



Работа, смеси и концентрации

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Модель: что складывается и что сохраняется	2
02. Производительность и выбор единицы работы	2
03. Совместная работа: вывод и обратная задача	2
04. Смена этапов и запоздалый старт	3
05. Трубы, слив и физические ограничения	3
06. План и факт, парные производительности, очередность	4
07. Массовая доля и баланс смеси	4
08. Диапазон концентраций и правило отношения масс	5
09. Вода, чистое вещество и испарение	5
10. Удаление однородной смеси и повторные замены	6
11. Замена другим раствором и порядок действий	6
12. Составные смеси и допустимость технологических этапов	6
13. Параметр: диапазон значений и число допустимых корней	7
14. Оптимизация состава и распределения замен	7
15. Как проверять решение и где чаще ошибаются	8

01. Модель: что складывается и что сохраняется

В задачах на работу складываются выполненные объёмы, а в задачах на смеси сохраняются общая масса и масса каждого вещества. Обе темы требуют сначала назвать физическую величину и единицу измерения, затем записать баланс. Проценты и времена сами по себе не являются сохраняющимися величинами.

Для работы фиксируем один и тот же заказ; для смеси - одно и то же растворённое вещество. Предполагаем отсутствие реакции и потерь, если они не указаны. Производительности считаем постоянными только там, где это дано. Перемешивание делает концентрацию одинаковой во всех частях смеси.

В этом уроке проценты растворов означают **массовые доли**, поэтому массы задаются в килограммах. Литры можно использовать для объёмных долей лишь при явно принятой модели сложения объёмов; подменять массовую долю объёмной без плотностей нельзя. Задачи 17-20 повторяют движение, экстремумы, логарифмы и тригонометрию; остальные относятся к работе и смесям.

02. Производительность и выбор единицы работы

Если за время $t > 0$ выполнен объём A , постоянная производительность $p = \frac{A}{t}$, а $A = pt$. Единицы согласованы: детали в час, кубометры в минуту или доли заказа в час. Если весь заказ принимаем за 1 и исполнитель выполняет его за $T > 0$, то $p = \frac{1}{T}$. Число T - время всей работы, а t может быть временем одного этапа.

Пример. Станок изготавливает 150 деталей за 5 ч. Его скорость 30 деталей/ч. За 2 ч он изготовит 60 деталей, то есть $\frac{2}{5}$ такого заказа. Если другой заказ содержит 300 деталей, за те же 2 ч выполнена уже $\frac{1}{5}$ нового заказа. Нельзя складывать доли, относящиеся к разным полным объёмам.

Когда один мастер работает в $k > 0$ раз быстрее другого, его производительность в k раз больше, а время одинаковой работы в k раз меньше. Это обратная, а не прямая пропорциональность.

03. Совместная работа: вывод и обратная задача

Если исполнители не мешают друг другу, за одно время t они выполняют $p_1t + p_2t = (p_1 + p_2)t$. Поэтому скорости складываются. При самостоятельных временах $T_1, T_2 > 0$ имеем

$$t \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) = 1, \quad t = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}.$$

Знаменатель больше каждого из слагаемых, поэтому совместное время меньше каждого самостоятельного. Среднее арифметическое времён здесь неприменимо.

Пример. Самостоятельные времена 8 и 12 ч. Общая скорость $\frac{5}{24}$, время $\frac{24}{5} = 4,8$ ч. Доли работников $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$.

В обратной задаче $p_2 = \frac{1}{t} - \frac{1}{T_1}$, а $T_2 = \frac{1}{p_2}$ лишь при $p_2 > 0$. Если вместе работают 5 ч, первый отдельно 15 ч, то $p_2 = \frac{2}{15}$ и $T_2 = \frac{15}{2}$ ч. Нулевая или отрицательная найденная скорость не описывает второго положительно работающего исполнителя.

04. Смена этапов и запоздалый старт

При смене состава исполнителей разбиваем время на этапы. Сумма выполненных долей должна равняться 1:

$$p_1 t_1 + (p_1 + p_2) t_2 = 1.$$

Время второго этапа - не полное время. Дополнительно проверяем, что заказ не завершён раньше переключения.

