



Наибольшее и наименьшее значение функции

Задания, решения и ответы

40 заданий с пошаговыми решениями и ответами. Сначала выполните задание самостоятельно, затем сравните ход рассуждений с разбором.

01. Свойства и базовые методы: задания 1–10

Задание 1

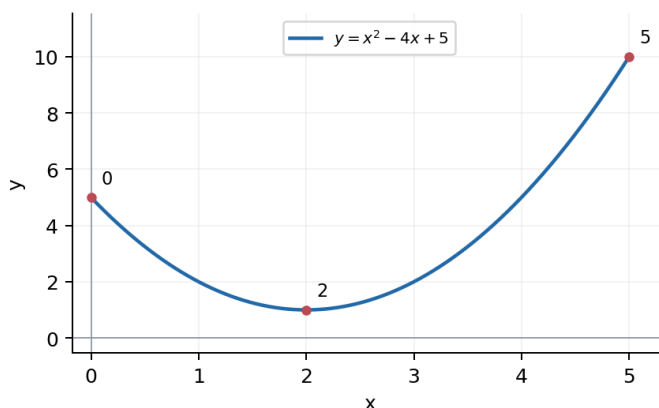
Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^2 - 4x + 5$ на $[0; 5]$. Укажите, где они достигаются.

Шаг 1. Функция непрерывна на отрезке. $f'(x) = 2x - 4$, поэтому внутренний кандидат $x = 2$.

Шаг 2. Сравниваем значения во всех кандидатах:

$$f(0) = 5, \quad f(2) = 1, \quad f(5) = 10.$$

Ответ. $\min f = 1$ при $x = 2$; $\max f = 10$ при $x = 5$. Значение функции и абсцисса точки не совпадают.



Задание 1: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

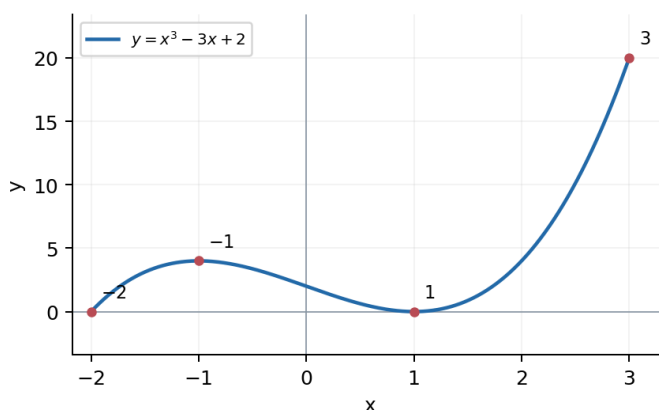
Задание 2

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^3 - 3x + 2$ на $[-2; 3]$.
Укажите все точки достижения.

Шаг 1. $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$; оба стационарных значения $x = -1, 1$ входят в отрезок.

Шаг 2. $f(-2) = 0$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$, $f(3) = 20$. Проверены оба конца и все внутренние критические точки.

Ответ. $\min f = 0$ при $x = -2$ и $x = 1$; $\max f = 20$ при $x = 3$. Локальный максимум $f(-1) = 4$ не является наибольшим значением на всём отрезке.



Задание 2: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

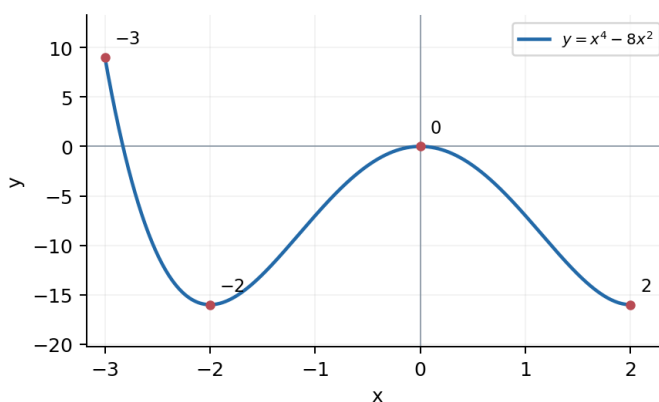
Задание 3

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^4 - 8x^2$ на $[-3; 2]$.

Шаг 1. $f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$. Кандидаты: $-3, -2, 0, 2$; точку 2 учитываем один раз.

Шаг 2. $f(-3) = 9$, $f(-2) = -16$, $f(0) = 0$, $f(2) = -16$.

Ответ. $\min f = -16$ при $x = \pm 2$; $\max f = 9$ при $x = -3$.



Задание 3: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 4

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x + \frac{4}{x}$ на $[1; 5]$.

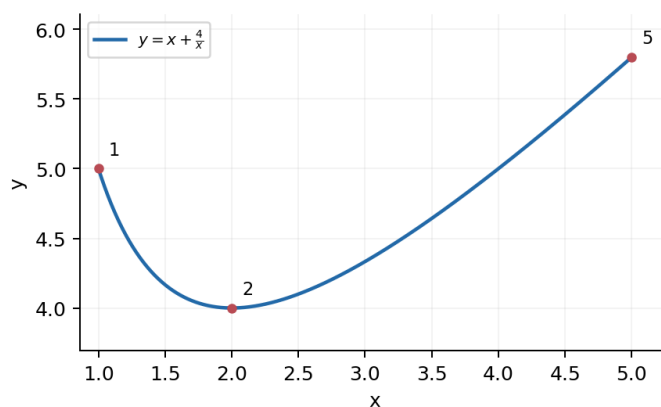
Шаг 1. На заданном отрезке знаменатель не равен нулю.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

Из двух корней производной в отрезок входит только 2.

Шаг 2. $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(5) = \frac{29}{5}$.

Ответ. $\min f = 4$ при $x = 2$; $\max f = \frac{29}{5}$ при $x = 5$.



Задание 4: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 5

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ на $[0; 3]$.

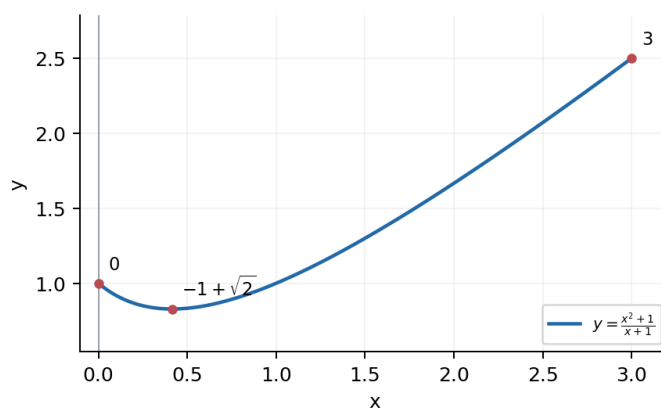
Шаг 1. На отрезке $x + 1 > 0$. Выделяем целую часть:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x + 1}, \quad f'(x) = 1 - \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

Шаг 2. Стационарные точки $-1 \pm \sqrt{2}$. Подходит только $c = \sqrt{2} - 1$. Производная меняет знак с минуса на плюс.

Шаг 3. $f(0) = 1$, $f(3) = \frac{5}{2}$, $f(c) = 2\sqrt{2} - 2 < 1$ (так как $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$).

Ответ. $\min f = 2\sqrt{2} - 2$ при $x = \sqrt{2} - 1$; $\max f = \frac{5}{2}$ при $x = 3$.



Задание 5: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 6

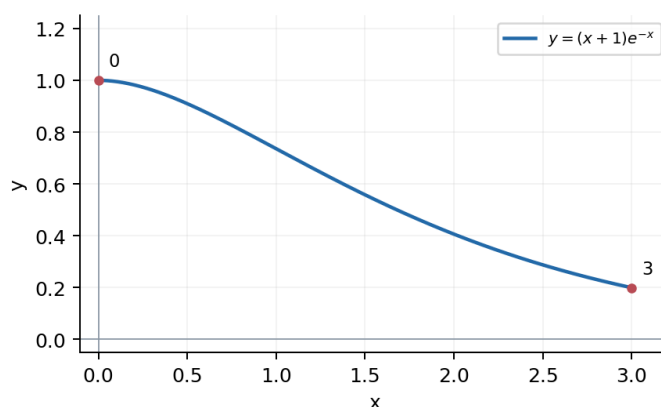
Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = (x+1)e^{-x}$ на $[0; 3]$.

