



Степени и корни

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Основные приёмы

Задание 1

Вычислите, используя законы степеней:

$$\frac{2^7}{2^5}.$$

Шаг 1. При одинаковом ненулевом основании показатели при делении вычитаются.

Шаг 2. Получаем $2^{7-5} = 2^2$.

Шаг 3. Числовое значение равно 4.

Ответ. 4

Задание 2

Вычислите $\frac{3^{-2} \cdot 27}{9^{\frac{1}{2}}}$.

$3^{-2} = \frac{1}{9}$, $9^{\frac{1}{2}} = 3$. Поэтому $\frac{\frac{1}{9} \cdot 27}{3} = 1$.

Ответ. 1.

Задание 3

Вычислите, используя законы степеней:

$$\frac{5^4}{5^2}.$$

Шаг 1. При одинаковом ненулевом основании показатели при делении вычитаются.

Шаг 2. Получаем $5^{4-2} = 5^2$.

Шаг 3. Числовое значение равно 25.

Ответ. 25

Задание 4

Упростите $(a^{-2}b^3)^2 \cdot \frac{a^5}{b^4}$ и укажите ОДЗ.

Отрицательная степень и знаменатель требуют $a \neq 0$, $b \neq 0$. Выражение равно $a^{-4}b^6a^5b^{-4} = ab^2$. Ограничения сохраняются после упрощения.

Ответ. ab^2 , $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Задание 5

Вынесите множитель из-под корня: $\sqrt{72}$.

Шаг 1. Выделяем наибольший квадратный множитель: $72 = 6^2 \cdot 2$.

Шаг 2. Для неотрицательных множителей используем $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Шаг 3. Получаем $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Ответ. $6\sqrt{2}$

Задание 6

Упростите $\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$.

Выделяем полные квадраты: $5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Ответ. $6\sqrt{2}$.

Задание 7

Вынесите множитель из-под корня: $\sqrt{288}$.

Шаг 1. Выделяем наибольший квадратный множитель: $288 = 12^2 \cdot 2$.

Шаг 2. Для неотрицательных множителей используем $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Шаг 3. Получаем $\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$.

Ответ. $12\sqrt{2}$

Задание 8

Упростите $\sqrt{72a^2}$ для всех действительных a .

$\sqrt{72a^2} = \sqrt{36 \cdot 2} \sqrt{a^2} = 6\sqrt{2} |a|$. Модуль нужен, потому что арифметический корень неотрицателен.

Ответ. $6|a|\sqrt{2}$.

Задание 9

Вычислите

$$16^{\frac{3}{4}}.$$

Шаг 1. По определению $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ при $a > 0$.

Шаг 2. $\sqrt[4]{16} = 2$.

Шаг 3. Следовательно, значение равно $2^3 = 8$.

Ответ. 8

Задание 10

Вычислите $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Сначала извлекаем кубический корень: $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$. Затем возводим в квадрат: $\frac{9}{4}$.

Ответ. $\frac{9}{4}$.

02. Применение и сочетание приёмов**Задание 11**

Вычислите

$$81^{\frac{3}{4}}.$$

Шаг 1. По определению $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ при $a > 0$.

Шаг 2. $\sqrt[4]{81} = 3$.

Шаг 3. Следовательно, значение равно $3^3 = 27$.

Ответ. 27

Задание 12

Вычислите $\sqrt[3]{-64} + \sqrt{(-4)^2}$ и объясните различие знаков.

Кубический корень из -64 равен -4 , так как $(-4)^3 = -64$. Арифметический квадратный корень из 16 равен 4 . Сумма равна 0 . У корня нечётной степени знак совпадает со знаком подкоренного числа.

Ответ. 0 .

Задание 13

Вычислите

$$\sqrt{(3)^2}$$

и объясните, почему ответ не обязан совпадать с исходным числом.

Шаг 1. Арифметический квадратный корень по определению неотрицателен.

Шаг 2. Поэтому для любого действительного u выполняется $\sqrt{u^2} = |u|$.

Шаг 3. Здесь $|3| = 3$.

Ответ. 3

Задание 14

Вычислите

$$\sqrt{(-5)^2}$$

и объясните, почему ответ не обязан совпадать с исходным числом.

Шаг 1. Арифметический квадратный корень по определению неотрицателен.