Пример. Первый выполняет заказ за 10 ч, второй за 15 ч. Вместе они работали 3 ч, затем первый ушёл. Совместная скорость $\frac{1}{6}$, выполнена половина. Второй делает остаток за $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{15}} = 7,5$ ч. Полное время 10,5 ч. Проверка: $3 \cdot \frac{1}{6} + 7,5 \cdot \frac{1}{15} = 1$.

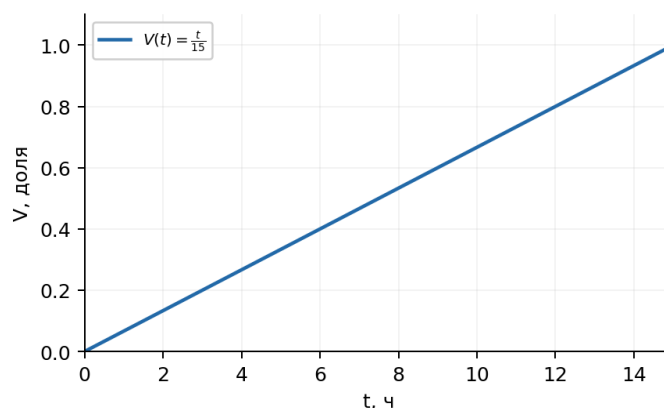
Если второй должен прийти спустя a часов, сравните a с самостоятельным временем первого. При слишком позднем приходе работа уже готова и формула совместного этапа неприменима: она дала бы отрицательный остаток. Из такого сравнения возникает кусочная функция времени.

05. Трубы, слив и физические ограничения

Приток записывают со знаком плюс, отток со знаком минус. При постоянных расходах $p_{\text{чист}} = p_{\text{впуск}} - p_{\text{слив}}$. Если этот результат положителен, время заполнения пустого бассейна равно $\frac{1}{p_{\text{чист}}}$. Если он нулевой, уровень не увеличивается; если отрицательный, пустой бассейн не наполнится в этой модели. Отрицательное время не является ответом.

Пример. Впуск наполняет за 6 ч, слив опорожняет за 10 ч. Чистая скорость $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$: требуется 15 ч. Приток за это время 2,5 бассейна, отток 1,5.

Если уровень достиг дна или верхней границы, нельзя механически продолжать линейную формулу за допустимый диапазон. В задачах со сменой труб проверяют накопленный объём в каждом моменте переключения. Реальный расход отверстия может зависеть от уровня воды; постоянный слив здесь является специально заданным упрощением.



Пример теории: впуск за 6 ч, слив за 10 ч; совместное наполнение за 15 ч.

06. План и факт, парные производительности, очередность

Для одного заказа плановый и фактический объёмы равны: $p_{\text{пл}}t_{\text{пл}} = p_{\text{ф}}t_{\text{ф}}$. Если заказ A и увеличение скорости $d > 0$ дают экономию времени τ , модель имеет вид $\frac{A}{p} - \frac{A}{p+d} = \tau$ при $p > 0$. Умножать на знаменатели можно лишь после фиксации ОДЗ.

Пример. Для 240 деталей повышение нормы с p до $p+4$ сокращает срок на 2 дня. Получаем $p(p+4) = 480$, корни 20 и -24 ; подходит 20 деталей/день. Времена 12 и 10 дней.

Если известны скорости трёх пар $u = p_1 + p_2$, $v = p_2 + p_3$, $w = p_1 + p_3$, то

$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{u+v+w}{2}$. Восстанавливаем $p_1 = \frac{u+w-v}{2}$ и аналогично остальные. Для трёх работающих исполнителей все три выражения должны быть положительными.

При чередовании сначала считаем полные циклы, затем последний незавершённый цикл. **Пример:** времена 6 и 12 ч, смены по часу. За цикл выполнена четверть заказа, четыре цикла дают весь заказ за 8 ч. Если заказ закончится внутри смены, лишний остаток часа добавлять нельзя.