Шаг 1. По правилу произведения

$$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Шаг 2. При $0 < x < 3$ производная отрицательна. Функция строго убывает; нуль производной на левом конце не создаёт дополнительного внутреннего кандидата.

Ответ. $\max f = f(0) = 1$; $\min f = f(3) = \frac{4}{e^3}$.



Задание 6: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 7

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ на $[1; e^2]$.

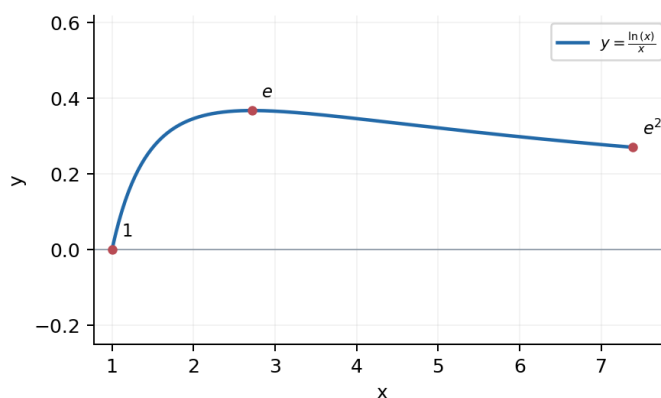
Шаг 1. Отрезок лежит в ОДЗ $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Шаг 2. До $x = e$ производная положительна, после отрицательна. Максимум равен $f(e) = \frac{1}{e}$.

Шаг 3. На отрезке $\ln x \geq 0$, а $f(1) = 0$. Значит, наименьшее значение равно нулю; правый конец даёт положительное $\frac{2}{e^2}$.

Ответ. $\min f = 0$ при $x = 1$; $\max f = \frac{1}{e}$ при $x = e$.



Задание 7: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 8

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ на $[-1; 2]$.

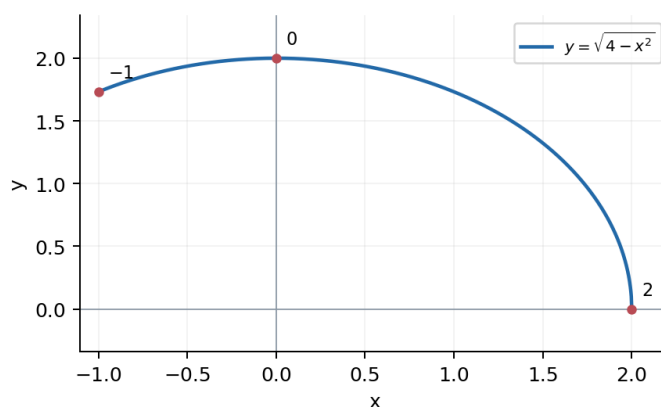
Шаг 1. Подкоренное выражение неотрицательно на всём отрезке. Внутри него

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}},$$

поэтому стационарная точка $x = 0$. В правом конце производная не существует, но сама функция определена.

Шаг 2. $f(-1) = \sqrt{3}$, $f(0) = 2$, $f(2) = 0$.

Ответ. $\min f = 0$ при $x = 2$; $\max f = 2$ при $x = 0$.



Задание 8: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

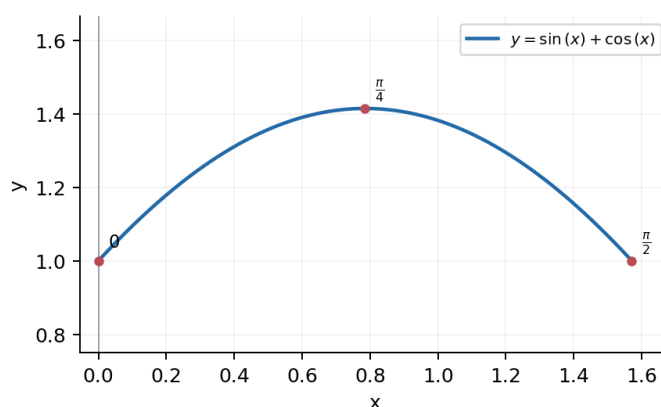
Задание 9

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sin x + \cos x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Шаг 1. $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$ при $x = \frac{\pi}{4}$. На заданном отрезке это единственная стационарная точка.

Шаг 2. $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Ответ. $\min f = 1$ на обоих концах; $\max f = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$.



Задание 9: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 10

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^2 + |x - 1|$ на $[-1; 2]$.

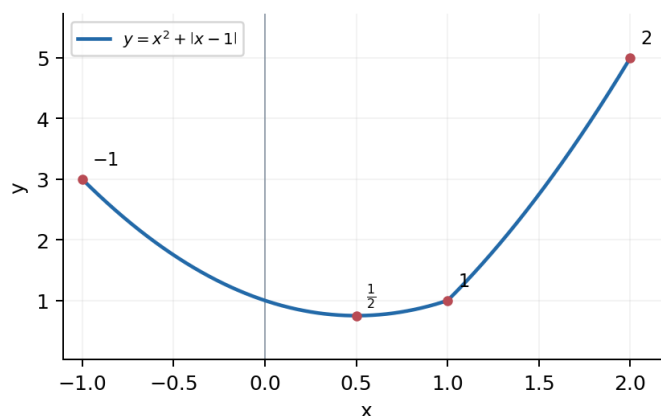
Шаг 1. Точка $x = 1$ принадлежит ОДЗ, но производная в ней не существует. Её нельзя пропускать.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \leq 1, \\ x^2 + x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Шаг 2. Для левой ветви стационарная точка $x = \frac{1}{2}$ подходит. Для правой формальное решение $x = -\frac{1}{2}$ не принадлежит области этой ветви.

Шаг 3. Кандидаты $-1, \frac{1}{2}, 1, 2$ дают $3, \frac{3}{4}, 1, 5$.

Ответ. $\min f = \frac{3}{4}$ при $x = \frac{1}{2}$; $\max f = 5$ при $x = 2$.

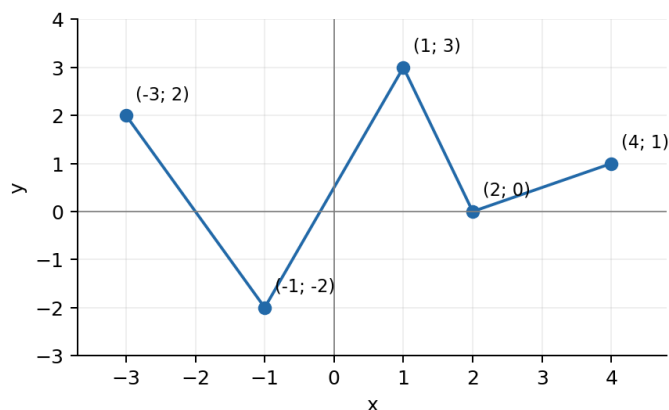


Задание 10: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

02. Графики и связка методов: задания 11-16

Задание 11

На рисунке показан график непрерывной функции на $[-3; 4]$. Он состоит из отрезков, последовательно соединяющих точки $(-3; 2)$, $(-1; -2)$, $(1; 3)$, $(2; 0)$, $(4; 1)$. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции и все точки их достижения.



Задание 11: исходный график функции; все пять вершин входят в область.

