



Логарифмы

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Основные приёмы

Задание 1

Вычислите по определению логарифма:

$$\log_8 32.$$

Шаг 1. Представляем основание как $8 = 2^3$, а аргумент как 2^5 .

Шаг 2. Ищем показатель t , для которого $(2^3)^t = 2^5$, то есть $3t = 5$.

Шаг 3. Следовательно, $t = \frac{5}{3}$.

Ответ. $\frac{5}{3}$

Задание 2

Вычислите $\log_{\frac{1}{3}} 81$.

$\frac{1}{3} = 3^{-1}$, $81 = 3^4$. Из $(3^{-1})^t = 3^4$ следует $-t = 4$.

Ответ. -4 .

Задание 3

Вычислите по определению логарифма:

$$\log_{125} 25.$$

Шаг 1. Представляем основание как $125 = 5^3$, а аргумент как 5^2 .

Шаг 2. Ищем показатель t , для которого $(5^3)^t = 5^2$, то есть $3t = 2$.

Шаг 3. Следовательно, $t = \frac{2}{3}$.

Ответ. $\frac{2}{3}$

Задание 4

Вычислите $\log_{\sqrt{2}} 8$.

Представляем основание и аргумент как степени двойки: $(2^{\frac{1}{2}})^t = 2^3$, откуда $t = 6$.

Ответ. 6.

Задание 5

Вычислите по определению логарифма:

$$\log_{16} \frac{1}{8}.$$

Шаг 1. Представляем основание как $16 = 2^4$, а аргумент как 2^{-3} .

Шаг 2. Ищем показатель t , для которого $(2^4)^t = 2^{-3}$, то есть $4t = -3$.

Шаг 3. Следовательно, $t = -\frac{3}{4}$.

Ответ. $-\frac{3}{4}$

Задание 6

Вычислите $\log_2 \sqrt{32}$.

$\sqrt{32} = 2^{\frac{5}{2}}$, поэтому логарифм равен $\frac{5}{2}$.

Ответ. $\frac{5}{2}$.

Задание 7

Вычислите по определению логарифма:

$$\log_{25} \frac{1}{5}.$$

Шаг 1. Представляем основание как $25 = 5^2$, а аргумент как 5^{-1} .

Шаг 2. Ищем показатель t , для которого $(5^2)^t = 5^{-1}$, то есть $2t = -1$.

Шаг 3. Следовательно, $t = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $-\frac{1}{2}$

Задание 8

Вычислите $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{8}}{4}$.

Аргумент равен $\frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^2} = 2^{-\frac{1}{2}}$. Основание 2^{-1} , значит, ответ равен $\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задание 9

Вычислите

$$3 \cdot 2^{\log_2 7}.$$

Шаг 1. Основание логарифма удовлетворяет условиям: $2 > 0$, $2 \neq 1$, аргумент $7 > 0$.

Шаг 2. По основному тождеству $2^{\log_2 7} = 7$.

Шаг 3. Поэтому всё выражение равно $3 \cdot 7 = 21$.

Ответ. 21

Задание 10

Вычислите $9^{\log_3 2}$.

$$9^{\log_3 2} = 3^{2\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^2 = 2^2.$$

Ответ. 4.

02. Применение и сочетание приёмов

Задание 11

Вычислите

$$6 \cdot 5^{\log_5 4}.$$

Шаг 1. Основание логарифма удовлетворяет условиям: $5 > 0$, $5 \neq 1$, аргумент $4 > 0$.

Шаг 2. По основному тождеству $5^{\log_5 4} = 4$.

Шаг 3. Поэтому всё выражение равно $6 \cdot 4 = 24$.

Ответ. 24

Задание 12

Вычислите $5^{1-\log_5 2}$.

$$5^{1-\log_5 2} = \frac{5}{5^{\log_5 2}} = \frac{5}{2}.$$

Ответ. $\frac{5}{2}$.

Задание 13

Вычислите

$$\log_2(8)$$

и объясните знак ответа.

