



Урок 16. Ответы и решения

Условия, ответы и пошаговые решения всех 40 заданий.

01. Начальный уровень: задания 1-20

Задание 1

Продолжите арифметическую прогрессию 4, 7, 10, ... ещё на три члена.

1. Разность соседних членов: $7 - 4 = 3$ и $10 - 7 = 3$.

2. Трижды прибавляем 3: 13, 16, 19.

Ответ: 13; 16; 19.

Задание 2

Является ли последовательность 18, 12, 6, 0, -6 арифметической? Если да, укажите разность.

1. Вычисляем соседние разности: $12 - 18 = -6$, $6 - 12 = -6$, $0 - 6 = -6$, $-6 - 0 = -6$.

2. Все разности одинаковы, значит это арифметическая прогрессия с $d = -6$.

Ответ: Да, $d = -6$.

Задание 3

В арифметической прогрессии $a_1 = 5$, $d = 4$. Найдите a_8 .

1. Используем $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

2. $a_8 = 5 + 4 \cdot 7 = 33$.

Ответ: 33.

Задание 4

В арифметической прогрессии $a_1 = 31$, $d = -3$. Найдите a_{11} .

1. До одиннадцатого члена 10 переходов.

2. $a_{11} = 31 + (-3) \cdot 10 = 1$.

Ответ: 1.

Задание 5

В арифметической прогрессии $a_4 = 17$, $d = 5$. Найдите a_1 .

1. $a_4 = a_1 + 3d$.

2. $17 = a_1 + 15$, поэтому $a_1 = 2$.

Ответ: 2.

Задание 6

Между числами 14 и 30 вставьте одно число так, чтобы три числа образовали арифметическую прогрессию.

1. Средний член арифметической прогрессии равен полусумме соседних.

2. $\frac{(14 + 30)}{2} = 22$.

Ответ: 22.

Задание 7

Для арифметической прогрессии $a_1 = 9$, $d = 6$ определите номер члена, равного 81.

1. Составляем $9 + 6(n - 1) = 81$.

2. $6(n - 1) = 72$, $n - 1 = 12$, $n = 13$.

Ответ: 13.

Задание 8

Найдите сумму первых 10 членов арифметической прогрессии 3, 7, 11, ...

1. $a_1 = 3$, $d = 4$, $n = 10$.

2. $a_{10} = 3 + 9 \cdot 4 = 39$.

3. $S_{10} = \frac{10(3 + 39)}{2} = 210$.

Ответ: 210.

Задание 9

Найдите сумму всех целых чисел от 12 до 40 включительно.

1. Числа образуют арифметическую прогрессию с $d = 1$.

2. Количество членов: $40 - 12 + 1 = 29$.

3. $S = \frac{29(12 + 40)}{2} = 29 \cdot 26 = 754$.

Ответ: 754.

Задание 10**Повторение: работа, движение, формулы и экстремумы.**

Первая труба наполняет бассейн за 8 часов, вторая - за 24 часа. За сколько часов они наполнят бассейн вместе?

1. Производительности равны $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{24}$ бассейна в час.

2. Общая производительность: $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

3. Время совместной работы равно $1 : \frac{1}{6} = 6$ часов.

Ответ: 6 часов.

Задание 11

Продолжите геометрическую прогрессию 2, 6, 18, ... ещё на три члена.

1. Знаменатель $q = \frac{6}{2} = 3$ и $\frac{18}{6} = 3$.

2. Умножаем на 3: 54, 162, 486.

Ответ: 54; 162; 486.

Задание 12

В геометрической прогрессии $b_1 = 7$, $q = 2$. Найдите b_6 .

1. $b_6 = b_1 q^5$.

2. $b_6 = 7 \cdot 2^5 = 7 \cdot 32 = 224$.

Ответ: 224.

Задание 13

В геометрической прогрессии $b_1 = 243$, $q = \frac{1}{3}$. Найдите b_5 .

1. До пятого члена четыре умножения на $\frac{1}{3}$.

2. $b_5 = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{243}{81} = 3$.

Ответ: 3.

Задание 14

В положительной геометрической прогрессии $b_1 = 5$, $b_3 = 45$. Найдите q .

