



Урок 17. Вероятность: один опыт

Вероятность начинается с точного подсчёта исходов. Разберём равновозможные результаты, выбор карточки или шара, противоположное событие и отличие вероятности от частоты в опыте.

В задачах этого урока монеты и кубики считаются честными, повторные броски независимыми, а выбор предмета или сектора равномерным, если не указано другое условие.

01. Что считаем одним исходом

Вероятность начинается с описания случайного выбора. Если выбирают позицию в слове, одинаковые буквы на разных местах - разные исходы. Если выбирают одну из различных букв, исходы уже другие. В задании о слове «МАТЕМАТИКА» выбирают именно позицию, поэтому знаменатель равен 10.

Классическая формула $P(A) = m/n$ работает для конечного набора **равновозможных** исходов. Само слово «случайно» не делает любые придуманные категории равновозможными. Например, «белый» и «чёрный» - два цвета, но их вероятности не обязаны равняться половине, если шаров разных цветов разное количество.

Запомните. И числитель, и знаменатель должны считать объекты одного типа: карточки, позиции, числа или конкретные исходы опыта.

02. Границы, дополнение и пересечение

Включительное перечисление целых чисел от a до b содержит $b - a + 1$ число. Нуль относится к неотрицательным числам, но не к положительным; единица не является ни простым, ни составным числом. Такие определения прямо меняют число благоприятных исходов.

Событие и противоположное ему событие исчерпывают все возможности и не пересекаются. Поэтому их вероятности в сумме равны единице. Для условия «кратно 6 или 10» события могут пересекаться: кратные 30 числа попали в обе группы и должны быть вычтены один раз.

03. Вероятность и результаты наблюдений

Относительная частота вычисляется по уже собранным данным: число наступлений события делится на число опытов. Она может отличаться от вероятности модели. Частота 0,55 в серии бросков не доказывает, что вероятность орла навсегда стала 0,55.

Ожидаемое количество Np - ориентир для суммы результатов, а не гарантия ровно такого числа событий. Если вопрос просит оценку, подпишите её как приблизительную. Итоговая вероятность всегда находится от 0 до 1; проценты переводятся делением на 100.

04. Случайный опыт, исход и событие

Случайным называют опыт, точный результат которого заранее неизвестен, хотя возможные результаты можно описать. Бросок кубика, выбор билета, извлечение одного шара из непрозрачного мешка - случайные опыты. Отдельный неделимый результат называют исходом. При броске обычного кубика исходами служат числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Событие - набор исходов, удовлетворяющих условию. Событие «выпало чётное число» включает исходы 2, 4 и 6.

Один и тот же исход может входить в разные события. Исход 6 входит в события «чётное», «больше 4», «кратно 3». Поэтому сначала нужно точно перевести словесное условие в множество подходящих исходов. Слова «не меньше 4» означают 4, 5, 6, а «больше 4» - только 5, 6. Слова «нечётное» и «не чётное» в целочисленном наборе совпадают, но в других ситуациях отрицание следует формулировать особенно внимательно.

Достоверное событие имеет вероятность 1, невозможное 0. В конечной модели с равновероятными исходами остальные события имеют вероятность строго между 0 и 1. Вероятность можно записать дробью или в процентах; ответ оформляйте так, как требует условие.

- Опыт - действие; исход - один возможный результат; событие - набор подходящих исходов.
- Перед вычислением выпишите словами или числами, какие исходы благоприятны.
- Всегда должно выполняться $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Границы в словах важны: «не меньше» включает равенство, «больше» - нет.

05. Классическая вероятность: благоприятные и все равновероятные исходы

Если все элементарные исходы равновероятны, вероятность события находят по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$, где n - число всех исходов, а m - число благоприятных. У честного кубика шесть равновероятных граней. Для события «выпало число больше 4» благоприятны 5 и 6, поэтому $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Формула работает только после проверки равновероятности. Нельзя считать предметы равновероятными, если механизм выбора даёт им разные шансы.

При выборе одного предмета из хорошо перемешанного набора каждый отдельный предмет имеет одинаковый шанс. Если в коробке 5 белых и 7 синих шаров одинакового размера, всего 12 исходов на уровне отдельных шаров. Событие «синий» включает 7 исходов, поэтому вероятность $\frac{7}{12}$. Ошибка $\frac{1}{2}$ возникает, когда ученик считает цвета, а не предметы. Два названия цветов не означают два равновероятных результата: шаров каждого цвета может быть разное количество.