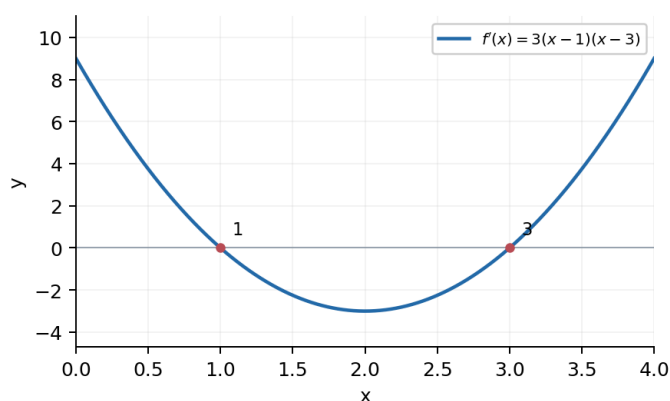
Шаг 1. На каждом прямолинейном участке функция монотонна, поэтому достаточно сравнить ординаты пяти вершин, включая концы.

Шаг 2. Наименьшая ордината -2 , наибольшая 3 . Ни один участок не горизонтален, поэтому других точек достижения нет.

Ответ. $\min f = -2$ при $x = -1$; $\max f = 3$ при $x = 1$.

Задание 12

На рисунке изображена производная $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ на $[0; 4]$. Функция f непрерывна на отрезке и дифференцируема внутри. Известно: $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$. Найдите наименьшее и наибольшее значения f , указав все точки достижения.



Задание 12: график производной, а не исходной функции.

Шаг 1. По знаку производной f возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; 3]$ и возрастает на $[3; 4]$.

Шаг 2. На каждом таком участке значения лежат между значениями в его концах. Поэтому сравниваем именно заданные значения f , а не ординаты графика f' .

Ответ. $\min f = 1$ при $x = 0, 3$; $\max f = 5$ при $x = 1, 4$.

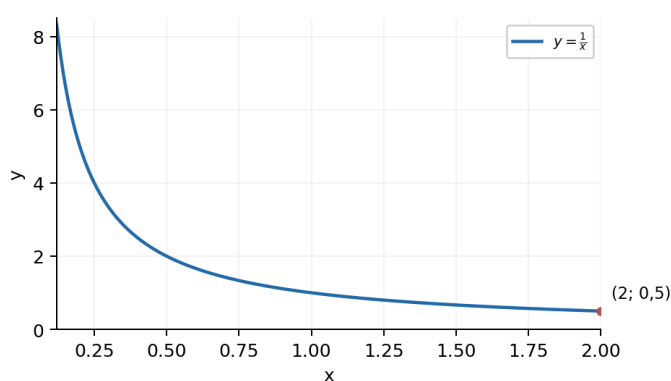
Задание 13

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0; 2]$, если они существуют.

Шаг 1. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: функция строго убывает. Правый конец включён, поэтому $\min f = f(2) = \frac{1}{2}$.

Шаг 2. Для любого x из промежутка число $\frac{x}{2}$ также входит в него, причём $f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f(x) > f(x)$. Наибольшего значения нет; при приближении к нулю справа значения неограниченно растут.

Ответ. Наименьшее значение $\frac{1}{2}$ при $x = 2$; наибольшего значения нет.



Задание 13: при $x \rightarrow 0$ справа график неограниченно поднимается.

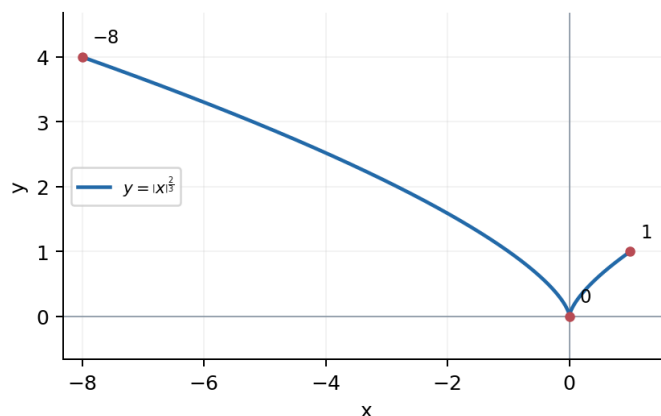
Задание 14

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ на $[-8; 1]$.

Шаг 1. $f(x) = |x|^{2/3} \geq 0$. При $x = 0$ производная не существует, однако $f(0) = 0$, и это наименьшее значение.

Шаг 2. Функция зависит только от $|x|$ и возрастает при увеличении $|x|$. На отрезке наибольший модуль аргумента равен 8 и достигается только при $x = -8$.

Ответ. $\min f = 0$ при $x = 0$; $\max f = 4$ при $x = -8$. Уравнение $f'(x) = 0$ здесь не дало бы точку минимума.



Задание 14: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 15

Определите максимум $y = 7 + 12x - 4x\sqrt{x}$ при $0 \leq x \leq 12$.

Шаг 1. Функция непрерывна при $x \geq 0$. Для $x > 0$

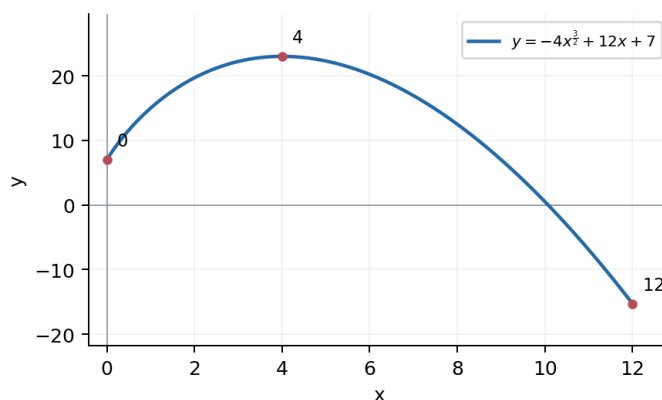
$$y' = 12 - 6\sqrt{x} = 6(2 - \sqrt{x}).$$

Шаг 2. Производная положительна до $x = 4$ и отрицательна после.

Следовательно, максимум достигается при $x = 4$.

$$y(4) = 7 + 48 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 23.$$

Ответ. 23. Условие соответствует примеру 12.4 из методических рекомендаций ФИПИ для подготовки к ЕГЭ-2026; разбор составлен для урока.



Задание 15: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 16

Определите минимум $y = 9x - 9\ln(x + 11) + 7$ при $-10,5 \leq x \leq 0$.

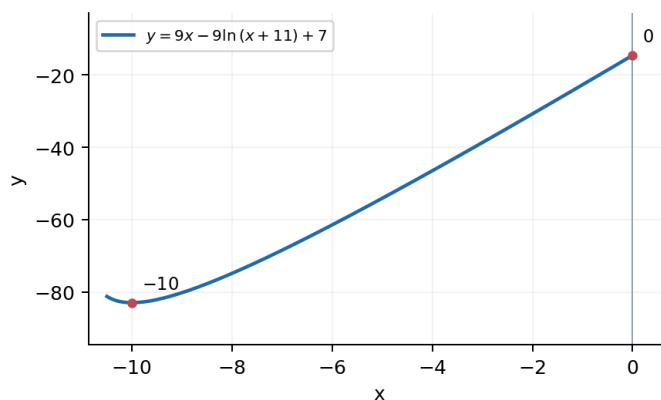
Шаг 1. ОДЗ $x > -11$ содержит весь отрезок.

$$y' = 9 - \frac{9}{x+11} = \frac{9(x+10)}{x+11}.$$

Шаг 2. Знаменатель положителен. Производная отрицательна до $x = -10$ и положительна после. Минимум достигается внутри отрезка.

$$y(-10) = -90 - 9\ln 1 + 7 = -83.$$

Ответ. -83 . Условие соответствует примеру 12.5 из методических рекомендаций ФИПИ для подготовки к ЕГЭ-2026; разбор составлен для урока.



Задание 16: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

03. Повторение пройденного: задания 17-20**Задание 17**

Решите неравенство $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$.

Шаг 1. ОДЗ: $x \neq -2$. Нуль числителя $x = 1$.

Шаг 2. Знаки дроби на промежутках $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(1; +\infty)$ равны соответственно $+$, $-$, $+$.

Шаг 3. Точка 1 включается, так как знак нестрогий; -2 исключается по ОДЗ.

Ответ. $(-2; 1]$.



Задание 17: точка -2 исключена по ОДЗ, точка 1 включена.