07. Массовая доля и баланс смеси

Массовая доля $c = \frac{m_{\text{вещества}}}{m_{\text{смеси}}}$ принадлежит $[0; 1]$. Запись 25% означает $c = 0,25 = \frac{1}{4}$.

Масса вещества равна cm , масса растворителя $(1-c)m$.

При смешивании без потерь общая масса $m_1 + m_2$, масса вещества $c_1m_1 + c_2m_2$. Поэтому

$$c = \frac{c_1m_1 + c_2m_2}{m_1 + m_2}, \quad m_1 + m_2 > 0.$$

Пример. 8 кг 20%-го и 12 кг 45%-го растворов содержат 1,6 и 5,4 кг вещества. В 20 кг смеси содержится 7 кг вещества, доля 35%. Среднее исходных процентов равно итоговой концентрации при равных массах или концентрациях.

Для сплавов действует тот же баланс массы выбранного металла. Если вещество теряется при переработке, сначала определяют массу содержащегося вещества, затем умножают её на долю извлечения. Например, из 80 кг руды с 25% металла при извлечении 90% получают $80 \cdot 0,25 \cdot 0,9 = 18$ кг, а не 72 кг.

08. Диапазон концентраций и правило отношения масс

Пусть $c_1 < c_2$ и обе массы положительны. Тогда

$$c - c_1 = \frac{(c_2 - c_1)m_2}{m_1 + m_2} > 0, \quad c_2 - c = \frac{(c_2 - c_1)m_1}{m_1 + m_2} > 0.$$

Значит, итоговая доля строго между исходными. При разрешённой нулевой массе одного компонента допускаются концы. Недостижимую долю вне этого диапазона нельзя получить обычным смешиванием.

Деля равенства, выводим, а не заучиваем «правило креста»:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{c_2 - c}{c - c_1}.$$

Пример. Для смеси 20%-го и 50%-го растворов с целевой долей 30% отношение масс $\frac{50 - 30}{30 - 20} = 2$. В 45 кг итоговой смеси нужно 30 кг первого и 15 кг второго.

Вещества $6 + 7,5 = 13,5$ кг, то есть 30%. Если $c = c_1$, формула отношения имеет нулевой знаменатель: отдельно рассматриваем отсутствие второго компонента.

09. Вода, чистое вещество и испарение

При добавлении $x \geq 0$ кг воды к m кг раствора масса вещества cm сохраняется, доля становится $\frac{cm}{m+x}$. При добавлении чистого вещества меняются и числитель, и знаменатель: $\frac{cm+x}{m+x}$. При испарении только воды доля равна $\frac{cm}{m-x}$, причём $0 \leq x \leq (1-c)m$ и $m-x > 0$.

Пример с водой. В 15 кг 40%-го раствора 6 кг вещества. Чтобы получить 25%, нужна общая масса $\frac{6}{0,25} = 24$ кг, значит добавляем 9 кг воды.

Пример с чистым веществом. К 12 кг 25%-го раствора добавляют x кг вещества до 40%: $3 + x = 0,4(12 + x)$, откуда $x = 3$ кг. Проверка: 6 кг вещества в 15 кг смеси.

Пример с сушкой. В 50 кг продукта 24% сухого вещества. После сушки сухая доля 30%, поэтому конечная масса $\frac{12}{0,3} = 40$ кг; испарилось 10 кг воды. Сохраняется сухой остаток, а не процент влажности.

10. Удаление однородной смеси и повторные замены

В удаляемой части однородного раствора та же доля вещества, что во всём сосуде. Если удаляют долю r общей массы, остаётся доля $1 - r$ каждого компонента.

Неполное удаление сохраняет долю; добавка воды снижает ненулевую долю.

Пусть после каждой операции масса восстановлена до M , удаляют x кг и добавляют x кг воды. При $0 \leq x \leq M$:

$$c_{n+1} = c_n \left(1 - \frac{x}{M}\right), \quad c_n = c_0 \left(1 - \frac{x}{M}\right)^n.$$

Вторая формула следует последовательным применением первой. **Пример:** при

$M = 80$, $c_0 = \frac{1}{4}$, $x = 20$ после двух операций доля $\frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$, то есть 14,0625%.

