



Функции и графики

Теория и разобранные примеры

Свойства, условия применения и пошаговые объяснения. Используйте оглавление и закладки PDF для перехода к нужной теме.

Содержание

01. Функция и её график	2
02. Область определения и сокращение	2
03. Область значений и достижимость границ	3
04. Нули, знак, монотонность и экстремумы	3
05. Опорные графики	4
06. Сдвиг: доказательство через координаты	4
07. Растяжение и отражение	5
08. Два разных модуля	6
09. Чётность и периодичность	6
10. Кусочные функции и границы	7
11. Пересечение графиков и неравенства	7
12. Обратная функция и композиция	8
13. Параметр как горизонтальный уровень	9
14. Область значений рациональной функции	9
15. Полный разбор композиции без производной	10
16. Наклонная прямая и совпадающие корни	11
17. Вырожденное уравнение и единственный корень	11
18. Типичные ошибки и порядок самостоятельной работы	12

01. Функция и её график

Функция сопоставляет каждому допустимому аргументу ровно одно значение.

Разные аргументы могут давать одинаковое значение: например, $f(-2) = f(2) = 4$ для $f(x) = x^2$. График - множество всех точек $(x; f(x))$, а не только нарисованный в окне фрагмент.

Вертикальная прямая $x = c$ пересекает график не более одного раза. Окружность целиком не является графиком одной функции $y = f(x)$: для некоторых x она даёт две ординаты. Верхняя полуокружность задаёт функцию $y = \sqrt{1 - x^2}$ при $-1 \leq x \leq 1$.

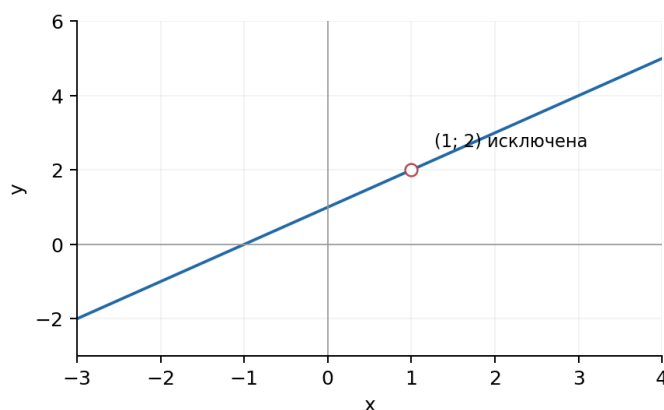
Главное различие. Область определения описывает аргументы, область значений - получающиеся значения. Их нельзя менять местами.

02. Область определения и сокращение

Ограничения берут из исходной записи: знаменатель отличен от нуля; подкоренное выражение чётного корня неотрицательно; аргумент логарифма положителен; его основание положительно и не равно единице. Если конструкций несколько, условия пересекают.

Пример. Для $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$ условия $x \geq 2$ и $x \neq 4$, поэтому $D(f) = [2; 4) \cup (4; +\infty)$.

Для $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ сначала $x \neq 1$, затем $g(x) = x + 1$. Получаем прямую с выколотой точкой $(1; 2)$. Сокращение сохраняет значения на прежней области, но не расширяет её. Это важно и для множества значений: $E(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.



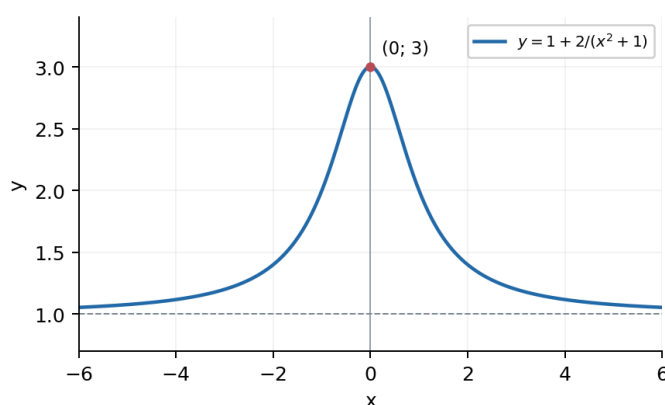
Задание 32. Прямая с выколотой точкой; соответствующее значение $y=2$ тоже исключено.