Задание 18

Решите уравнение $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$.

Шаг 1. ОДЗ: $x > 3$.

Шаг 2. На ОДЗ сумму логарифмов заменяем логарифмом произведения:

$$(x-1)(x-3) = 8, \quad x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Шаг 3. Корни $x = 5$ и $x = -1$. Второй нарушает ОДЗ. Для первого аргументы равны 4 и 2, сумма логарифмов равна $2 + 1 = 3$.

Ответ. 5.

Задание 19

Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ и отберите корни на $[\pi; 3\pi]$.

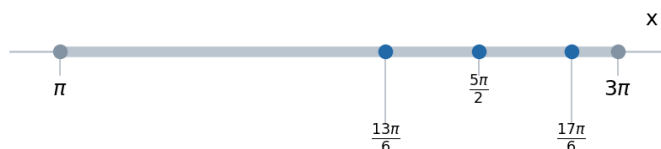
Шаг 1. $(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$, поэтому $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

Шаг 2. Общие решения:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Шаг 3. В каждой серии условие $\pi \leq x \leq 3\pi$ оставляет только $k = 1$. Концы отрезка не являются корнями.

Ответ. $\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}$.



Задание 19: все три отобранных корня на отрезке от π до 3π .

Задание 20

Составьте уравнение касательной к $f(x) = x^3 - 3x$ в точке с абсциссой 2 .

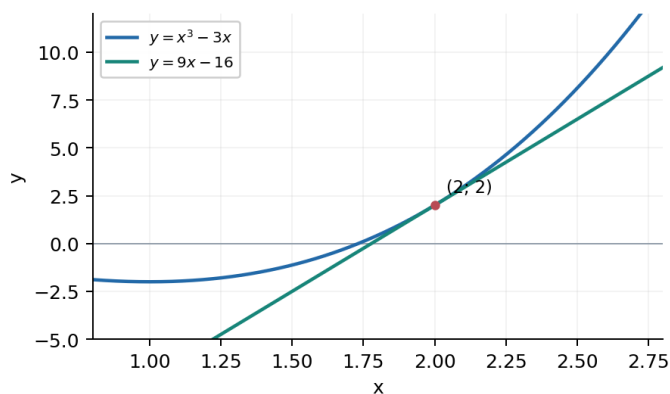
Шаг 1. $f(2) = 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(2) = 9$.

Шаг 2. Уравнение касательной:

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 2 + 9(x - 2) = 9x - 16.$$

Проверка. Прямая проходит через $(2; 2)$ и имеет требуемый угловой коэффициент 9 .

Ответ. $y = 9x - 16$.



Задание 20: касательная в точке $(2; 2)$.

04. Составные задачи: задания 21-30

Задание 21

Определите максимум $y = 10 \sin x - \frac{42x}{\pi} - 12$ при $-\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 0$.

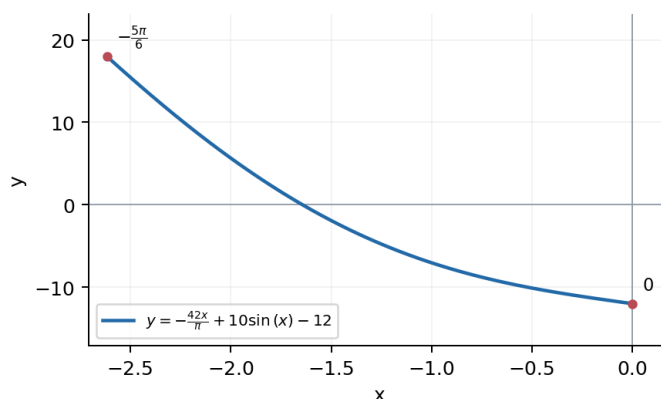
Шаг 1. $y' = 10 \cos x - \frac{42}{\pi}$. Так как $\cos x \leq 1$ и $\pi < 4$, получаем

$$y' \leq 10 - \frac{42}{\pi} < 10 - \frac{42}{4} < 0.$$

Шаг 2. Функция строго убывает. Максимум находится в левом конце:

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -5 + 35 - 12 = 18.$$

Ответ. 18. Условие соответствует примеру 12.6 из методических рекомендаций ФИПИ для подготовки к ЕГЭ-2026; разбор составлен для урока.



Задание 21: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 22

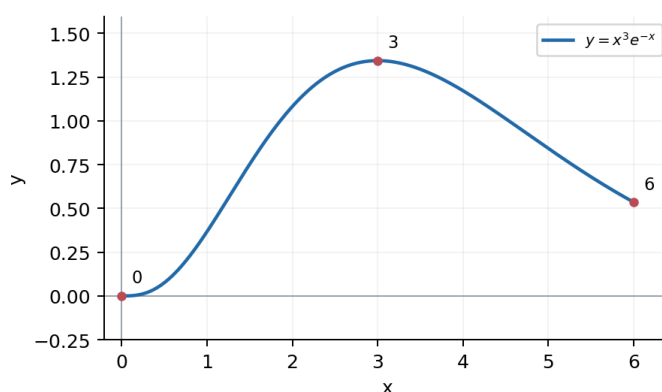
Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = x^3 e^{-x}$ на $[0; 6]$.

Шаг 1. $f'(x) = x^2 e^{-x}(3 - x)$. Единственный внутренний корень производной $x = 3$; $x = 0$ уже является концом.

Шаг 2. На $(0; 3)$ функция возрастает, на $(3; 6)$ убывает, поэтому максимум равен $\frac{27}{e^3}$.

Шаг 3. На всём отрезке $f(x) \geq 0$, а равенство достигается только при $x = 0$.

Ответ. $\min f = 0$ при $x = 0$; $\max f = \frac{27}{e^3}$ при $x = 3$.



Задание 22: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 23

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ на $[1; e^2]$.

Шаг 1. ОДЗ $x > 0$. Производная

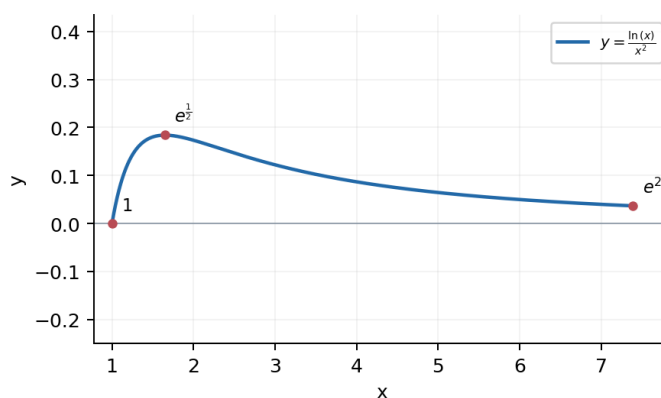
$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

равна нулю при $x = \sqrt{e}$.

Шаг 2. До $\sqrt{e}$ функция возрастает, после убывает. $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$.

Шаг 3. $\ln x \geq 0$ на отрезке, причём $f(1) = 0$ и $f(e^2) = \frac{2}{e^4} > 0$.

Ответ. $\min f = 0$ при $x = 1$; $\max f = \frac{1}{2e}$ при $x = \sqrt{e}$.



Задание 23: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 24

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ на всей области определения.

Шаг 1. ОДЗ: $x \in [0; 4]$.

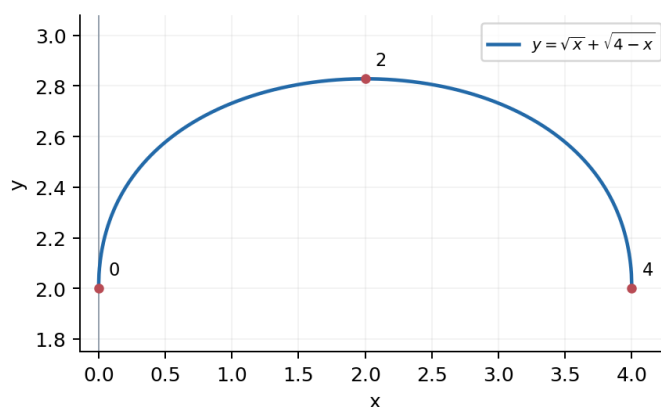
Шаг 2. Внутри отрезка

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}.$$

При $x < 2$ производная положительна, при $x > 2$ отрицательна; $f'(2) = 0$.

