовательное раскрытие.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Второе объяснение коэффициентов. В произведении трёх скобок $(a + b)(a + b)(a + b)$ член a^2b получается, если выбрать b ровно из одной из трёх скобок. Выборов три. Аналогично ab^2 получается тремя способами.

Куб разности

Подставим $-b$:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Знаки чередуются, потому что слагаемые содержат соответственно нулевую, первую, вторую и третью степени $-b$.

Разность и сумма кубов

Разность кубов

Теорема.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Доказательство раскрытием правой части.

$$\begin{aligned} & (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3. \end{aligned}$$

Сумма кубов

Теорема.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3. \end{aligned}$$

Способ восстановления знаков. Первый линейный множитель повторяет знак исходного выражения. В квадратном трёхчлене средний знак противоположен, а последний член всегда $+b^2$.

Это не мнемоника вместо доказательства. Это короткая схема, которую ученик тут же проверяет раскрытием скобок.

Полный разбор: сумма и разность кубов внутри выражения

Разложим

$$8x^3 + 27y^3.$$

Сначала распознаём кубы:

$$8x^3 = (2x)^3, \quad 27y^3 = (3y)^3.$$

По доказанной формуле суммы кубов

$$8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2).$$

Проверка раскрытием:

$$8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 + 12x^2y - 18xy^2 + 27y^3.$$

Смешанные члены уничтожаются. Если знак среднего члена во втором множителе был бы положительным, уничтожения не произошло бы.

04. Разложение многочлена на множители

Разложить на множители — значит представить сумму как произведение.

Например, $6x + 9 = 3(2x + 3)$. Общая тройка содержится в обоих слагаемых.

Проверка выполняется обратным действием: раскрываем скобки и получаем исходную сумму.

Для многочлена порядок проверки такой: общий множитель, знакомая формула, группировка, затем более сложные приёмы. Например,

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Факторизация — обратный ход доказанных тождеств

Структура	Первый ход	Почему он законен
общий множитель	вынести его	распределительный закон в обратную сторону
$A^2 - B^2$	$(A - B)(A + B)$	доказанная разность квадратов
$A^3 \pm B^3$	формула суммы или разности кубов	раскрытие произведения возвращает исходное выражение
группировка	собрать одинаковый множитель в группах	два применения распределительного закона
квадратный трёхчлен	найти корни или выделить квадрат	теорема Виета либо завершение квадрата

Пример многошаговой факторизации.

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

На каждом шаге ученик должен назвать вид $A^2 - B^2$. Сумма $x^2 + 4$ над действительными числами дальше не раскладывается на линейные множители.

Пример с группировкой.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y).$$

Группировка не является отдельной магией: мы дважды используем распределительный закон.

Многошаговая факторизация без угадывания

Факторизация считается завершённой не тогда, когда появилась первая пара скобок, а когда каждый множитель проверен на дальнейшее разложение в выбранной числовой области. Рабочий порядок: общий множитель, разность квадратов, сумма или разность кубов, группировка, квадратный трёхчлен.

Пример 1. Разность шестых степеней

Задача. Разложите $x^6 - 64$ на множители над действительными числами.

Решение. Сначала видим разность квадратов: $x^6 - 64 = (x^3 - 8)(x^3 + 8)$. Затем оба множителя являются разностью или суммой кубов.

$$x^6 - 64 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

Проверка завершённости. Для $x^2 + 2x + 4$ дискриминант равен -12 , для $x^2 - 2x + 4$ также -12 . Действительных корней нет, поэтому на линейные действительные множители эти трёхчлены не раскладываются.

Пример 2. Сначала увидеть полный квадрат

Задача. Разложите $a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - c^2$. Первые три слагаемых образуют квадрат суммы: $(a^2 + 2b^2)^2$. После этого применяется разность квадратов.

$$a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - c^2 = (a^2 + 2b^2 - c)(a^2 + 2b^2 + c).$$

Важно. Если начать группировать отдельные слагаемые, структура теряется. Сильный ученик сначала проверяет, являются ли крайние члены квадратами, и сравнивает средний член с удвоенным произведением их корней.