1. $b_3 = b_1 q^2$, поэтому $45 = 5q^2$.

2. $q^2 = 9$. Прогрессия положительная, значит $q = 3$.

Ответ: 3.

Задание 15

В геометрической прогрессии $b_4 = 54$, $q = 3$. Найдите b_1 .

1. $b_4 = b_1 q^3$.

2. $54 = 27b_1$, поэтому $b_1 = 2$.

Ответ: 2.

Задание 16

В геометрической прогрессии $b_1 = 4$, $q = 2$ определите номер члена, равного 256.

1. Составляем $4 \cdot 2^{n-1} = 256$.

2. $2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^8$, поэтому $n + 1 = 8$ и $n = 7$.

Ответ: 7.

Задание 17

Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии с $b_1 = 3$ и $q = 2$.

1. Используем $S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{(q - 1)}$.

2. $S_5 = \frac{3(32 - 1)}{(2 - 1)} = 93$.

Ответ: 93.

Задание 18

Найдите сумму $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$.

1. Это семь членов геометрической прогрессии: $b_1 = 1$, $q = 2$.

2. $S_7 = \frac{(2^7 - 1)}{(2 - 1)} = 128 - 1 = 127$.

Ответ: 127.

Задание 19**Повторение: работа, движение, формулы и экстремумы.**

Два города находятся на расстоянии 420 км. Автомобиль проехал это расстояние со скоростью 70 км/ч. Сколько часов заняла поездка?

1. Для равномерного движения $t = \frac{S}{v}$.

2. $t = \frac{420}{70} = 6$ часов.

Ответ: 6 часов.

Задание 20

В первом ряду театра 18 мест, а в каждом следующем на 2 места больше. Сколько мест в 16-м ряду?

1. Число мест образует арифметическую прогрессию: $a_1 = 18, d = 2$.

2. $a_{16} = 18 + 15 \cdot 2 = 48$.

Ответ: 48 мест.

02. Средний уровень: задания 21-35**Задание 21**

Спортсмен в первый день пробежал 6 км, а каждый следующий день увеличивал дистанцию на 0,5 км. Сколько километров он пробежал за 12 дней?

1. Дневные дистанции образуют арифметическую прогрессию: $a_1 = 6, d = 0,5, n = 12$.

2. $a_{12} = 6 + 11 \cdot 0,5 = 11,5$.

3. $S_{12} = \frac{12(6 + 11,5)}{2} = 6 \cdot 17,5 = 105$.

Ответ: 105 км.

Задание 22

На нижней ступени декоративной лестницы 40 плиток. На каждой следующей ступени на 3 плитки меньше. Сколько плиток на 9-й ступени?

1. $a_1 = 40, d = -3, n = 9$.

2. $a_9 = 40 + 8 \cdot (-3) = 16$.

Ответ: 16 плиток.

Задание 23

Рабочий изготовил в первый день 24 детали, а затем ежедневно делал на 4 детали больше. За сколько первых дней он изготовил 252 детали?

1. $S_n = \frac{n(2 \cdot 24 + 4(n-1))}{2} = 252.$

2. $\frac{n(48 + 4n - 4)}{2} = 252$, то есть $2n^2 + 22n - 252 = 0.$

3. Делим на 2: $n^2 + 11n - 126 = 0$; $(n-7)(n+18) = 0.$

4. Подходит натуральный корень $n = 7.$

5. седьмой член равен 48, а $S_7 = \frac{7(24 + 48)}{2} = 252.$

Ответ: 7 дней.

Задание 24

Найдите сумму всех положительных двузначных чисел, кратных 6.

1. Первое двузначное кратное 6 равно 12, последнее - 96; $d = 6.$

2. Количество членов $n = \frac{(96 - 12)}{6} + 1 = 15.$

3. $S_{15} = \frac{15(12 + 96)}{2} = 15 \cdot 54 = 810.$

Ответ: 810.

Задание 25

В арифметической прогрессии $a_4 = 13$, $a_{11} = 41$. Найдите a_{20} .

1. $a_{11} - a_4 = (11 - 4)d$: $41 - 13 = 7d$, поэтому $d = 4.$

2. $a_{20} = a_{11} + 9d = 41 + 36 = 77.$

Ответ: 77.