Шаг 3. В концах $f(0) = f(4) = 2$, а $f(2) = 2\sqrt{2}$. Недоступность производной в концах не мешает подставить их в исходную функцию.

Ответ. $\min f = 2$ при $x = 0, 4$; $\max f = 2\sqrt{2}$ при $x = 2$.



Задание 24: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 25

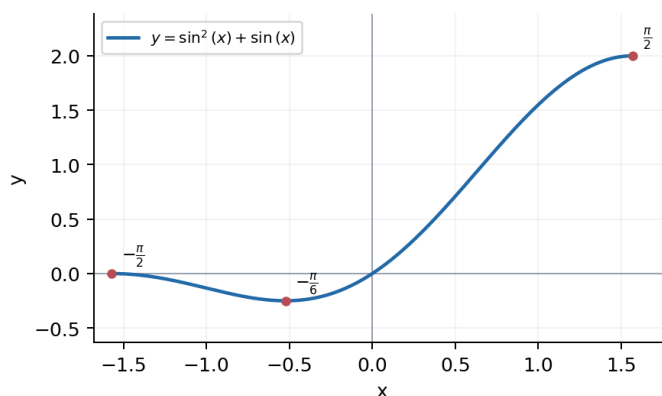
Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Шаг 1. Положим $t = \sin x$. На данном отрезке t непрерывно и строго возрастает от -1 до 1 , поэтому все значения $[-1; 1]$ достигаются.

Шаг 2. $t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Минимум равен $-\frac{1}{4}$ при $t = -\frac{1}{2}$. На концах $q(-1) = 0$, $q(1) = 2$, так что максимум равен 2 .

Шаг 3. Возвращаемся к аргументу: $\sin x = -\frac{1}{2}$ даёт $x = -\frac{\pi}{6}$, а $\sin x = 1$ даёт $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\min f = -\frac{1}{4}$ при $x = -\frac{\pi}{6}$; $\max f = 2$ при $x = \frac{\pi}{2}$.



Задание 25: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

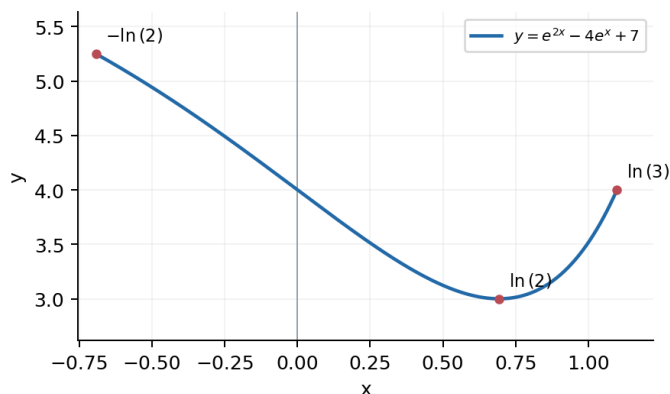
Задание 26

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 7$ на $[-\ln 2; \ln 3]$.

Шаг 1. Замена $t = e^x$ переводит отрезок в $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ взаимно однозначно.

Шаг 2. $q(t) = t^2 - 4t + 7 = (t - 2)^2 + 3$. Сравниваем $q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{4}$, $q(2) = 3$, $q(3) = 4$.

Ответ. $\min f = 3$ при $x = \ln 2$; $\max f = \frac{21}{4}$ при $x = -\ln 2$.



Задание 26: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

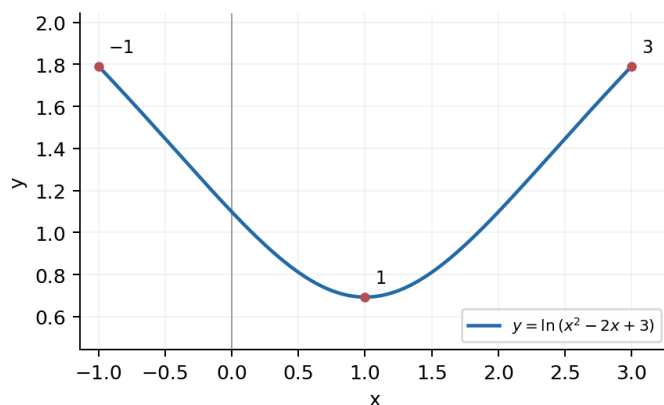
Задание 27

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$ на $[-1; 3]$.

Шаг 1. $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 > 0$: ограничений внутри отрезка нет.

Шаг 2. Натуральный логарифм строго возрастает. Достаточно исследовать его аргумент: минимум 2 достигается при $x = 1$, максимум 6 при $x = -1$ и $x = 3$.

Ответ. $\min f = \ln 2$ при $x = 1$; $\max f = \ln 6$ при $x = -1, 3$.



Задание 27: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 28

Найдите наименьшее и наибольшее значения $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ на $[-2; 3]$.

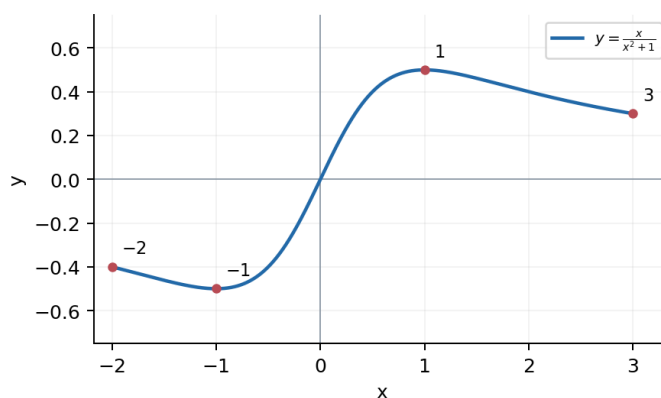
Шаг 1. Знаменатель всегда положителен.

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Критические точки $x = -1, 1$ входят в отрезок.

Шаг 2. $f(-2) = -\frac{2}{5}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{3}{10}$.

Ответ. $\min f = -\frac{1}{2}$ при $x = -1$; $\max f = \frac{1}{2}$ при $x = 1$.



Задание 28: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

Задание 29

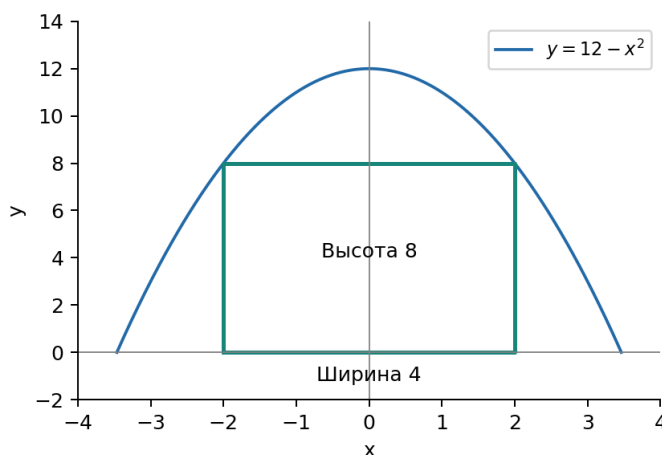
Прямоугольник симметричен относительно оси Oy . Его нижние вершины лежат на оси Ox , а верхние на параболе $y = 12 - x^2$. Найдите наибольшую площадь и размеры прямоугольника.

Шаг 1. Пусть $x > 0$ - абсцисса правой верхней вершины. Ширина $2x$, высота $12 - x^2$, поэтому $0 < x < 2\sqrt{3}$.

$$S(x) = 2x(12 - x^2), \quad S'(x) = 24 - 6x^2.$$

Шаг 2. Стационарная точка $x = 2$ входит в допустимый промежуток. До неё производная положительна, после отрицательна, значит, это глобальный максимум. При приближении к обеим границам площадь стремится к нулю.