Пример 3. Группировка с общим двучленом

Задача. Разложите $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$. Объединим первые два и последние два слагаемых:

$$x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x - 2)(x + 2).$$

Почему группировка законна. На первом шаге дважды использован распределительный закон, затем вынесен общий множитель $x - 3$, после чего применена доказанная формула разности квадратов.

Теорема о корне многочлена

Теорема. Если многочлен $P(x)$ принимает значение 0 при $x = a$, то $P(x)$ делится на $x - a$. Докажем этот факт школьными формулами разности степеней.

Для каждой натуральной степени выполняется разложение

$$x^k - a^k = (x - a)(x^{k-1} + x^{k-2}a + \dots + xa^{k-2} + a^{k-1}).$$

Вычтем из $P(x)$ число $P(a)$. Каждая разность одночленов $c_k x^k - c_k a^k$ содержит множитель $x - a$, а свободные члены уничтожаются. Поэтому $P(x) - P(a)$ делится на $x - a$. Если $P(a) = 0$, то делится и сам $P(x)$.

Пример полного разложения

Задача. Разложите $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Проверяем небольшие целые числа: $P(1) = 0$, значит, есть множитель $x - 1$. После деления получаем $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Проверка. Сумма корней $1 + 2 + 3 = 6$ соответствует коэффициенту -6 при x^2 , попарные произведения дают 11 , произведение корней равно 6 . Проверка не заменяет деление, но подтверждает структуру.

Контрпример. Равенство $P(1) = 0$ само по себе не означает, что многочлен делится на $x + 1$. Множитель всегда имеет вид $x - a$, поэтому при корне 1 это $x - 1$; при корне -1 - $x + 1$.

Сравнение коэффициентов в тождестве

Если два многочлена равны при всех действительных x , то коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают. Иначе их разность была бы ненулевым многочленом, который обращается в ноль при всех x .

Докажем, что это невозможно. Ненулевой многочлен степени n имеет не более n различных корней. Для степени 0 утверждение очевидно. Если $P(a) = 0$, по теореме о множителе $P(x) = (x - a)Q(x)$, где степень Q на единицу меньше. Все остальные корни P являются корнями Q . Повторяя рассуждение, получаем не более n корней. Многочлен, равный нулю при всех x , поэтому обязан иметь все коэффициенты, равные нулю.

Почему проверки нескольких чисел недостаточно. Многочлен $x^2 - x$ равен нулю при $x = 0$ и $x = 1$, но не является нулевым тождественно: при $x = 2$ он равен 2 . Числовые подстановки могут опровергнуть тождество, но конечный набор совпадений сам по себе его не доказывает.

Задача на неизвестные коэффициенты

Найдите a и b , если при всех x выполняется

$$(x + 1)(x^2 + ax + b) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

Раскроем левую часть:

$$x^3 + (a + 1)x^2 + (a + b)x + b.$$

Сравнение свободных членов даёт $b = 2$. Сравнение коэффициентов при x^2 даёт $a + 1 = 4$, поэтому $a = 3$. Коэффициент при x служит проверкой: $a + b = 3 + 2 = 5$, условие выполняется.

Ответ: $a = 3, b = 2$. Проверены все коэффициенты, поэтому равенство является тождеством, а не совпадением при отдельных x .

Как доказать отсутствие параметров

Если сравнение разных коэффициентов приводит к несовместимым значениям одного параметра, тождество невозможно. Например, в равенстве $(x + c)^2 = x^2 + 4x + 5$ коэффициент при x требует $c = 2$, а свободный член потребовал бы $c^2 = 5$. Одновременно эти условия не выполняются.

Практический порядок. Сначала раскрыть скобки и привести подобные, затем сравнивать коэффициенты от старшей степени к свободному члену, а последнее равенство использовать как проверку согласованности.