Шаг 2. Поэтому для любого действительного u выполняется $\sqrt{u^2} = |u|$.

Шаг 3. Здесь $|-5| = 5$.

Ответ. 5

Задание 15

Упростите $\sqrt{(a-2)^2} - (a-2)$ при всех действительных a .

Это $|a-2| - (a-2)$. При $a \geq 2$ разность равна 0 ; при $a < 2$ получаем $2 - a - a + 2 = 4 - 2a$. Обе формулы дают 0 на границе.

Ответ.
$$\begin{cases} 4 - 2a, & a < 2, \\ 0, & a \geq 2. \end{cases}$$

Задание 16

Рационализируйте знаменатель:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}.$$

Шаг 1. Сопряжённое выражение к $\sqrt{5}-2$ равно $\sqrt{5}+2$.

Шаг 2. Умножаем числитель и знаменатель на это ненулевое выражение.

Шаг 3. В знаменателе получаем разность квадратов: $5-4=1$.

Шаг 4. Числитель становится $\sqrt{5}+2$.

Шаг 5. Итог: $\frac{\sqrt{5}+2}{1}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{5}+2}{1}$

Задание 17

Рационализируйте знаменатель:

$$\frac{1}{\sqrt{7}-2}.$$

Шаг 1. Сопряжённое выражение к $\sqrt{7}-2$ равно $\sqrt{7}+2$.

Шаг 2. Умножаем числитель и знаменатель на это ненулевое выражение.

Шаг 3. В знаменателе получаем разность квадратов: $7-4=3$.

Шаг 4. Числитель становится $\sqrt{7}+2$.

Шаг 5. Итог: $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

Задание 18

Упростите $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

Общий знаменатель равен $7-3=4$. Числитель

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 = 2(7+3) = 20.$$

Ответ. 5.

03. Повторение пройденного

Задание 19

Накопительное повторение. Разложите на множители $x^3 - 27$.

Шаг 1. Распознаём разность кубов: $x^3 - 27 = x^3 - 3^3$.

Шаг 2. Используем $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Шаг 3. Получаем $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

Ответ. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

Задание 20

Повторение алгебраических преобразований. Упростите

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

и укажите ограничения.

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Исходный знаменатель ненулевой при $x \neq 3$. Сокращение даёт **ответ:** $x + 3$ при $x \neq 3$.

04. Многошаговые задачи

Задание 21

Рационализируйте знаменатель:

$$\frac{1}{\sqrt{13} - 2}.$$

Шаг 1. Сопряжённое выражение к $\sqrt{13} - 2$ равно $\sqrt{13} + 2$.

Шаг 2. Умножаем числитель и знаменатель на это ненулевое выражение.

Шаг 3. В знаменателе получаем разность квадратов: $13 - 4 = 9$.

Шаг 4. Числитель становится $\sqrt{13} + 2$.

Шаг 5. Итог: $\frac{\sqrt{13} + 2}{9}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{13} + 2}{9}$

Задание 22

Упростите $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Шаг 1. Ищем представление подкоренного выражения как $(\sqrt{u} + \sqrt{v})^2$.

Шаг 2. Нужно $u + v = 3$ и $uv = 2$.

Шаг 3. Подходят $u = 2$ и $v = 1$.

Шаг 4. Следовательно, под корнем стоит $(\sqrt{2} + 1)^2$.

Шаг 5. Число $\sqrt{2} + 1$ положительно, поэтому результат равен $\sqrt{2} + 1$ без дополнительного модуля.

Ответ. $\sqrt{2} + 1$

Задание 23

Упростите $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

Шаг 1. Ищем представление подкоренного выражения как $(\sqrt{u} + \sqrt{v})^2$.

Шаг 2. Нужно $u + v = 4$ и $uv = 3$.

Шаг 3. Подходят $u = 3$ и $v = 1$.

Шаг 4. Следовательно, под корнем стоит $(\sqrt{3} + 1)^2$.

Шаг 5. Число $\sqrt{3} + 1$ положительно, поэтому результат равен $\sqrt{3} + 1$ без дополнительного модуля.

Ответ. $\sqrt{3} + 1$

Задание 24

Упростите $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

$7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$. Так как $2 > \sqrt{3}$, получаем $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$.

Ответ. $2 - \sqrt{3}$.