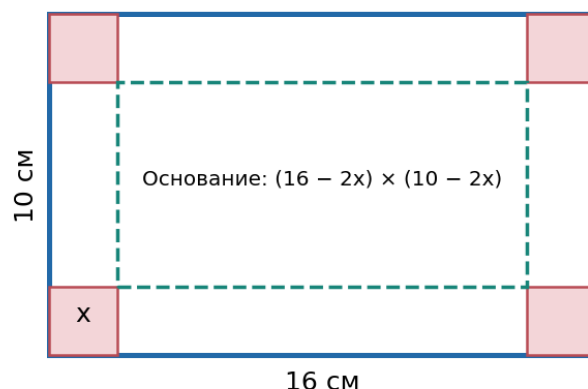
Ответ. Наибольшая площадь 32; ширина 4, высота 8.



Задание 29: прямоугольник максимальной площади под параболой.

Задание 30

Из листа размером 10×16 см вырезают по углам одинаковые квадраты со стороной x и сгибают открытую коробку. Найдите максимальный объём и размеры полученной коробки.



Задание 30: развёртка; красные угловые квадраты вырезают. x - сторона вырезаемого квадрата; размеры схемы условные.

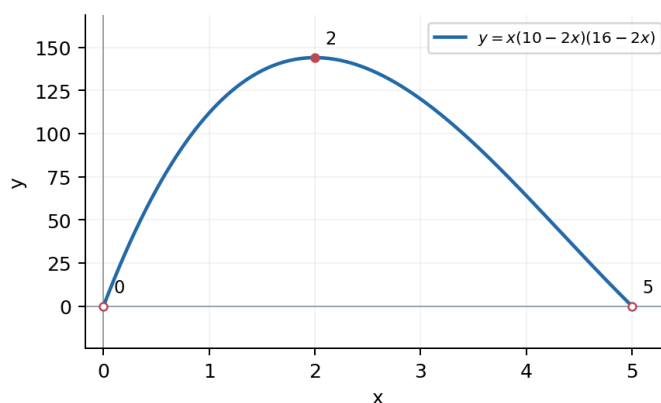
Шаг 1. Для невырожденной коробки $0 < x < 5$.

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x.$$

Шаг 2. $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x - 20)(x - 2)$. Из корней 2 и $\frac{20}{3}$ допустим только 2.

Шаг 3. На $(0; 2)$ производная положительна, на $(2; 5)$ отрицательна. На границах продолженная функция равна нулю; глобальный максимум находится внутри.

Ответ. $V_{\max} = 2 \cdot 6 \cdot 12 = 144 \text{ см}^3$. Высота 2 см, основание 6×12 см.



Задание 30: объём на $0 < x < 5$. Выколотые концы соответствуют вырожденным коробкам.

05. Развёрнутое обоснование: задания 31-34

Задание 31

Найдите кратчайшее расстояние от $A(0; 2)$ до параболы $y = x^2$. Укажите все ближайшие точки.

Шаг 1. Любая точка параболы имеет вид $M(x; x^2)$, где $x \in \mathbb{R}$.

$$AM^2 = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4.$$

Минимизация расстояния равносильна минимизации его квадрата.

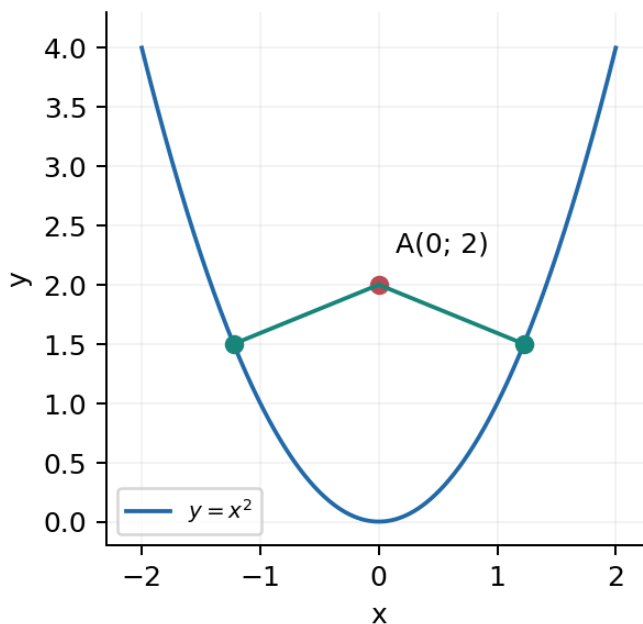
Шаг 2. Положим $t = x^2 \geq 0$:

$$AM^2 = t^2 - 3t + 4 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Минимум $\frac{7}{4}$ достигается при допустимом $t = \frac{3}{2}$.

Шаг 3. Оба значения $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ дают ближайшие точки.

Ответ. Расстояние $\frac{\sqrt{7}}{2}$; точки $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.



Задание 31: два одинаково близких положения точки на параболы.

Задание 32

Закрытый круговой цилиндр имеет объём 54π . Найдите радиус, высоту и наименьшую площадь полной поверхности.

Шаг 1. Радиус $r > 0$, высота $h > 0$. Из $\pi r^2 h = 54\pi$ следует $h = \frac{54}{r^2}$.

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{108\pi}{r}.$$

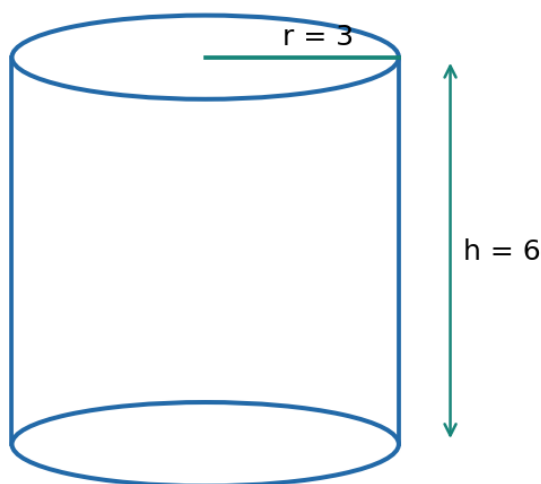
Шаг 2.

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{108\pi}{r^2} = \frac{4\pi(r^3 - 27)}{r^2}.$$

Знаменатель положителен; производная меняет знак с минуса на плюс при $r = 3$.

Шаг 3. При $r \rightarrow 0+$ и $r \rightarrow +\infty$ площадь неограниченно растёт, поэтому найден глобальный минимум.

Ответ. $r = 3$, $h = 6$, $S_{\min} = 54\pi$. Оптимальная высота равна диаметру.



Задание 32: закрытый цилиндр минимальной площади при фиксированном объёме.

Задание 33

Докажите, что $\ln x \leq \frac{x}{e}$ при всех $x > 0$. Найдите все случаи равенства.

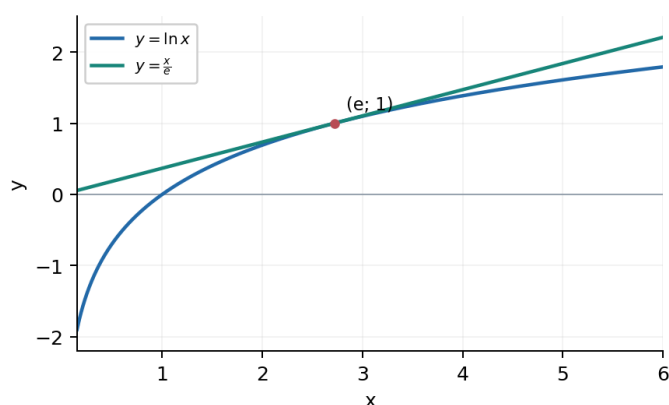
Шаг 1. Рассмотрим $g(x) = \ln x - \frac{x}{e}$ на $(0; +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e - x}{ex}.$$

Шаг 2. Функция строго возрастает до e и строго убывает после e . Поэтому для любого $x > 0$ верно $g(x) \leq g(e) = 1 - 1 = 0$.