При $0 < x < M$ и положительной начальной доле концентрации положительны и строго убывают; при нулевой начальной доле все они нулевые. Для строгого порога проверяют два соседних целых числа операций. При $x = 0$ доля прежняя; при $x = M$ одна замена удаляет всё вещество.

11. Замена другим раствором и порядок действий

Если вместо воды добавляют раствор доли d , то после удаления $x = rM$ кг и восстановления массы

$$c_{\text{нов}} = c(1 - r) + dr.$$

Это взвешенное среднее старой доли и доли добавки. При двух последовательных операциях второй раз нужно использовать уже изменённую долю. Нельзя дважды вычитать вещество по исходной концентрации.

Пример. В 40 кг 20%-го раствора сначала заменяют 10 кг водой, затем после перемешивания 10 кг 60%-м раствором. Доли по шагам $0,2 \cdot 0,75 = 0,15$ и $0,15 \cdot 0,75 + 0,6 \cdot 0,25 = 0,2625$. Итог 26,25%. Если поменять добавки местами, получим $(0,2 \cdot 0,75 + 0,6 \cdot 0,25) \cdot 0,75 = 0,225$: часть добавленного вещества удаляется на втором шаге.

При переливаниях между сосудами ведём для каждого две величины: общую массу и массу вещества. Суммарная масса вещества сохраняется, но концентрации отдельных сосудов обычно меняются.

12. Составные смеси и допустимость технологических этапов

Если смешивание сопровождается испарением, сначала записывают массу вещества и общую массу после смешивания, затем отдельно учитывают испарение. Вода должна иметься в достаточном количестве.

Пример. К 30 кг 20%-го раствора добавляют $x \geq 0$ кг 50%-го, затем испаряют 10 кг воды. Вещества $6 + 0,5x$ кг, итоговая масса $20 + x$ кг. Для 40%-й доли получаем $6 + 0,5x = 0,4(20 + x)$, откуда $x = 20$. До испарения воды $24 + 0,5x = 34$ кг, поэтому удаление 10 кг допустимо. После него вещества 16 кг, смеси 40 кг: доля 40%.

Если испаряется доля r **всей исходной смеси**, итоговая масса $(1-r)(m+x)$. Это не то же самое, что испарить долю r только содержащейся воды. Уточнение базы процента - часть составления модели, а не техническая мелочь.

13. Параметр: диапазон значений и число допустимых корней

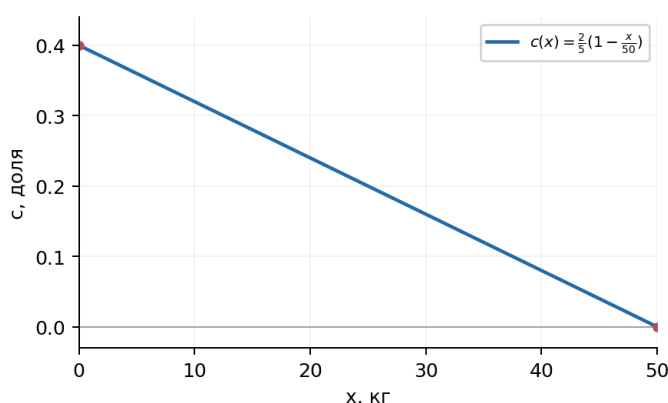
Параметр часто задаёт целевую концентрацию или срок. Исследуем функцию только на физически допустимом отрезке. Корни алгебраического уравнения вне него отбрасываем.

Разобранная модель. За одну замену в 50 кг 40%-го раствора удаляют x кг смеси и добавляют столько же воды. Целевая доля a . При $0 \leq x \leq 50$ функция

$c(x) = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{x}{50}\right)$ строго убывает от $\frac{2}{5}$ до 0. Поэтому ровно одно решение $x = 50 - 125a$

существует при $0 \leq a \leq \frac{2}{5}$; иначе решений нет. Границы соответствуют полной замене и отсутствию замены.