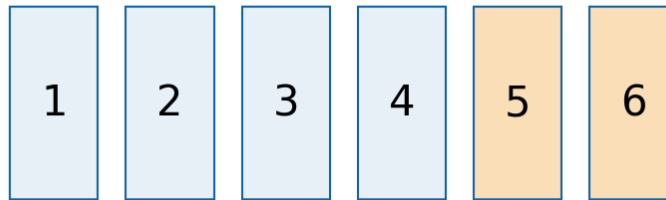
Сначала запишите отношение числа благоприятных исходов к числу всех исходов, затем сократите дробь. Например, 18 выигрышных билетов из 300 дают $18/300 = 3/50 = 0,06$. Если требуется десятичный ответ, переведите дробь после подсчёта.

- Для равновероятных исходов $P(A) = \frac{m}{n}$.
- Числитель и знаменатель считают объекты одного уровня.
- Число категорий не заменяет число объектов.
- Сначала запишите дробь $\frac{m}{n}$, затем сократите или переведите её в десятичную.

Разбор 1. Честный кубик

Условие. Честный шестигранный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпадет число больше 4.

Шесть равновозможных исходов броска кубика



Событие «больше 4»: исходы 5 и 6

Рис. 1: Разбор 1. Честный кубик.

Решение

1. Опишем один случайный опыт и зафиксируем полное множество равновозможных исходов.

2. Всего шесть равновозможных исходов: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. Условию подходят два исхода: 5 и 6.

4. $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Проверка. $\frac{1}{3}$ лежит между 0 и 1; противоположное событие имеет вероятность $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, а сумма равна 1.

Разбор 2. Шары разных цветов

Условие. В непрозрачной коробке лежат 5 белых, 7 синих и 8 зелёных одинаковых шаров. Случайно выбирают один шар. Найдите вероятность выбрать зелёный.

Решение

1. Опишем один случайный опыт и зафиксируем полное множество равновозможных исходов.

2. Всего шаров $5 + 7 + 8 = 20$.

3. Благоприятных зелёных шаров 8.

4. $P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

Проверка. вероятность 0,4 лежит между 0 и 1; вероятность выбрать шар другого цвета равна $\frac{12}{20} = 0,6$, в сумме получаем 1.

06. Противоположное событие

Событие, при котором A не произошло, называют противоположным и обозначают $\text{не-}A$. События A и $\text{не-}A$ вместе охватывают все исходы и не могут произойти одновременно, поэтому $P(A) + P(\text{не-}A) = 1$. Отсюда $P(\text{не-}A) = 1 - P(A)$. Если вероятность выигрышного билета равна 0,08, вероятность не выиграть равна $1 - 0,08 = 0,92$.

Противоположное событие нужно формулировать точно. Противоположным событию «выпало число больше 4» является «выпало число не больше 4», то есть 1, 2, 3, 4. Это не только «меньше 4»: исход 4 тоже должен куда-то войти. Для события «товар бракованный» противоположное - «товар исправный» при условии, что третьего состояния нет. Перед вычитанием из единицы убедитесь, что категории действительно дополняют друг друга до всех вариантов.

Метод особенно удобен, когда в условии дана доля плохих объектов, а спрашивают хорошие, или наоборот. Если из 500 изделий 8 бракованных, можно считать хорошие напрямую: $\frac{492}{500}$,

или через дополнение: $1 - \frac{8}{500} = 0,984$. Второй путь короче и показывает структуру. Однако нельзя вычитать из 100 вместо 1, если вероятность записывается десятичной дробью. Нужно работать в одной форме: 100% - 1,6% либо $1 - 0,016$.

- $P(\text{не-}A) = 1 - P(A)$.
- A и $\text{не-}A$ должны вместе покрывать все исходы без пересечения.
- Отрицание «больше» - «не больше»; отрицание «не меньше» - «меньше».
- Не смешивайте проценты и десятичные дроби в одном вычитании.

Разбор 3. Противоположное событие

Условие. Из 80 лотерейных билетов 14 выигрышных. Покупатель случайно выбирает один билет. Найдите вероятность того, что билет не окажется выигрышным.

Решение

1. Опишем один случайный опыт и зафиксируем полное множество равновозможных исходов.