Задание 25

При $t \geq 0$ упростите $\sqrt{t + 1 + 2\sqrt{t}} + \sqrt{t + 1 - 2\sqrt{t}}$.

Под корнями квадраты $(\sqrt{t} + 1)^2$ и $(\sqrt{t} - 1)^2$. Получаем $\sqrt{t} + 1 + |\sqrt{t} - 1|$. При $0 \leq t \leq 1$ это 2, при $t > 1$ — $2\sqrt{t}$.

Ответ. 2 при $0 \leq t \leq 1$; $2\sqrt{t}$ при $t > 1$.

Задание 26

Сравните без десятичных приближений числа $\sqrt{50} - 7$ и

$$\frac{1}{14}.$$

Шаг 1. Рационализируем разность: $\sqrt{n} - k = \frac{n - k^2}{\sqrt{n} + k}$.

Шаг 2. Здесь $n - k^2 = 50 - 49 = 1$.

Шаг 3. Поэтому $\sqrt{50} - 7 = \frac{1}{\sqrt{50} + 7}$.

Шаг 4. Так как $\sqrt{50} > 7$, знаменатель больше 14.

Шаг 5. При положительных знаменателях получаем $\sqrt{50} - 7 < \frac{1}{14}$.

Ответ. $\sqrt{50} - 7 < \frac{1}{14}$

Задание 27

Докажите без приближений, что $\sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ убывает при $a \geq 0$.

Умножаем на сопряжённое: $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$. При увеличении a обе функции в положительном знаменателе строго возрастают. Поэтому дробь строго убывает.

Ответ. Строго убывает на $[0; +\infty)$.

Задание 28

Для $a \geq 0$ и $b \geq 0$ докажите

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$$

и найдите случаи равенства в каждой части.

Шаг 1. Все выражения неотрицательны, поэтому допустимо сравнивать квадраты.

Шаг 2. Левая оценка после возведения в квадрат равносильна $a + b \leq a + b + 2\sqrt{ab}$, что верно. Равенство возникает при $ab = 0$.

Шаг 3. Правая оценка равносильна $a + b + 2\sqrt{ab} \leq 2a + 2b$, то есть $2\sqrt{ab} \leq a + b$.

Шаг 4. Последнее неравенство следует из $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Равенство в правой оценке достигается при $a = b$.

Проверка полноты. Неотрицательность разрешает обратный переход от квадратов, а условия равенства восстановлены из точных нулей.

Ответ. Левая граница: равенство при $ab = 0$; правая: при $a = b \geq 0$.

Задание 29

Рационализируйте знаменатель:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

Умножаем на сопряжённое к сумме $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ и числу $\sqrt{5}$. Получаем $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$. Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{6}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}$. Все использованные множители ненулевые.

Задание 30

Упростите $\sqrt{(x-3)^2}$ при $x < 3$.

$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$. При $x < 3$ выражение под модулем отрицательно, поэтому $|x-3| = 3-x$. **Ответ:** $3-x$.

05. Задания с развёрнутым решением**Задание 31**

Найдите область определения выражения

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}.$$

Для числителя нужно $x-2 \geq 0$. Знаменатель должен существовать и быть ненулевым, поэтому $5-x > 0$. Пересечение условий $x \geq 2$ и $x < 5$ даёт **ответ:** $[2; 5)$. Точка 2 разрешена: нулевой числитель допустим.



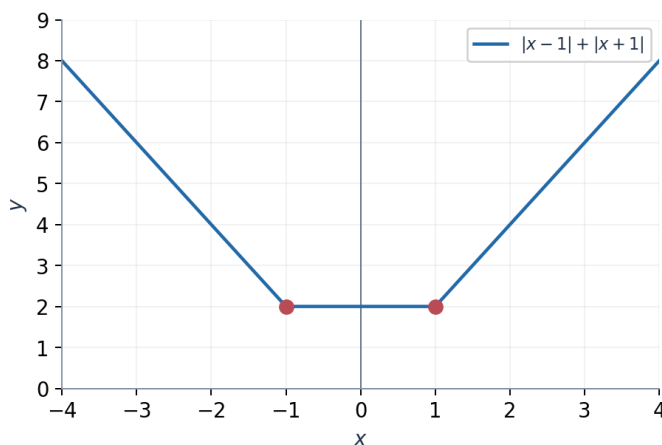
ОДЗ: $[2; 5)$. В знаменателе корень должен быть строго положительным.