Шаг 1. По определению требуется найти t , при котором $(2)^t = 8$.

Шаг 2. Непосредственная запись аргумента как степени основания даёт $t = 3$.

Шаг 3. Знак согласован с монотонностью: основание больше 1, а аргумент расположен по соответствующую сторону от 1.

Ответ. 3

Задание 14

Определите знак $\log_{\frac{1}{5}} 3$ без вычисления его значения.

При основании между 0 и 1 логарифм убывает. Поскольку $3 > 1$, имеем $\log_{\frac{1}{5}} 3 < \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$.

Ответ. Отрицательный.

Задание 15

Вычислите

$$\log_{\frac{1}{3}}(9)$$

и объясните знак ответа.

Шаг 1. По определению требуется найти t , при котором $\left(\frac{1}{3}\right)^t = 9$.

Шаг 2. Непосредственная запись аргумента как степени основания даёт $t = -2$.

Шаг 3. Знак согласован с монотонностью: основание лежит между 0 и 1, а аргумент расположен по соответствующую сторону от 1.

Ответ. -2

Задание 16

Вычислите, предварительно обосновав объединение логарифмов:

$$\log_2 8 + \log_2 4.$$

Шаг 1. Аргументы 8 и 4 положительны, а основание $2 > 0$, $2 \neq 1$.

Шаг 2. Поэтому применима формула $\log_a u + \log_a v = \log_a (uv)$.

Шаг 3. Получаем $\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 32$.

Шаг 4. Так как $32 = 2^5$, логарифм равен 5.

Шаг 5. Все исходные логарифмы определены, поэтому дополнительных ограничений нет.

Ответ. 5

Задание 17

Вычислите, предварительно обосновав объединение логарифмов:

$$\log_3 9 + \log_3 27.$$

Шаг 1. Аргументы 9 и 27 положительны, а основание $3 > 0$, $3 \neq 1$.

Шаг 2. Поэтому применима формула $\log_a u + \log_a v = \log_a (uv)$.

Шаг 3. Получаем $\log_3(9 \cdot 27) = \log_3 243$.

Шаг 4. Так как $243 = 3^5$, логарифм равен 5.

Шаг 5. Все исходные логарифмы определены, поэтому дополнительных ограничений нет.

Ответ. 5

Задание 18

Вычислите $\log_2 12 - \log_2 3$.

Оба аргумента положительны. Разность равна $\log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$.

Ответ. 2.

03. Повторение пройденного**Задание 19**

Накопительное повторение. Упростите

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

и сохраните исходную ОДЗ.

Шаг 1. Исходный знаменатель требует $x \neq 3$.

Шаг 2. Разлагаем числитель: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

Шаг 3. Сокращаем ненулевой на ОДЗ множитель $x - 3$.

Ответ. $x + 3, x \neq 3$

Задание 20

Накопительное повторение. Рационализируйте

$$\frac{1}{\sqrt{7} - 2}.$$

Шаг 1. Умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое $\sqrt{7} + 2$.

Шаг 2. В знаменателе получаем $7 - 4 = 3$.

Шаг 3. Числитель равен $\sqrt{7} + 2$.

Шаг 4. Сопряжённое положительно, поэтому умножение законно.

Шаг 5. Ответ: $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

04. Многошаговые задачи

Задание 21

Вычислите, предварительно обосновав объединение логарифмов:

$$\log_7 49 + \log_7 7.$$

Шаг 1. Аргументы 49 и 7 положительны, а основание $7 > 0$, $7 \neq 1$.

Шаг 2. Поэтому применима формула $\log_a u + \log_a v = \log_a (uv)$.

Шаг 3. Получаем $\log_7 (49 \cdot 7) = \log_7 343$.

Шаг 4. Так как $343 = 7^3$, логарифм равен 3.

Шаг 5. Все исходные логарифмы определены, поэтому дополнительных ограничений нет.