2. Вероятность выигрыша $P(A) = \frac{14}{80} = 0,175$.

3. Событие «не выиграть» противоположно выигрышу.

4. $P(\text{не-}A) = 1 - 0,175 = 0,825$.

Ответ: 0,825.

Проверка. $0,175 + 0,825 = 1$, поэтому событие и его дополнение учтены полностью.

07. Подсчёт исходов при выборе числа, буквы, даты или карты

Во многих задачах исходы не перечислены в условии, и их нужно посчитать. При случайном выборе целого числа от L до R включительно всего $R - L + 1$ чисел. Единица обязательна, потому что учитываются обе границы. От 10 до 99 включительно $99 - 10 + 1 = 90$ двузначных чисел. Чтобы посчитать кратные k , выписывают первый и последний подходящие числа или используют целые части, но для начального уровня надёжнее короткая упорядоченная запись.

При выборе буквы случайным считается одно из мест в слове, а не одна из различных букв. В слове «МАТЕМАТИКА» десять позиций; буква А встречается три раза, поэтому вероятность выбрать А равна $\frac{3}{10}$. Если одинаковые буквы напечатаны на отдельных одинаковых карточках, каждая карточка - отдельный исход. Считать только набор разных букв было бы неверно, потому что частота повторов влияет на шанс.

При выборе календарного месяца все двенадцать месяцев равновозможны, если это прямо сказано. Тогда событие «месяц содержит 31 день» включает семь месяцев. При выборе случайного дня года дни равновозможны, а месяцы - нет: у них разная длина. Это разные пространства исходов. Точно так же «случайная страница книги» означает равновозможные номера страниц, а не равновозможные последние цифры без проверки границ.

- Количество целых чисел от L до R включительно: $R - L + 1$.
- При выборе буквы считают позиции, включая повторы.
- Сначала назовите, что выбирают: месяц, день, страницу, карточку или число.
- Для карт используйте только состав колоды, заданный в условии.

Разбор 4. Случайное двузначное число

Условие. Случайно выбирают одно целое двузначное число. Найдите вероятность того, что оно кратно 15.

Решение

1. Опишем один случайный опыт и зафиксируем полное множество равновозможных исходов.

2. Двузначные числа идут от 10 до 99; всего $99 - 10 + 1 = 90$ чисел.

3. Двузначные кратные 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90 - шесть чисел.

4. $P = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$

Ответ: $\frac{1}{15}.$

Проверка. среди 90 двузначных чисел шесть подходящих; вероятность $\frac{1}{15}$ положительна и меньше 1.

08. Составное условие внутри одного выбора

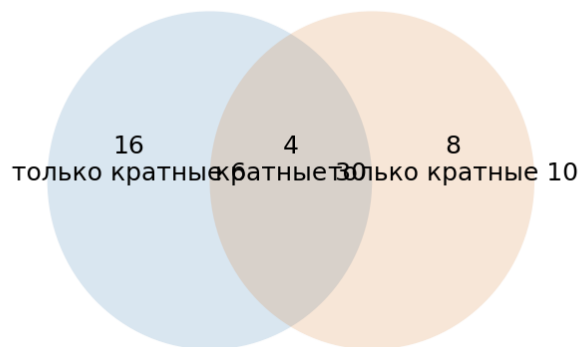
Одно событие может задаваться несколькими признаками: число должно быть двузначным и кратным 15; карта должна быть королём червей; шар должен быть красным или синим. Опыт остаётся одним, потому что выбирается один объект. Задача сводится к точному подсчёту объектов, удовлетворяющих всему условию. Союз «и» обычно требует одновременного выполнения признаков, а союз «или» - попадания хотя бы в одну разрешённую группу.

Если группы не пересекаются, их количества можно сложить. Красные и синие шары - разные предметы, поэтому благоприятных шаров столько, сколько красных плюс синих. Если свойства пересекаются, простое сложение дважды учитывает общую часть. Среди чисел от 1 до 120 кратные 6 или 10: кратных 6 - 20, кратных 10 - 12, но кратные 30 вошли в обе группы. Их 4, поэтому благоприятных $20 + 12 - 4 = 28$.

На начальном уровне полезно выписывать небольшой набор явно. Для двузначных чисел, кратных 15, список 15, 30, 45, 60, 75, 90 даёт шесть благоприятных исходов из 90. Запись одновременно проверяет обе границы и исключает ноль. Если множество велико, используют шаг арифметической прогрессии или деление, но результат стоит проверить первым и последним элементом.