Задание 32

Запишите без знаков корня и модуля $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$ для всех действительных x .

Получаем $|x-1| + |x+1|$. При $x < -1$ оба выражения отрицательны, сумма равна $-2x$. При $-1 \leq x \leq 1$ сумма равна $(1-x) + (x+1) = 2$. При $x > 1$ сумма равна $2x$.

Ответ: $-2x$ при $x < -1$; 2 при $-1 \leq x \leq 1$; $2x$ при $x > 1$.



Сумма расстояний до -1 и 1 постоянна между этими точками.

Задание 33

Упростите

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

и сохраните исходную ОДЗ.

Исходные условия: $x \geq 0$, $x \neq 4$. Разложим $x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$ и сократим ненулевой множитель. **Ответ:** $\frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ при $x \geq 0$, $x \neq 4$. Хотя новая запись имеет смысл при $x = 4$, исходная дробь там не определена.

Задание 34

Вычислите:

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}.$$

Так как $3 + 2 = 5$ и $3 \cdot 2 = 6$, подкоренные выражения равны $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ и $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$. Обе суммы после извлечения корня неотрицательны, причём $\sqrt{3} > \sqrt{2}$. Разность равна $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. **Ответ:** $2\sqrt{2}$.

Задание 35

Упростите

$$\frac{a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}$$

при $a > 0, b > 0, a \neq b$.

Обозначим $u = a^{\frac{1}{4}}, v = b^{\frac{1}{4}}$. Из $a \neq b$ следует $u \neq v$, поэтому можно сократить $u - v$:
 $\frac{u^3 - v^3}{u - v} = u^2 + uv + v^2$. Возвращаем обозначения. **Ответ:** $\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}$.

Задание 36

Вычислите:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

Рационализация даёт соответственно $\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}$, поскольку разность квадратов в каждом знаменателе равна 1. Промежуточные корни при сложении сокращаются. **Ответ:** 1.

06. Итоговые задачи повышенной сложности**Задание 37**Сравните без десятичных приближений: $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{6} + 2$.

Оба числа положительны. Их квадраты равны $10 + 2\sqrt{21}$ и $10 + 4\sqrt{6}$. Сравним положительные $\sqrt{21}$ и $2\sqrt{6}$: их квадраты равны 21 и 24, поэтому первое меньше.

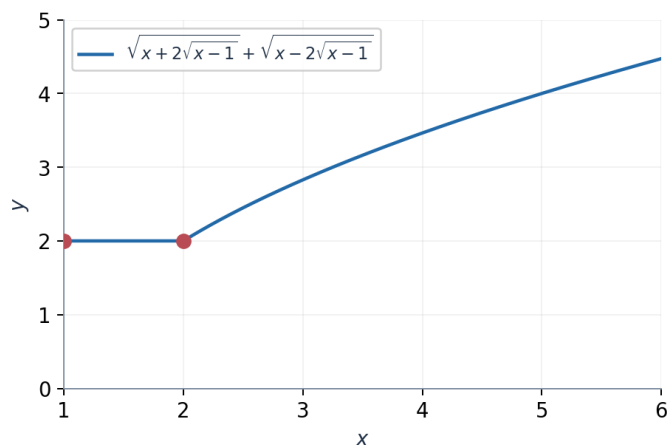
Ответ: $\sqrt{7} + \sqrt{3} < \sqrt{6} + 2$.

Задание 38

Упростите $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ при $x \geq 1$.

Положим $t = \sqrt{x-1} \geq 0$, тогда $x = t^2 + 1$. Получаем

$\sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(t-1)^2} = t+1 + |t-1|$. При $0 \leq t \leq 1$ результат равен 2, а при $t > 1$ равен $2t$. Все подкоренные выражения неотрицательны, поскольку являются квадратами. **Ответ:** 2 при $1 \leq x \leq 2$; $2\sqrt{x-1}$ при $x > 2$.



Граница раскрытия модуля — $x = 2$; область определения начинается с $x = 1$.