Задание 26

Сумма первых 20 членов арифметической прогрессии равна 710, а первый член равен 7. Найдите разность d .

1. $S_{20} = \frac{20(2 \cdot 7 + 19d)}{2} = 710.$

2. $10(14 + 19d) = 710$, поэтому $14 + 19d = 71.$

3. $19d = 57$, $d = 3.$

Ответ: 3.

Задание 27

Три числа образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 33, а произведение первого и третьего равно 85. Найдите эти числа, если они возрастают.

1. Запишем числа $11 - d$, 11 , $11 + d$, поскольку средний член равен $\frac{33}{3} = 11$.

2. $(11 - d)(11 + d) = 85$, то есть $121 - d^2 = 85$.

3. $d^2 = 36$. Для возрастающей прогрессии $d = 6$.

4. Числа: 5, 11, 17.

Ответ: 5; 11; 17.

Задание 28

Между числами 8 и 32 вставьте пять чисел так, чтобы вместе они образовали арифметическую прогрессию.

1. Всего будет 7 членов, значит от 8 до 32 - 6 равных переходов.

2. $d = \frac{(32 - 8)}{6} = 4$.

3. Последовательно прибавляем 4: 12, 16, 20, 24, 28.

Ответ: 12; 16; 20; 24; 28.

Задание 29

Повторение: работа, движение, формулы и экстремумы.

Цена товара вычисляется по формуле $C = 1,2p + 350$, где p - закупочная цена в рублях. Найдите p , если $C = 2750$ рублей.

1. Подставляем $C = 2750$: $1,2p + 350 = 2750$.

2. $1,2p = 2400$, поэтому $p = 2000$.

Ответ: 2000 рублей.

Задание 30

В начале опыта было 80 бактерий. Каждые 20 минут их число удваивалось. Сколько бактерий стало через 2 часа?

1. 2 часа = 120 минут, это $\frac{120}{20} = 6$ периодов.

2. После шести удвоений: $80 \cdot 2^6 = 80 \cdot 64 = 5120$.

Ответ: 5120 бактерий.

Задание 31

Стоимость оборудования ежегодно уменьшается на 10%. Первоначально оно стоило 200 000 рублей. Какова стоимость через 3 года?

1. После уменьшения на 10% остаётся 90%, поэтому $q = 0,9$.

2. Через три изменения стоимость равна $200000 \cdot 0,9^3$.

3. $0,9^3 = 0,729$; $200000 \cdot 0,729 = 145800$.

Ответ: 145 800 рублей.

Задание 32

В первый день участник получил 2 балла, а каждый следующий день - в 3 раза больше, чем в предыдущий. Сколько баллов он получил всего за 6 дней?

1. Баллы образуют геометрическую прогрессию: $b_1 = 2$, $q = 3$, $n = 6$.

2. $S_6 = \frac{2(3^6 - 1)}{(3 - 1)} = 3^6 - 1$.

3. $3^6 = 729$, поэтому $S_6 = 728$.

Ответ: 728 баллов.

Задание 33

В положительной геометрической прогрессии $b_2 = 12$, $b_5 = 324$. Найдите b_7 .

1. $\frac{b_5}{b_2} = q^3 = \frac{324}{12} = 27$, поэтому $q = 3$.

2. От b_5 до b_7 два перехода: $b_7 = 324 \cdot 3^2 = 2916$.

Ответ: 2916.

Задание 34

В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = 3$. Какой член равен 486?

1. $2 \cdot 3^{n-1} = 486$, поэтому $3^{n-1} = 243$.

2. $243 = 3^5$, значит $n - 1 = 5$ и $n = 6$.

Ответ: Шестой член.

Задание 35

Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 96$, $q = \frac{1}{2}$.

1. $S_6 = \frac{96 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right)}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)}$.

2. $\left(\frac{1}{2} \right)^6 = \frac{1}{64}$, поэтому $S_6 = 96 \cdot \left(\frac{63}{64} \right) \cdot 2$.

3. $\frac{96}{64} = \frac{3}{2}; S_6 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 63 \cdot 2 = 189.$

Ответ: 189.

03. Повышенный уровень: задания 36-40

Задание 36

Оплата за первый этап проекта составляет 1000 рублей, а за каждый следующий этап вдвое больше. Какова общая оплата за 8 этапов?