- «И» означает выполнение всех указанных признаков одним исходом.
- Непересекающиеся разрешённые группы можно сложить.
- При пересечении: количество A или $B = |A| + |B| - |A \cap B|.$
- Два названия категорий не дают автоматически вероятности $\frac{1}{2}.$

Кратные 6 или 10 среди чисел от 1 до 120



Всего подходящих чисел: $16 + 4 + 8 = 28$

Рис. 2: Вероятность: один опыт.

09. Относительная частота и оценка вероятности

Иногда вероятность не выводят из симметрии, а оценивают по результатам большого числа наблюдений. Относительная частота события равна числу его наступлений, делённому на общее число опытов. Если из 500 посеянных семян взошло 435, частота всхожести равна $\frac{435}{500} = 0,87$. Это эмпирическая оценка вероятности для похожих условий, а не гарантия результата каждого следующего семени.

Чем больше однородных наблюдений, тем устойчивее обычно оценка. Частота 8 успехов из 10 и 800 из 1000 в обоих случаях равна 0,8, но второй результат надёжнее отражает массовую закономерность. На уровне вычислений формула одна, однако смысл вывода различается. Нельзя объединять опыты, проведённые в существенно разных условиях, не проверив сопоставимость данных.

По оценённой вероятности можно прогнозировать ожидаемое количество событий: $N \cdot p$. Если доля обращений, заканчивающихся покупкой, около 0,18, то среди 1500 похожих обращений ожидают примерно 270 покупок. Это средний ориентир, а не обязательное точное число. Слово «примерно» важно. В задаче на вычисление ответ может быть целым, но реальный результат случайно отклоняется от прогноза.

- Относительная частота = $\frac{\text{число наступлений}}{\text{число наблюдений}}$.
- Ожидаемое число наступлений $\approx Np$.
- Эмпирическая частота - оценка, а не гарантия отдельного исхода.
- Число наступлений не превосходит общего числа наблюдений.

Разбор 5. Оценка по наблюдениям

Условие. Из 500 посеянных семян взошло 435. Оцените вероятность всхожести семени в тех же условиях.

Решение

1. Рассмотрим 500 наблюдений и найдём относительную частоту всходов.

2. Относительная частота всходов равна $\frac{435}{500}$.

3. Делим числитель и знаменатель на 5: $\frac{87}{100} = 0,87$.

4. Это оценка вероятности по данным наблюдения, а не гарантия отдельного результата.

Ответ: Примерно 0,87.

Проверка. 0,87 - доля между 0 и 1; обратное вычисление $0,87 \cdot 500 = 435$ возвращает число наблюдавшихся всходов.

10. Алгоритм задания ЕГЭ и система проверки

Шаг 1 - подчеркнуть, что именно выбирают случайно. Шаг 2 - убедиться, что исходы равновозможны, либо понять, что дана статистическая частота. Шаг 3 - посчитать все исходы n с учётом обеих границ и повторяющихся предметов. Шаг 4 - точно сформулировать событие и посчитать m . Шаг 5 - записать $P = \frac{m}{n}$, сократить и привести к нужному виду. Если удобнее противоположное событие, сначала назвать его, а потом вычесть из 1.

После вычисления выполняют три проверки. Диапазон: ответ от 0 до 1. Смысл: редкое событие не должно неожиданно получить вероятность около 0,9. Счёт: m не больше n . Для десятичной дроби полезно оценить процент. Например, $\frac{3}{50}$ - это 6%, значит 0,06, а не 0,6. Одна позиция запятой меняет вероятность в десять раз и часто остаётся незамеченной без процентной оценки.

Типичные ошибки удобно связывать с коррекцией. Знаменатель равен числу категорий - вернитесь к отдельным предметам. Потеря границы - выпишите первое и последнее число. Неверное отрицание - добавьте слово «не» ко всему событию и проверьте, что исходы разделились без пропусков. Смешение процентов и дробей - переведите всё в одну форму. Сокращение до подсчёта - сначала подпишите m и n .

- Что выбирают $\rightarrow$ сколько всего $\rightarrow$ какие подходят $\rightarrow \frac{m}{n} \rightarrow$ проверка.
- Если событие проще описать через «не», используйте $1 - P(A)$.
- Проверьте границы, повторы и равновозможность до деления.
- Финальный ответ: число от 0 до 1 в формате, требуемом условием.