Шаг 3. Строгая монотонность по обе стороны исключает другие точки равенства.

Ответ. Неравенство доказано; равенство только при $x = e$. Прямая $y = \frac{x}{e}$ касается графика $\ln x$ в точке $(e; 1)$ и лежит выше него.



Задание 33: логарифм не выше касательной; равенство только при $x = e$.

Задание 34

Найдите наибольшее значение $f(x) = x^{1/x}$ при $x > 0$. Докажите, что оно достигается только в одной точке.

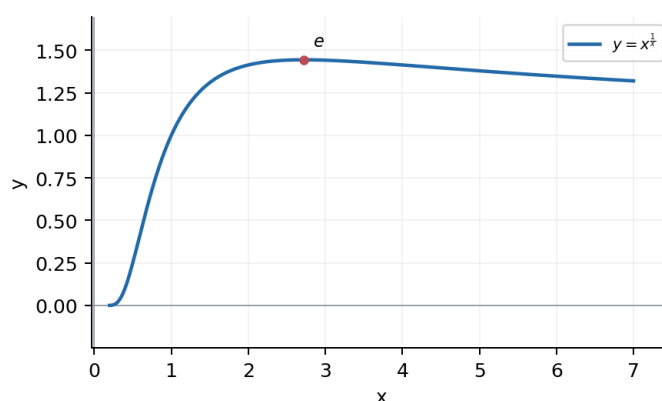
Шаг 1. Функция положительна. Логарифм строго возрастает, поэтому максимум f достигается там же, где максимум

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Шаг 2. $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. На $(0; e)$ знак положительный, на $(e; +\infty)$ отрицательный. Следовательно, e - единственная точка глобального максимума.

Шаг 3. $g(e) = \frac{1}{e}$, поэтому $f(e) = e^{1/e}$. Это значение исходной функции, а не её логарифма.

Ответ. $e^{1/e}$, только при $x = e$.



Задание 34: график на исследуемом промежутке; отмечены существенные кандидаты.

06. Сложные задачи и параметры: задания 35-40

Задание 35

Для каждого действительного a найдите наименьшее и наибольшее значения $f_a(x) = x^2 - 2ax + 5$ на $[-1; 2]$. Укажите точки достижения.

Шаг 1. $f_a(x) = (x - a)^2 + 5 - a^2$. Минимум достигается в ближайшей к a точке отрезка:

$$m(a) = \begin{cases} 6 + 2a, & a < -1, \\ 5 - a^2, & -1 \leq a \leq 2, \\ 9 - 4a, & a > 2. \end{cases}$$

Точка минимума соответственно -1 , a или 2 . При $a = -1, 2$ формулы соседних случаев совпадают.

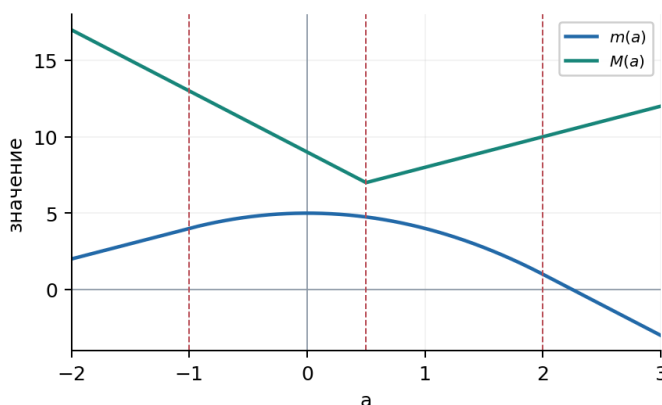
Шаг 2. Парабола направлена вверх; максимум на отрезке достигается в одном из концов. Разность

$$f_a(2) - f_a(-1) = 3 - 6a$$

меняет знак при $a = \frac{1}{2}$.

$$M(a) = \begin{cases} 9 - 4a, & a \leq \frac{1}{2}, \\ 6 + 2a, & a \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ. Минимум равен $m(a)$, максимум $M(a)$. При $a < \frac{1}{2}$ максимум только в 2 , при $a > \frac{1}{2}$ только в -1 , при $a = \frac{1}{2}$ - в обоих концах. Формула минимума и все точки достижения указаны выше.



Задание 35: минимум и максимум как функции параметра; границы $a = -1, 1/2, 2$.

Задание 36

Найдите все a , при которых наибольшее значение $f_a(x) = x^3 - 3ax$ на $[-1; 1]$ равно 2.

Шаг 1. Если $a \leq 0$, то $f'_a(x) = 3(x^2 - a) \geq 0$, функция возрастает. Максимум $1 - 3a = 2$ даёт $a = -\frac{1}{3}$; он входит в рассматриваемый случай.

Шаг 2. Если $0 < a < 1$, внутренние критические точки $\pm\sqrt{a}$. На концах значения равны $\pm(1 - 3a)$, в критических точках - $\pm 2a^{3/2}$. Поэтому

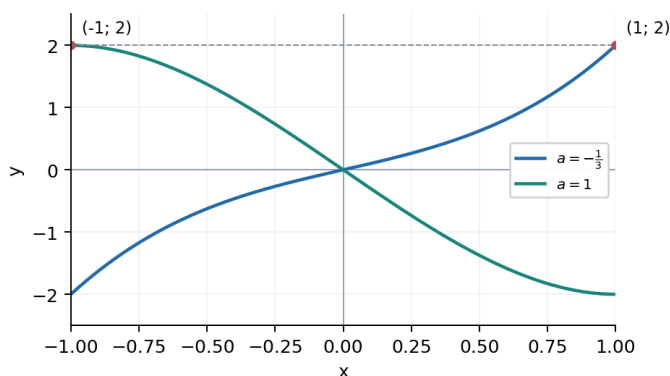
$$M(a) = \max\{|1 - 3a|, 2a^{3/2}\} < 2.$$

Здесь решений нет.

Шаг 3. Если $a \geq 1$, то производная неположительна на всём отрезке, функция убывает. Максимум $f_a(-1) = 3a - 1 = 2$ даёт $a = 1$.

Проверка. При $a = -\frac{1}{3}$ максимум в 1, при $a = 1$ в -1 ; в обоих случаях он равен 2.

Ответ. $a \in \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$.



Задание 36: оба найденных параметра дают максимум 2 на отрезке.

Задание 37

Исследуйте существование наименьшего значения $f_a(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ при $x > 0$ для всех действительных a . Если оно существует, найдите его и точку достижения.

Шаг 1. При $a < 0$ слагаемое $\frac{a}{x}$ стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow 0+$, а $x^2 \rightarrow 0$. Функция не ограничена снизу; наименьшего значения нет.

Шаг 2. При $a = 0$ имеем $x^2 > 0$. Значения приближаются к нулю, но $x = 0$ не входит в область: наименьшего значения нет, точная нижняя грань равна 0.

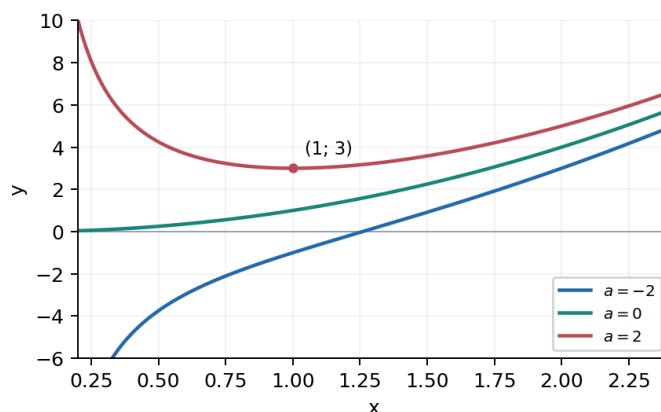
Шаг 3. При $a > 0$

$$f'_a(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = \frac{2x^3 - a}{x^2}.$$

Единственная критическая точка $c = \sqrt[3]{\frac{a}{2}} > 0$. До неё функция убывает, после возрастает, значит, минимум глобальный.

Шаг 4. Из $a = 2c^3$ получаем $f_a(c) = c^2 + 2c^2 = 3c^2$.