05. Алгебраические дроби: действия и сокращение

Сокращают множители, а не слагаемые. В дроби $\frac{3(x+2)}{3(x-1)}$ общий множитель 3 можно убрать: получится $\frac{x+2}{x-1}$ при $x \neq 1$. А в $\frac{x+2}{x+3}$ нельзя зачеркнуть x : он является частью суммы.

Перед делением на дробь дополнительно проверьте, что сама дробь-делитель не равна нулю. Например, в $\frac{x^2-1}{x^2-4} : \frac{x+1}{x+2}$ запрещены $x = -2, 2, -1$. Последнее ограничение появляется из-за деления на ноль.

Операции с алгебраическими дробями выводятся из определения

Сложение

Для $b \neq 0, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Вывод. Умножаем первую дробь на $\frac{d}{d}$, вторую — на $\frac{b}{b}$, после чего складываем числители при общем знаменателе.

Умножение

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Это следует из сочетательности умножения числителей и обратных знаменателей.

Деление

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

где дополнительно $c \neq 0$. Делитель-дробь должен быть ненулевым, иначе обратной дроби не существует.

Почему нельзя сокращать слагаемые

В выражении

$$\frac{x+2}{x}$$

символ x не является множителем всего числителя. Контрпример $x = 2$ показывает ошибку: исходная дробь равна 2, а «после сокращения» получилось бы бессмысленное $1 + 2$.

Полный разбор рационального выражения

Упростим

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{x - 3}{x + 3}.$$

Шаг 1. Исходная ОДЗ

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \neq 0,$$

$$x + 3 \neq 0.$$

Следовательно,

$$x \neq 3, \quad x \neq -3.$$

Шаг 2. Факторизация

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3),$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2.$$

Шаг 3. Сокращение ненулевых множителей

На исходной ОДЗ:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{x+3} = 1.$$

Шаг 4. Сохранение ограничений

Ответ — 1 при $x \neq \pm 3$. Получившаяся константа определена при всех x , но исходное выражение в двух точках не существовало. Удалять эти точки нельзя.

Рациональные выражения: равенство только на исходной ОДЗ

Разбор выражения, которое превращается в единицу

Задача. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right).$$

Шаг 1. Исходные знаменатели не равны нулю. Из $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ получаем $x \neq 1$ и $x \neq 2$. Из $x + 2 \neq 0$ получаем $x \neq -2$.

Шаг 2. Разложим числитель $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. На исходной ОДЗ все сокращаемые множители ненулевые, поэтому

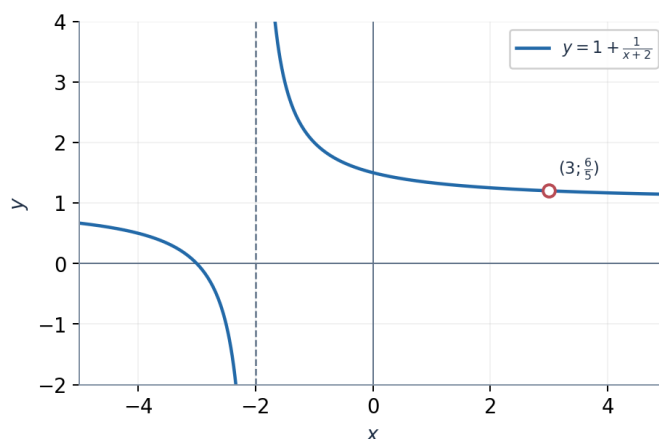
$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right) = 1.$$

Вывод. Ответ: 1 при $x \neq -2, 1, 2$. Константа 1 определена при любом x , но она совпадает с исходным выражением только на исходной области допустимых значений.

Уравнение, у которого исчезает единственный кандидат

Задача. Решите $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$. Исходная ОДЗ: $x \neq 3$. После разложения числителя и сокращения на ОДЗ получаем $x + 3 = 6$, откуда $x = 3$. Но это значение запрещено исходным знаменателем. Поэтому уравнение не имеет решений.

Почему это не противоречие. Преобразование дроби было верным только при $x \neq 3$. Мы нашли корень упрощённого уравнения, но не корень исходного. Финальная проверка ОДЗ является частью решения, а не формальностью после него.