11. Типичные ошибки и способы их остановить

- Считают исходы равновозможными без проверки устройства опыта.
- Записывают в знаменатель число благоприятных исходов.
- Складывают пересекающиеся группы и дважды учитывают общий исход.
- Для события «не произойдёт» повторно пересчитывают случаи вместо $1 - P(A)$.

- Путают теоретическую вероятность с относительной частотой наблюдений.
- Не проверяют, что ответ лежит между 0 и 1 и дробь сокращена.

12. Дополнительные разборы

Разбор 6. Равновероятная позиция в жеребьёвке

УСЛОВИЕ

На чемпионате выступают 20 спортсменов, среди них 7 из Германии. Порядок определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым выступит спортсмен из Германии.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Каждая позиция жеребьёвки равновероятно достаётся любому из 20 спортсменов.

ДО РЕШЕНИЯ.

Номер позиции не меняет долю спортсменов нужной страны.

1. Считаем все исходы

$$n = 20$$

На двенадцатой позиции может оказаться любой спортсмен.

2. Считаем благоприятные исходы

$$m = 7$$

Подходят семь спортсменов из Германии.

3. Вычисляем вероятность

$$P = \frac{7}{20} = 0,35$$

Используем классическую формулу m/n .

Проверка. Вероятность совпадает с долей немецких спортсменов 35% и лежит между 0 и 1.

Типичная ошибка. Делить 7 на номер позиции 12: двенадцать - не число возможных исходов.

ОТВЕТ.

$$0,35$$

Разбор 7. Ровно четыре как разность вложенных событий**УСЛОВИЕ**

Вероятность решить больше четырёх задач равна 0,73, а больше трёх - 0,86. Найдите вероятность решить ровно четыре задачи.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Событие «больше трёх» распадается на несовместные события «ровно четыре» и «больше четырёх».

ДО РЕШЕНИЯ.

0,86 больше 0,73, поэтому искомая разность будет неотрицательной.

1. Обозначаем события

$$A = \{N > 3\}, \quad B = \{N > 4\}$$

Событие В является частью события А.

2. Выделяем ровно четыре

$$\{N = 4\} = A \setminus B$$

Из всех результатов больше трёх удаляем результаты больше четырёх.

3. Вычитаем вероятности

$$P(N = 4) = 0,86 - 0,73 = 0,13$$

Вложенные события не перекрывают оставшуюся часть.

Проверка. $0,73 + 0,13 = 0,86$ - исходная вероятность события «больше трёх» восстановлена.

Типичная ошибка. Сложить 0,73 и 0,86, хотя одно событие уже содержится в другом.

ОТВЕТ.

0,13

Разбор 8. Сумма вероятностей несовместных тем**УСЛОВИЕ**

Вероятность вопроса по теме «Вписанная окружность» равна 0,2, по теме «Тригонометрия» - 0,12. Вопросов, относящихся сразу к обеим темам, нет. Найдите вероятность получить вопрос по одной из тем.

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО.

Для несовместных событий вероятность объединения равна сумме вероятностей.

ДО РЕШЕНИЯ.

Фраза «одновременно нет» означает, что пересечение событий пусто.

1. Обозначаем события

$$A \cap B = \emptyset$$

Один вопрос не относится сразу к двум названным темам.

2. Применяем правило сложения

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Попадание в обе категории невозможно.

3. Подставляем

$$0,2 + 0,12 = 0,32$$

Складываем доли двух непересекающихся групп вопросов.

Проверка. Искомая вероятность больше каждой отдельной и меньше 1.

Типичная ошибка. Умножить вероятности: умножение отвечает одновременному наступлению независимых событий.

ОТВЕТ.

$$0,32$$

13. Вопрос по теме

Почему частота может отличаться от вероятности?

Частота описывает конкретную серию наблюдений. Из-за случайности она может отклоняться от теоретической вероятности. Чем больше наблюдений, тем надёжнее оценка при неизменной модели опыта.

14. Самостоятельная работа

В тесте 40 заданий. Начните с заданий 1-20, затем переходите к 21-35 и 36-40. Решите самостоятельно и только после этого откройте объяснение. Задания на повторение отмечены отдельно.

Перейти к тестовым заданиям урока 17

Предыдущий урок: Прогрессии как инструмент.