Ответ. При $a > 0$ минимум $3\left(\frac{a}{2}\right)^{2/3}$, точка $\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$. При $a \leq 0$ наименьшего значения нет; причины для $a < 0$ и $a = 0$ различны.



Задание 37: отрицательный, нулевой и положительный параметры дают три разных случая.

Задание 38

Для каждого действительного a найдите минимум $f_a(x) = x^4 - 2ax^2$ на $[-1; 2]$ и все точки его достижения.

Шаг 1. Замена $t = x^2$ переводит заданный отрезок в $[0; 4]$. Каждое такое t достигается хотя бы при $x = \sqrt{t}$.

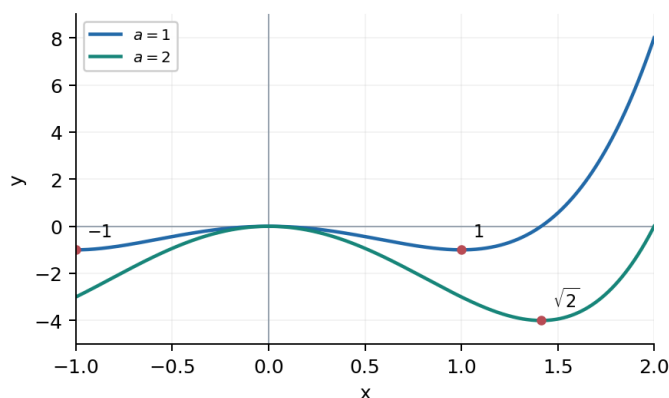
$$f_a(x) = t^2 - 2at = (t - a)^2 - a^2.$$

Шаг 2. Ближайшая к a точка отрезка $[0; 4]$ равна 0 при $a \leq 0$, равна a при $0 < a < 4$ и равна 4 при $a \geq 4$. Поэтому

$$m(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ -a^2, & 0 < a < 4, \\ 16 - 8a, & a \geq 4. \end{cases}$$

Шаг 3. Возвращаемся от t к x . При $a \leq 0$ единственная точка 0. При $0 < a \leq 1$ подходят обе точки $\pm\sqrt{a}$. При $1 < a < 4$ отрицательный корень меньше -1 , поэтому остаётся только $\sqrt{a}$. При $a \geq 4$ минимум только в 2.

Ответ. Минимум равен $m(a)$; все точки достижения перечислены в шаге 3. В частности, при $a = 1$ обе точки $-1, 1$ допустимы, при $a = 4$ допустима только 2.



Задание 38: при $a = 1$ минимум в двух точках, при $a = 2$ отрицательный корень вне отрезка.

Задание 39

Для всех действительных a найдите наименьшее значение $f_a(x) = x^2 - 2ax + |x - 1|$ на $[0; 2]$ и точку, где оно достигается.

Шаг 1. Слева и справа от 1:

$$f_a(x) = \begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 - (2a - 1)x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Производные ветвей равны $2x - 2a - 1$ и $2x - 2a + 1$. Они возрастают по x , а в точке 1 наклон скачком увеличивается на 2. Поэтому функция строго выпукла и точка минимума единственна.

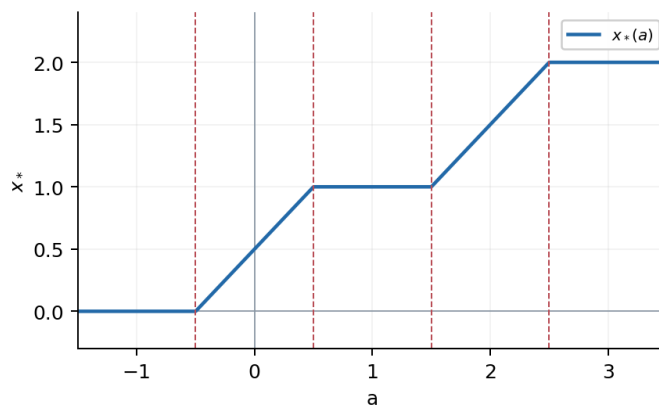
Шаг 2. Если $a \leq -\frac{1}{2}$, обе ветви не убывают и минимум в 0. При $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ производная левой ветви меняет знак в $a + \frac{1}{2}$. При $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ левый наклон в точке 1 неположителен, правый неотрицателен: минимум в изломе 1.

Шаг 3. При $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$ минимум правой ветви в $a - \frac{1}{2}$. При $a \geq \frac{5}{2}$ функция не возрастает на всём отрезке, минимум в 2.

Шаг 4. Подстановка даёт

$$m(a) = \begin{cases} 1, & a \leq -\frac{1}{2}, \\ 1 - (a + \frac{1}{2})^2, & -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}, \\ 1 - 2a, & \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}, \\ -1 - (a - \frac{1}{2})^2, & \frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}, \\ 5 - 4a, & a \geq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Ответ. Минимум равен $m(a)$. Единственная точка достижения по порядку пяти случаев: 0, $a + \frac{1}{2}$, 1, $a - \frac{1}{2}$, 2. На всех четырёх границах соседние формулы согласованы.



Задание 39: единственная точка минимума; средний участок соответствует излому $x = 1$.

Задание 40

Для действительного a обозначим

$$M(a) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - 2ax|.$$

Найдите наименьшее возможное $M(a)$, все подходящие a и точки x , в которых при оптимальном a достигается этот максимум.

Шаг 1. Исследуем $q_a(x) = x^2 - 2ax$. При $a < 0$ уже $|q_a(1)| = 1 - 2a > 1$, при $a > 1$ имеем $|q_a(1)| = 2a - 1 > 1$. Эти параметры хуже, например, $a = \frac{1}{2}$, для которого $M = \frac{1}{4}$.

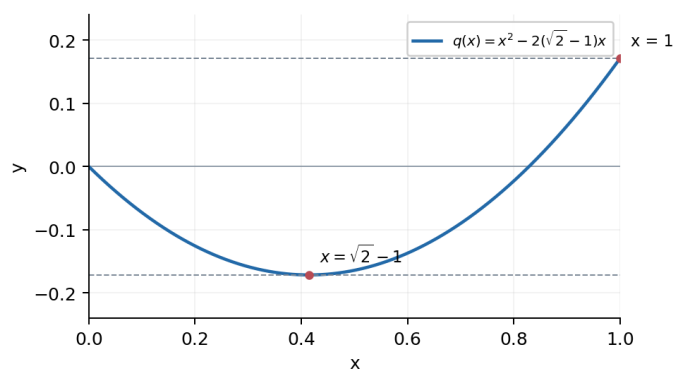
Шаг 2. При $0 \leq a \leq 1$ вершина $x = a$ входит в отрезок. Наименьшее значение q_a равно $-a^2$, а наибольшее равно $\max(0, 1 - 2a)$. Следовательно,

$$M(a) = \max\{a^2, |1 - 2a|\}.$$

Шаг 3. На $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ величина a^2 строго возрастает, а $1 - 2a$ строго убывает. Максимум двух величин минимален в их единственной точке пересечения:

$$a^2 = 1 - 2a, \quad a = \sqrt{2} - 1.$$

Другой корень $-\sqrt{2} - 1$ не подходит. Получаем $M = 3 - 2\sqrt{2}$.



Задание 40: наилучшее приближение уравнивает положительную и отрицательную ошибки.

Шаг 4. На $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ разность $a^2 - (2a - 1) = (a - 1)^2 \geq 0$, поэтому $M(a) = a^2 \geq \frac{1}{4}$. Найденное значение строго меньше $\frac{1}{4}$, так как $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$.

Шаг 5. При оптимальном a функция q_a равна $-M$ только в вершине $x = a$ и равна M только при $x = 1$; второй корень уравнения $q_a(x) = M$ отрицателен. Других точек максимума модуля нет.

Ответ. $\min_a M(a) = 3 - 2\sqrt{2}$, единственный параметр $a = \sqrt{2} - 1$. Максимум модуля достигается при $x = \sqrt{2} - 1$ и $x = 1$.