После сокращения сохраняются ограничения: $x \neq -2$ и $x \neq 3$.

06. Вычисление значений и симметрические выражения

Не всегда нужно находить сами числа. Если известны $a + b = 7$ и $ab = 10$, то $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 49 - 20 = 29$. Мы выразили нужную величину через известные данные. Такой ход обычно короче решения системы для a и b .

Поздняя подстановка

Если в задаче дано большое числовое значение переменной, ранняя подстановка часто создаёт тяжёлые вычисления. Сначала нужно распознать тождество.

Пример.

$$(9x - 17)(9x + 17) - 81x^2 + 8x - 49.$$

По разности квадратов

$$(9x - 17)(9x + 17) = 81x^2 - 289.$$

Поэтому всё выражение равно

$$81x^2 - 289 - 81x^2 + 8x - 49 = 8x - 338.$$

Только теперь подставляется значение x . Метод не просто ускоряет вычисление: он уменьшает число мест, где можно ошибиться.

Полный разбор: симметрическое выражение

Пусть

$$x + \frac{1}{x} = 3, \quad x \neq 0.$$

Найдём

$$x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Кубируем известную сумму по доказанной формуле:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2 \frac{1}{x} + 3x \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

Средние члены дают

$$3x + \frac{3}{x} = 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Поэтому

$$27 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 9,$$

откуда

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18.$$

Здесь формула куба суммы работает как инструмент получения нового симметрического тождества.

Симметрические выражения как цепочка выводов

Пусть $x \neq 0$ и $t = x + \frac{1}{x}$. Вместо запоминания отдельных формул будем каждый следующий результат получать из предыдущего.

Сначала возводим равенство в квадрат:

$$t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}, \text{ поэтому } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Затем кубируем исходную сумму и собираем смешанные члены:

$$t^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3t.$$

Следовательно,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t.$$

Для четвёртых степеней удобнее снова использовать квадрат уже найденного выражения:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2.$$

Проверка. При $x = 1$ имеем $t = 2$. Формулы дают 2, 2 и 2 соответственно. Числовая проверка не заменяет вывод, но быстро обнаруживает ошибку в свободном члене.

Задача. Если $x + \frac{1}{x} = 4$, найдите $x^4 + \frac{1}{x^4}$. Подстановка $t = 4$ даёт $4^4 - 4 \cdot 4^2 + 2 = 194$. Решать квадратное уравнение относительно x не требуется.

07. Бином Ньютона: вывод и применение

Зачем нужен бином Ньютона. В произведении $(a + b)^4$ каждый член получается выбором по одному слагаемому из четырёх скобок. Член a^3b возникает четырьмя способами: буква b выбирается из первой, второй, третьей или четвёртой скобки. Поэтому его коэффициент равен 4. Общая формула ниже систематизирует именно этот подсчёт.

Этот раздел рассчитан на углублённую работу после уверенного освоения квадратов и кубов. Для сокращения простых дробей он не нужен.

Бином Ньютона: общая формула вместо шести отдельных правил

Теорема. Для любого натурального числа n

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Обозначение C_n^k читается «число сочетаний из n по k ». Это число способов выбрать k объектов из n без учёта порядка. В курсе используем эту школьную запись и развёрнутую формулу без знака суммы.

Доказательство через подсчёт способов

Рассмотрим произведение n одинаковых скобок:

$$(a + b)(a + b) \dots (a + b).$$

Чтобы получить одно слагаемое $a^{n-k}b^k$, нужно выбрать b ровно в k скобках, а a - в остальных. Число способов выбрать k скобок из n равно C_n^k . Все получившиеся одночлены одинаковы, поэтому их коэффициенты складываются. Перебор $k = 0, 1, \dots, n$ даёт всю сумму и не пропускает ни одного произведения.