Ответ. 3

Задание 22

Вычислите $\frac{\log_3 5 - \log_3 45}{\log_3 9}$.

Числитель равен $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, знаменатель равен 2 и не равен нулю.

Ответ. -1.

Задание 23

Вычислите отношение:

$$\frac{\log_2 32}{\log_2 8}.$$

Шаг 1. По формуле замены основания отношение равно $\log_8 32$; вычислим его через общее основание.

Шаг 2. $32 = 2^5$, поэтому числитель равен 5.

Шаг 3. $8 = 2^3$, поэтому знаменатель равен 3.

Шаг 4. Знаменатель не равен нулю, поскольку $8 \neq 1$.

Шаг 5. Искомое отношение равно $\frac{5}{3}$.

Ответ. $\frac{5}{3}$

Задание 24

Найдите значение выражения $\frac{\log_7 32}{\log_7 2}$.

ФИПИ, официальная демоверсия ЕГЭ-2026, профильный уровень: задание 7, пример 2. Решение составлено для урока.

По формуле замены основания отношение равно $\log_2 32 = 5$. Знаменатель ненулевой, поскольку $2 \neq 1$.

Ответ. 5.

Задание 25

Вычислите отношение:

$$\frac{\log_5 125}{\log_5 25}.$$

Шаг 1. По формуле замены основания отношение равно $\log_{25} 125$; вычислим его через общее основание.

Шаг 2. $125 = 5^3$, поэтому числитель равен 3.

Шаг 3. $25 = 5^2$, поэтому знаменатель равен 2.

Шаг 4. Знаменатель не равен нулю, поскольку $25 \neq 1$.

Шаг 5. Искомое отношение равно $\frac{3}{2}$.

Ответ. $\frac{3}{2}$

Задание 26

Вычислите $\frac{\log_{49} 8}{\log_7 2}$.

$\log_{49} 8 = \frac{\log_7 2^3}{\log_7 7^2} = \frac{3}{2} \log_7 2$. Сокращаем ненулевой логарифм.

Ответ. $\frac{3}{2}$.

Задание 27

Вычислите $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$.

По замене основания произведение равно

$$\frac{\ln 3 \ln 5 \ln 16}{\ln 2 \ln 3 \ln 5} = \frac{\ln 16}{\ln 2} = 4.$$

Все основания положительны и не равны 1.

Ответ. 4.

Задание 28

Решите уравнение:

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-5) = \log_2 12.$$

Шаг 1. ОДЗ исходных логарифмов: $x-1 > 0$ и $x-5 > 0$, то есть $x > 5$.

Шаг 2. На ОДЗ объединяем логарифмы: $\log_2((x-1)(x-5)) = \log_2 12$.

Шаг 3. Поскольку логарифм с основанием 2 строго возрастает, аргументы равны.

Шаг 4. Получаем $(x-1)(x-5) = 12$; корни квадратного уравнения равны 7 и -1 .

Шаг 5. ОДЗ оставляет только $x = 7$; его подстановка даёт положительные аргументы и произведение 12.

Ответ. 7

Задание 29

Решите $\log_2(x^2 - 5x + 6) = \log_2(2x - 6)$.

Шаг 1. Требуется $x^2 - 5x + 6 > 0$ и $x > 3$; совместно это $x > 3$.

Шаг 2. На ОДЗ приравниваем аргументы: $x^2 - 7x + 12 = 0$, откуда $x = 3$ или $x = 4$.

Шаг 3. При $x = 3$ аргументы равны нулю, корень исключаем. При $x = 4$ оба аргумента равны 2.

Ответ. 4.

Задание 30

Решите уравнение:

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-4) = \log_2 14.$$

Шаг 1. ОДЗ исходных логарифмов: $x+1 > 0$ и $x-4 > 0$, то есть $x > 4$.

Шаг 2. На ОДЗ объединяем логарифмы: $\log_2((x+1)(x-4)) = \log_2 14$.