1. Выплаты образуют геометрическую прогрессию: $b_1 = 1000, q = 2, n = 8.$

2. $S_8 = \frac{1000(2^8 - 1)}{(2 - 1)} = 1000(256 - 1).$

3. $S_8 = 255000$ рублей.

Ответ: 255 000 рублей.

Задание 37

Три положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Их произведение равно 1000, а первое число равно 5. Найдите остальные числа, если прогрессия возрастает.

1. Пусть числа 5, $5q$, $5q^2$.

2. Их произведение $125q^3 = 1000$, поэтому $q^3 = 8$ и $q = 2$.

3. Второе число $5 \cdot 2 = 10$, третье $5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 10; 20.

Задание 38

Вклад 50 000 рублей увеличивается на 8% в год. Какая сумма будет на счёте через 2 года, если дополнительных операций нет?

1. Годовой множитель $q = 1 + 0,08 = 1,08$.

2. Через два года: $50000 \cdot 1,08^2 = 50000 \cdot 1,1664$.

3. Получаем 58320 рублей.

Ответ: 58 320 рублей.

Задание 39

Повторение: работа, движение, формулы и экстремумы.

Задание 39. Знак производной

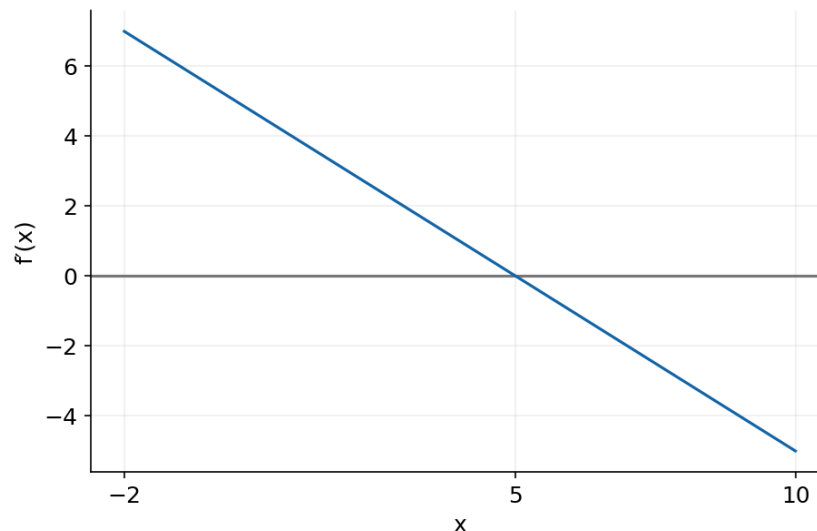


Рис. 1: Схема к условию.

Функция f непрерывна на отрезке $[-2; 10]$ и дифференцируема внутри него. Функция f определена на отрезке $[-2; 10]$. На рисунке графика производной $f'(x)$ производная положительна на интервале $(-2; 5)$ и отрицательна на интервале $(5; 10)$. В какой точке функция f принимает наибольшее значение?

1. На $(-2; 5)$ функция возрастает, потому что $f'(x) > 0$.
2. На $(5; 10)$ функция убывает, потому что $f'(x) < 0$.
3. Функция возрастает до $x = 5$ и убывает после этой точки, поэтому на отрезке $[-2; 10]$ наибольшее значение принимается при $x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

Задание 40

Компания выпускает в первый месяц 120 изделий и каждый месяц увеличивает выпуск на 15 изделий. Другая линия в первый месяц выпускает 5 изделий и ежемесячно удваивает выпуск. Найдите выпуск каждой линии в 6-й месяц и определите, у какой он больше.

1. Первая линия: арифметическая прогрессия $a_1 = 120, d = 15; a_6 = 120 + 5 \cdot 15 = 195$.
2. Вторая линия: геометрическая прогрессия $b_1 = 5, q = 2; b_6 = 5 \cdot 2^5 = 160$.
3. Сравниваем 195 и 160: в шестой месяц первая линия выпускает на 35 изделий больше.

Ответ: 195 изделий и 160 изделий; больше у первой линии на 35 изделий.