Почему формула для сочетаний именно такая

Если порядок выбора учитывать, первую позицию можно выбрать n способами, вторую - $n - 1$ способами и так далее. Поэтому число последовательностей равно

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Один и тот же набор выбранных позиций можно записать в $k!$ разных порядках. Поэтому каждый набор посчитан $k!$ раз и результат нужно разделить на $k!$.

Треугольник Паскаля

n	Коэффициенты разложения $(a+b)^n$
0	1
1	1, 1
2	1, 2, 1
3	1, 3, 3, 1
4	1, 4, 6, 4, 1
5	1, 5, 10, 10, 5, 1

Каждое внутреннее число равно сумме двух над ним. Это следует из тождества Паскаля

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Доказательство тождества. Зафиксируем один выделенный объект. Набор из k объектов либо содержит его — тогда остаётся выбрать $k-1$ из $n-1$, - либо не содержит — тогда выбираем все k из остальных $n-1$.

Кубы как следствие бинома Ньютона

При $n=3$ коэффициенты равны 1, 3, 3, 1, поэтому формула куба суммы получается автоматически. При замене b на $-b$ получается куб разности.

Полный разбор: коэффициент бинома без раскрытия скобок

Найдём коэффициент при x^4 в разложении

$$(2-3x)^7.$$

Общий член бинома Ньютона:

$$C_7^k 2^{7-k} (-3x)^k.$$

Степень x^4 возникает только при $k=4$. Поэтому коэффициент равен

$$C_7^4 2^3 (-3)^4 = 35 \cdot 8 \cdot 81 = 22680.$$

Почему других вкладов нет. В каждом общем члене степень x равна количеству скобок, из которых выбран член $-3x$. Разные k дают разные степени.

Контроль знака. При чётном k множитель $(-3)^k$ положителен. Такой контроль над структурой надёжнее полного раскрытия семи скобок.

Что ещё следует из бинома Ньютона

Число членов и степени

В разложении $(a + b)^n$ член с номером k получается выбором b из k скобок. Поэтому показатель b возрастает от 0 до n , а показатель a одновременно уменьшается от n до 0. В каждом одночлене сумма показателей равна n . Это позволяет обнаружить потерянный или лишний член ещё до вычисления коэффициентов.

$$a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Вывод. Значения k равны $0, 1, \dots, n$, поэтому разных степенных сочетаний $n + 1$. Если после раскрытия $(a + b)^6$ получилось шесть членов, один член пропущен.

Симметрия коэффициентов

Теорема. $C_n^k = C_n^{n-k}$. Доказательство без вычислений: выбрать k объектов, которые входят в набор, — то же самое, что выбрать $n - k$ объектов, которые в него не входят. Каждому набору первого типа соответствует ровно один набор второго типа.

Проверка формулой также возможна: знаменатели $k!(n - k)!$ и $(n - k)!k!$ совпадают. Но комбинаторное доказательство объясняет смысл симметрии, а не только равенство дробей.

Сумма коэффициентов

Чтобы найти сумму всех коэффициентов разложения, не нужно складывать строку треугольника Паскаля. Подставим $a = 1$ и $b = 1$. Левая часть равна 2^n , а справа каждый одночлен превращается в свой коэффициент. Следовательно, сумма коэффициентов равна 2^n .

Если подставить $a = 1$ и $b = -1$, левая часть равна нулю при $n > 0$. Справа получится чередующаяся сумма коэффициентов. Значит, сумма коэффициентов при чётных степенях b равна сумме коэффициентов при нечётных степенях b .

Вопрос ученику. Почему подстановка чисел в уже доказанное тождество даёт новое доказательство, а не числовое совпадение? Ответ должен опираться на то, что тождество верно при всех допустимых a и b .

08. Следствия тождеств: оценки и формулы Виета

Тождество может объяснить и неравенство. Из $(x - y)^2 \geq 0$ следует $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Равенство возможно именно при $x = y$. Сначала найдите неотрицательное выражение, затем раскройте скобки и перенесите слагаемые. Полные методы решения уравнений и неравенств изучаются в следующих темах.