Шаг 3. Поскольку логарифм с основанием 2 строго возрастает, аргументы равны.

Шаг 4. Получаем $(x+1)(x-4) = 14$; корни квадратного уравнения равны 6 и -3 .

Шаг 5. ОДЗ оставляет только $x = 6$; его подстановка даёт положительные аргументы и произведение 14.

Ответ. 6

05. Задания с развёрнутым решением**Задание 31**

Решите $\log_{x-1}(x+1) = 2$.

Шаг 1. ОДЗ: $x > 1$, $x \neq 2$.

Шаг 2. По определению $x+1 = (x-1)^2$, то есть $x(x-3) = 0$.

Шаг 3. Кандидат 0 вне ОДЗ; 3 допустим и даёт $\log_2 4 = 2$.

Ответ. 3.

Задание 32

Решите $2\log_2(x-1) = \log_2(3x+1)$.

Шаг 1. Исходная ОДЗ: $x > 1$.

Шаг 2. На ней $\log_2(x-1)^2 = \log_2(3x+1)$, поэтому $(x-1)^2 = 3x+1$. Получаем $x(x-5) = 0$.

Шаг 3. Только 5 принадлежит ОДЗ. Проверка: $2\log_2 4 = \log_2 16 = 4$.

Ответ. 5.

Задание 33

Решите неравенство

$$\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(x-1)-1} \geq 0.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x-1 > 0$ и $\log_2(x-1) \neq 1$, то есть $x > 1$ и $x \neq 3$.

Шаг 2. Введём замену $t = \log_2(x-1)$. Получаем рациональное неравенство $\frac{t}{t-1} \geq 0$, где $t \neq 1$.

Шаг 3. Критические точки 0 и 1. По методу интервалов $t \leq 0$ или $t > 1$.

Шаг 4. Так как основание 2 больше 1, из $t \leq 0$ следует $0 < x-1 \leq 1$, то есть $1 < x \leq 2$; из $t > 1$ следует $x-1 > 2$, то есть $x > 3$.

Проверка полноты. Замена взаимно однозначна на $x > 1$; точка $x = 3$ исключена как нуль знаменателя.

Ответ. $(1; 2] \cup (3; +\infty)$.



Множество решений по x ; выколотые точки не входят в ответ.

Задание 34

Решите неравенство

$$\frac{(\log_2 x - 1)(\log_2 x - 3)}{\log_2 x - 2} \leq 0.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x > 0$ и $\log_2 x \neq 2$, то есть $x > 0, x \neq 4$.**Шаг 2.** Пусть $t = \log_2 x$. Тогда нужно решить $\frac{(t-1)(t-3)}{t-2} \leq 0$.**Шаг 3.** Критические точки: 1, 2, 3; точка 2 выколота. Таблица знаков даёт $t \leq 1$ или $2 < t \leq 3$.**Шаг 4.** Возвращаясь к x и учитывая возрастание 2^t , получаем $0 < x \leq 2$ или $4 < x \leq 8$.**Проверка полноты.** Все нули числителя включены, единственный нуль знаменателя исключён; иных критических точек нет.**Ответ.** $(0; 2] \cup (4; 8]$.Множество решений по x ; выколотые точки не входят в ответ.**Задание 35**

Решите неравенство

$$\log_x 4 \geq \log_4 x.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$. Обозначим $t = \log_2 x$, тогда $t \neq 0$.**Шаг 2.** Имеем $\log_x 4 = \frac{2}{t}$ и $\log_4 x = \frac{t}{2}$. Поэтому $\frac{4-t^2}{2t} \geq 0$.**Шаг 3.** Критические точки $-2, 0, 2$. Метод интервалов даёт $t \leq -2$ или $0 < t \leq 2$.**Шаг 4.** Из $t \leq -2$ получаем $0 < x \leq \frac{1}{4}$; из $0 < t \leq 2$ - $1 < x \leq 4$.**Проверка полноты.** Точка $t = 0$, соответствующая $x = 1$, исключена; точки $t = \pm 2$ дают равенство и включены.**Ответ.** $(0; \frac{1}{4}] \cup (1; 4]$.Множество решений по x ; выколотые точки не входят в ответ.