Задание 39

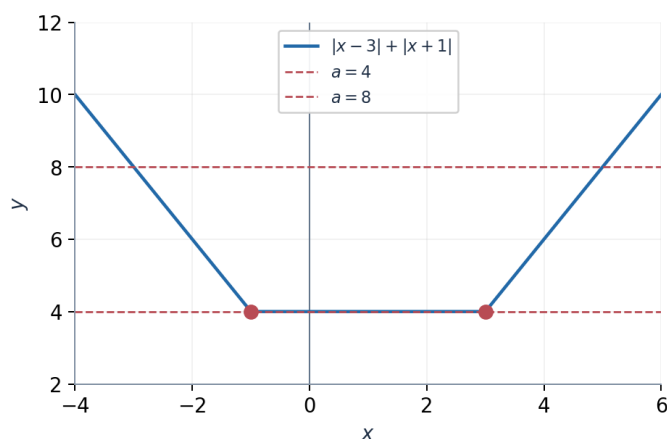
В зависимости от a решите $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = a$.

Шаг 1. ОДЗ — все действительные x . Левая часть равна $|x - 3| + |x + 1|$ — сумме расстояний от x до точек 3 и -1 .

Шаг 2. Если $x < -1$, сумма равна $2 - 2x$; если $-1 \leq x \leq 3$, равна 4; если $x > 3$, равна $2x - 2$.

Шаг 3. При $a < 4$ решений нет. При $a = 4$ подходит весь отрезок $[-1; 3]$. При $a > 4$ получаем два корня $x = 1 - \frac{a}{2} < -1$ и $x = 1 + \frac{a}{2} > 3$; условия ветвей выполнены.

Ответ. При $a < 4$: $\emptyset$; при $a = 4$: $[-1; 3]$; при $a > 4$: $1 \pm \frac{a}{2}$.



Минимум 4 достигается на всём отрезке $[-1; 3]$. Уровни выше 4 дают два корня.

Задание 40

Определите число различных решений $\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} = a$ на отрезке $[-3; 4]$ для каждого действительного a .

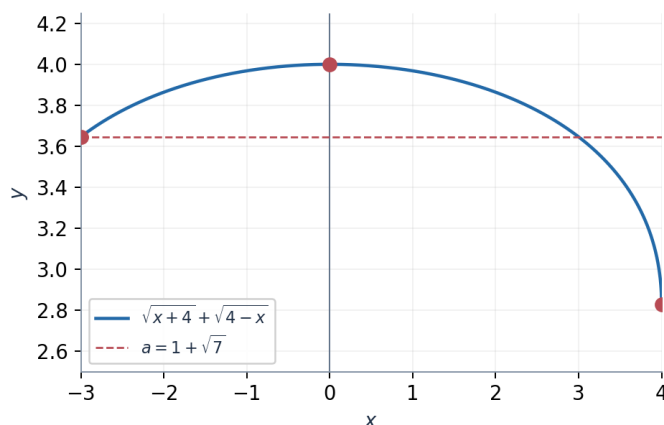
Шаг 1. На заданном отрезке оба корня определены. Обозначим левую часть через $f(x) > 0$. Тогда $f(x)^2 = 8 + 2\sqrt{16 - x^2}$.

Шаг 2. На $[-3; 0]$ величина x^2 убывает, поэтому f строго возрастает от $1 + \sqrt{7}$ до 4. На $[0; 4]$ функция строго убывает от 4 до $2\sqrt{2}$. Это доказывает полноту подсчёта без приблизительного чтения графика.

Шаг 3. Уровень ниже $2\sqrt{2}$ или выше 4 не достигается. При $2\sqrt{2} \leq a < 1 + \sqrt{7}$ есть одна точка правой ветви. При $1 + \sqrt{7} \leq a < 4$ — по одной точке каждой ветви. При $a = 4$ две ветви встречаются в единственной точке $x = 0$.

Границы. При $a = 2\sqrt{2}$ подходит только $x = 4$ (точка -4 вне отрезка). При $a = 1 + \sqrt{7}$ подходят $x = -3$ и $x = 3$.

Ответ. 0 при $a < 2\sqrt{2}$ или $a > 4$; 1 при $2\sqrt{2} \leq a < 1 + \sqrt{7}$ или $a = 4$; 2 при $1 + \sqrt{7} \leq a < 4$.



Ограничение $x \in [-3; 4]$ делает число корней зависимым от уровня $1 + \sqrt{7}$.