Неравенства рождаются из квадрата

Квадрат любого действительного числа неотрицателен. Из одного факта $(a - b)^2 \geq 0$ можно вывести несколько базовых оценок, которые используются в задачах ЕГЭ.

$$(a - b)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Если сложить к обеим частям ещё $a^2 + b^2$, получим $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, то есть

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2}.$$

Равенство в обоих неравенствах достигается при $a = b$, потому что именно тогда исходный квадрат равен нулю. Условие равенства является частью доказанного результата.

Выделение полного квадрата

Задача. Найдите наименьшее значение $x^2 - 6x + 13$. Добавим и вычтем квадрат половины коэффициента при x :

$$x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4.$$

Квадрат неотрицателен, поэтому выражение не меньше 4. Значение 4 достигается при $x = 3$. Мы получили и оценку, и точку достижения; без второй части ответ о минимуме был бы неполным.

Оценка произведения при фиксированной сумме

Если $a + b = S$, то $(a - b)^2 \geq 0$ даёт $S^2 - 4ab \geq 0$, следовательно, $ab \leq \frac{S^2}{4}$. Равенство достигается при $a = b = \frac{S}{2}$. Так доказывается, что при фиксированной сумме двух чисел их произведение максимально, когда числа равны.

Формулы Виета выводятся из разложения

Пусть квадратный трёхчлен имеет корни x_1 и x_2 и старший коэффициент равен 1. Тогда его разложение имеет вид $(x - x_1)(x - x_2)$. Раскроем скобки:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Сравнивая с $x^2 + px + q$, получаем $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$. Формулы Виета не принимаются на веру: они являются сравнением коэффициентов двух тождественно равных многочленов.

Факторизация по найденным корням

Задача. Разложите $x^2 - 7x + 12$. Ищем два числа с суммой 7 и произведением 12: это 3 и 4. Поэтому

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

Проверка раскрытием обязательна, если числа подбирались устно: средний коэффициент должен получиться -7 , свободный член $+12$.

Когда трёхчлен является полным квадратом

Задача. При каких p выражение $x^2 + px + 9$ является квадратом двучлена? Пусть $x^2 + px + 9 = (x + c)^2 = x^2 + 2cx + c^2$. Тогда $c^2 = 9$, поэтому $c = 3$ или $c = -3$. Соответственно, $p = 2c$.

$$p = 6 \quad \text{или} \quad p = -6.$$

При $p = 6$ получаем $(x + 3)^2$, при $p = -6$ - $(x - 3)^2$. Других значений нет, потому что коэффициент при x^2 уже фиксирует коэффициент x перед первой степенью внутри скобки.

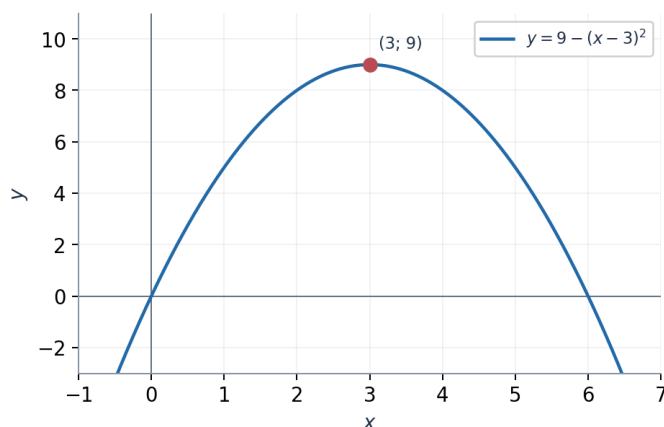
Параметрическое разложение без дискриминанта

Задача. Разложите $x^2 + (m - 2)x - 2m$. Сгруппируем коэффициент при x как $m - 2$ и проверим предполагаемые корни 2 и $-m$. Их сумма $2 - m$ равна противоположному коэффициенту при x , а произведение равно $-2m$.

$$x^2 + (m - 2)x - 2m = (x - 2)(x + m).$$

Равенство верно при любом действительном m . При $m = -2$ оба множителя совпадают и трёхчлен превращается в $(x - 2)^2$; отдельного исключения не возникает.