Задание 36

Решите неравенство

$$\log_{(x-1)}(5-x) > 1.$$

Шаг 1. ОДЗ: $x-1 > 0, x-1 \neq 1, 5-x > 0$. Значит, $1 < x < 5$ и $x \neq 2$.**Шаг 2.** Если $x > 2$, основание больше 1. Тогда $5-x > x-1$, откуда $x < 3$.
Получаем $2 < x < 3$.**Шаг 3.** Если $1 < x < 2$, основание лежит между 0 и 1. Тогда знак сравнения меняется: требуется $0 < 5-x < x-1$, то есть $x > 3$, что противоречит рассматриваемому случаю.**Шаг 4.** Объединение допустимых случаев даёт $2 < x < 3$.**Проверка.** При $x \in (2; 3)$ основание больше 1 и аргумент действительно больше основания; границы дают запрещённое основание или равенство.**Ответ.** $(2; 3)$.Множество решений по x ; выколотые точки не входят в ответ.**06. Итоговые задачи повышенной сложности****Задание 37**

Решите неравенство

$$\log_2(x^2 - 5x + 6) \leq 1.$$

Шаг 1. Так как основание 2 больше 1, неравенство равносильно системе $0 < x^2 - 5x + 6 \leq 2$.**Шаг 2.** Первое условие: $(x-2)(x-3) > 0$, то есть $x < 2$ или $x > 3$.**Шаг 3.** Второе условие: $x^2 - 5x + 4 \leq 0$, то есть $(x-1)(x-4) \leq 0$ и $1 \leq x \leq 4$.**Шаг 4.** Пересекая множества, получаем $[1; 2) \cup (3; 4]$.**Проверка полноты.** Нули аргумента $x = 2$ и $x = 3$ исключены, а точки $x = 1$ и $x = 4$ дают $\log_2 2 = 1$ и включаются.**Ответ.** $[1; 2) \cup (3; 4]$.Множество решений по x ; выколотые точки не входят в ответ.

Задание 38

В зависимости от параметра a определите число решений уравнения

$$\log_2(x^2 - 2ax + a + 2) = 1.$$

Шаг 1. Равенство логарифма единице эквивалентно $x^2 - 2ax + a + 2 = 2$.

Положительность аргумента автоматически выполнена, потому что он равен 2.

Шаг 2. Получаем квадратное уравнение $x^2 - 2ax + a = 0$.

Шаг 3. Его дискриминант $D = 4a^2 - 4a = 4a(a - 1)$. При $D > 0$ корней два, при $D = 0$ один, при $D < 0$ корней нет.

Шаг 4. Следовательно, два решения получаются при $a < 0$ или $a > 1$; одно — при $a = 0$ или $a = 1$; ни одного — при $0 < a < 1$.

Проверка полноты. Равносильный переход не добавляет ограничений: при каждом корне исходный аргумент точно равен $2 > 0$.

Ответ: два решения при $a < 0$ или $a > 1$; одно решение при $a = 0$ или $a = 1$; нет решений при $0 < a < 1$.



$D/4 = a(a - 1)$. Корни существуют при $a \leq 0$ или $a \geq 1$; на границах корень один.

Задание 39

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$\log_x 16 = a \cdot \log_4 x.$$

Шаг 1. ОДЗ для основания логарифма: $x > 0, x \neq 1$.