При двух разных добавках возникает квадратная функция. Для $q(r) = \alpha(r - r_0)^2 + q_0$ сначала находят положение вершины относительно допустимого отрезка, затем значения на обоих концах. Разные уровни концов могут давать сначала два допустимых корня, затем один. Одного условия $D \geq 0$ недостаточно: дискриминант не проверяет технологические ограничения.



Одна замена водой: доля убывает от 40% до 0 при x от 0 до 50 кг.

14. Оптимизация состава и распределения замен

Три неизвестные массы и два баланса обычно оставляют одну свободную переменную. После выражения остальных масс условия неотрицательности и запасы превращаются в отрезок. Если стоимость на нём линейна, её минимум достигается на соответствующем конце; это доказывает глобальность результата.

Пример. 100 кг 40%-й смеси получают из 10%-, 30%- и 70%-го растворов ценой 20, 30, 60 рублей/кг без ограничения запасов. При массе первого x баланс даёт

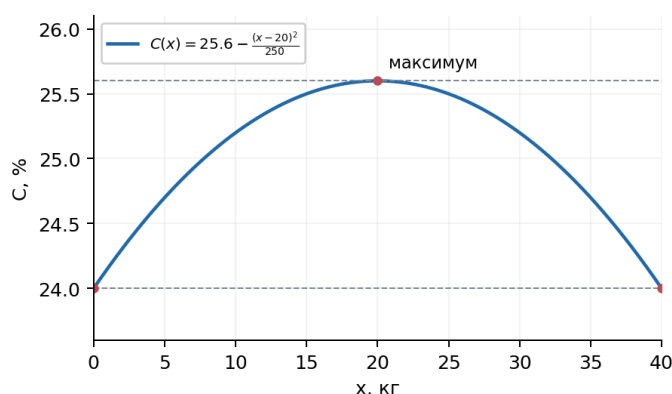
$z = 25 + \frac{x}{2}$, $y = 75 - \frac{3x}{2}$, $0 \leq x \leq 50$. Стоимость $3750 + 5x$, минимум 3750 рублей при

$x = 0, y = 75, z = 25$. Дополнительное ограничение запаса может сдвинуть допустимый конец, но не отменяет балансов.

При двух заменах водой с общей массой $s \leq M$ остаётся множитель

$$\left(1 - \frac{x}{M}\right) \left(1 - \frac{s-x}{M}\right) = 1 - \frac{s}{M} + \frac{x(s-x)}{M^2}, \quad 0 \leq x \leq s.$$

Произведение $x(s-x) = \frac{s^2}{4} - \left(x - \frac{s}{2}\right)^2$ наибольшее при равных заменах и наименьшее на концах. Значит, равные замены сохраняют больше вещества; одна большая замена удаляет его эффективнее. Речь именно об одинаковой общей массе доливаемой воды.



100 кг 40%-го раствора; две замены водой общей массой 40 кг. Итоговая концентрация от 24% на концах до 25,6% при равных заменах.

15. Как проверять решение и где чаще ошибаются

Проверка должна относиться к конкретным числам задачи. Для работы восстановите выполненные доли каждого этапа и убедитесь, что их сумма 1, а переключение не произошло после завершения. Для смеси восстановите общую массу, массу вещества и количество доступной воды.

Типичные ошибки: сложение времён вместо скоростей; среднее процентов без учёта масс; вычитание чистой воды при удалении раствора; потеря изменения числителя при добавлении вещества; одинаковая масса удаляемого вещества при повторных заменах; сохранение отрицательного времени или массы; пропуск нулевой массы и полной замены на границе; округление до отбора корней.

Универсальная последовательность: выберите неизвестные и область допустимых значений, составьте баланс, выполните равносильные преобразования, проверьте кандидатов исходными величинами, укажите единицы и полноту ответа. Для параметра дополнительно проверьте вершину, концы области и значения, где две ветви совпадают. Учебные задачи с доказательствами в конце практики развивают модельное мышление; они не объявляются копиями конкретного экзаменационного номера.