Критерий ответа. Ученик либо раскрывает полученные скобки, либо сравнивает сумму и произведение корней. Фраза «подобрал множители» без проверки не считается доказательством тождества.



Максимум произведения равен 9 и достигается при $x = 3$.

09. Выбор преобразования и типичные ошибки

Как выбирать первый ход

1. Выписать ОДЗ.
2. Посмотреть на наиболее крупную структуру: сумма, разность, произведение, дробь.
3. Проверить общий множитель и ФСУ.
4. Если повторяется блок — ввести замену.
5. Подставлять числа только после символического упрощения.
6. В конце вернуть все ограничения и проверить потерянные точки.

Лаборатория ошибок

Ошибка	Быстрая проверка	Что должен восстановить ученик
$(a - b)^2 = a^2 - b^2$	взять $a = 3, b = 1$	раскрытие двух скобок и средний член
неверные знаки в $(a - b)^3$	заменить b на $-b$ в кубе суммы	степени отрицательного числа
неверный знак в формуле суммы кубов	раскрыть правую часть	уничтожение смешанных членов требует знака минус
сокращение слагаемых	проверить числом	сокращать можно только общий ненулевой множитель
потеря $x \neq a$ после сокращения	сравнить области	преобразование не расширяет исходную ОДЗ

коэффициент бинома
угадан

посчитать выборы

сколько способов выбрать
позиции для b

10. Проверка понимания

Контроль вывода формул

К концу урока ученик без опоры должен уметь:

1. вывести квадрат суммы и квадрат разности;
2. вывести куб суммы и куб разности;
3. доказать формулы суммы и разности кубов раскрытием скобок;
4. сформулировать бином Ньютона и объяснить коэффициент C_n^k ;
5. доказать тождество Паскаля двумя случаями;
6. объяснить условие $c \neq 0$ при сокращении дроби;
7. показать на примере, почему ОДЗ сохраняется после сокращения.

Быстрая проверка понимания

Вопрос ученику	Критерий полного ответа
Откуда берётся $2ab$ в квадрате суммы?	Есть два способа выбрать a и b из двух скобок.
Как восстановить куб разности?	Раскрыть $(a - b)(a - b)^2$ и собрать члены.
Почему коэффициент равен числу сочетаний?	Выбираются k из n скобок, дающих множитель b .
Почему нельзя сокращать слагаемые?	Сокращение относится к общему множителю произведения.
Что сохраняется после сокращения дроби?	Значение на исходной ОДЗ, но не сама область определения.
Как проверить факторизацию?	Раскрыть произведение и получить исходное выражение.

Два общих эталона по теме урока: алгебраический синтез, №15 и №18: равносильные преобразования и параметр. Это не набор коротких шаблонов, а полные модели экзаменационного рассуждения.

11. От преобразования к исследованию параметра

Параметр — фиксированное число, которое мы пока не знаем. После разложения на множители нужно следить за допустимостью и совпадением корней.

Пример. Сколько различных корней имеет $(x^2 - 1)(x^2 - a) = 0$?

Корни ± 1 есть всегда. При $a < 0$ других нет. При $a = 0$ добавляется 0. При $a > 0$ получаем $\pm\sqrt{a}$, но при $a = 1$ они совпадают с ± 1 . Значит, корней соответственно 2, 3, 4, а при $a = 1$ — снова 2.

Если задан отрезок, он становится условием для замены. Например, на $[-3; 3]$ уравнение $x^2 = t$ даёт два различных корня при $0 < t \leq 9$, один при $t = 0$ и ни одного в остальных случаях. Поэтому квадратное уравнение по t нельзя просто объявить уравнением с тем же числом корней по x .

Понятное объяснение для преподавателя. Сначала считаем допустимые уровни x^2 , затем — точки на параболе над каждым уровнем. Уровень выше нуля обычно даёт две симметричные точки; ноль даёт одну; отрицательный уровень — ни одной.