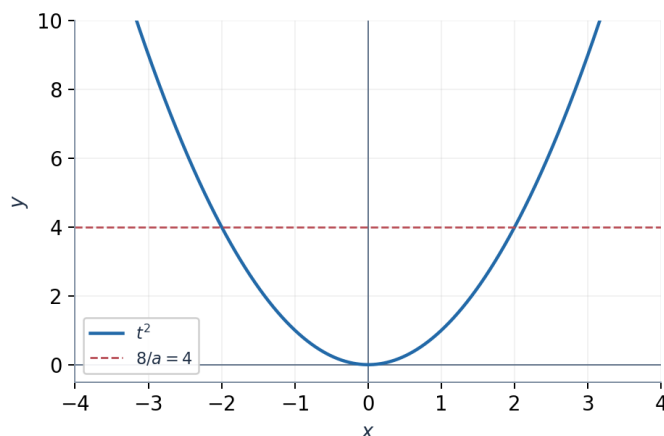
Шаг 2. Положим $t = \log_2 x$. Тогда $t \neq 0, \log_x 16 = \frac{4}{t}$, а $\log_4 x = \frac{t}{2}$.

Шаг 3. Уравнение принимает вид $\frac{4}{t} = a \cdot \frac{t}{2}$, то есть $a \cdot t^2 = 8$.

Шаг 4. Если $a > 0$, имеются два ненулевых значения $t = \pm \sqrt{\frac{8}{a}}$, а значит, два различных положительных x . При $a \leq 0$ решений нет.

Проверка полноты. Соответствие $x = 2^t$ взаимно однозначно, а найденные t не равны нулю.

Ответ. 2 решения при $a > 0$; 0 решений при $a \leq 0$.



При $a > 0$ уровень $8/a$ положителен и даёт два ненулевых t ;
при $a \leq 0$ решений исходного уравнения нет.

Задание 40

В зависимости от a определите число решений уравнения

$$\log_2(x - a) + \log_2(4 - x) = 1.$$

Шаг 1. ОДЗ: $a < x < 4$. Следовательно, при $a \geq 4$ решений быть не может.

Шаг 2. На ОДЗ объединяем логарифмы: $(x - a)(4 - x) = 2$.

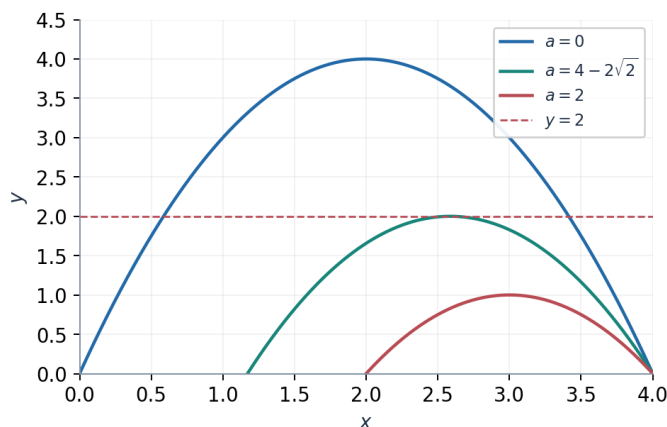
Шаг 3. Функция $f(x) = (x - a)(4 - x)$ - обращённая вниз парабола, равная нулю на концах интервала $(a; 4)$. Её максимум достигается в середине и равен $\frac{(4 - a)^2}{4}$.

Шаг 4. Прямая $y = 2$ пересекает эту дугу дважды, если $\frac{(4 - a)^2}{4} > 2$, касается при равенстве и не пересекает при меньшем максимуме.

Шаг 5. С учётом $a < 4$ получаем: два решения при $a < 4 - 2\sqrt{2}$; одно при $a = 4 - 2\sqrt{2}$; ни одного при $a > 4 - 2\sqrt{2}$.

Проверка полноты. На каждой стороне от вершины парабола строго монотонна, поэтому больше двух пересечений невозможно; оба пересечения лежат внутри ОДЗ.

Ответ. 2 решения при $a < 4 - 2\sqrt{2}$; 1 при $a = 4 - 2\sqrt{2}$; 0 при $a > 4 - 2\sqrt{2}$.



Допустимые дуги $(x - a)(4 - x)$ при трёх значениях a .
Уровень 2 даёт два, один или ноль корней.