03. Область значений и достижимость границ

Чтобы найти $E(f)$, нужно доказать две вещи: значения вне предполагаемого множества невозможны, каждое значение внутри достигается.

Пример. $f(x) = (x - 1)^2 + 3 \geq 3$. Для любого $y \geq 3$ можно взять $x = 1 + \sqrt{y - 3}$. Значит, $E(f) = [3; +\infty)$.

У $g(x) = 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$ дробь лежит в $(0; 2]$, поэтому $E(g) = (1; 3]$. Значение 3 достигается при $x = 0$, а 1 - лишь предел при неограниченном росте $|x|$. Чтобы проверить все промежуточные значения, решаем $x^2 = \frac{2}{y - 1} - 1 \geq 0$ для $1 < y \leq 3$. Скобка у предельной границы должна быть круглой.



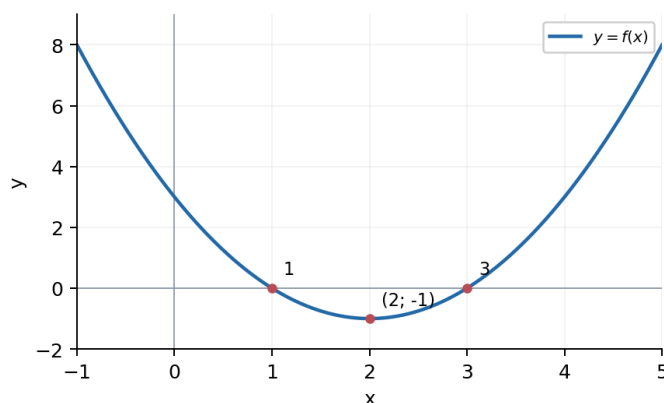
Область значений $(1; 3]$: нижняя граница - недостижимый предел.

04. Нули, знак, монотонность и экстремумы

Нули - аргументы с $f(x) = 0$. Знак функции определяется положением относительно оси абсцисс. Возрастание на промежутке означает: из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Для убывания знак сравнения обратный.

Пример. $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$. Нули 1 и 3; между ними функция отрицательна, вне - положительна. Функция убывает до вершины $x = 2$ и возрастает после неё.

Абсцисса минимума равна 2, значение минимума -1 , вершина $(2; -1)$. Локальный экстремум сравнивает близкие точки, наибольшее или наименьшее значение - всю указанную область. Граница области тоже может давать наибольшее значение на отрезке.



Задание 22. Нули и вершина изображённой параболы.

05. Опорные графики

Для прямой $y = kx + b$ коэффициент k задаёт наклон, b - пересечение с осью ординат. Для $k \neq 0$ область значений вся числовая прямая; при $k = 0$ она состоит из одного числа b .

Парабола $y = x^2$ и угол $y = |x|$ имеют минимум 0. Корень $y = \sqrt{x}$ определён при $x \geq 0$.

Гипербола $y = \frac{1}{x}$ имеет две ветви и исключает ноль из обеих областей.

Экспонента $y = b^x$ при $b > 0$, $b \neq 1$ имеет образ $(0; +\infty)$, проходит через $(0; 1)$.

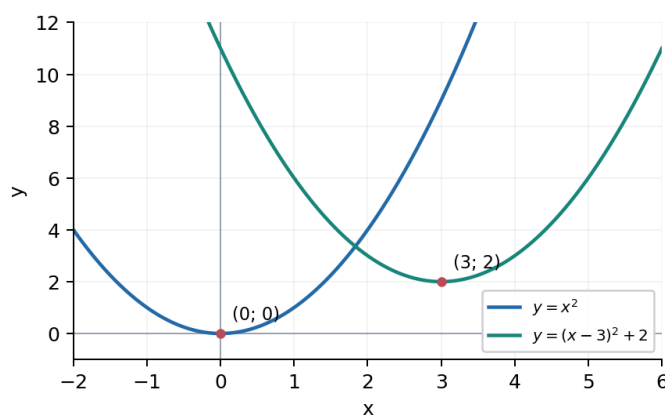
Логарифм $y = \log_b x$ определён при $x > 0$, его образ $\mathbb{R}$; он проходит через $(1; 0)$. При $b > 1$ обе функции возрастают, при $0 < b < 1$ убывают. Свойства нужны для построения без сотен случайных точек.

06. Сдвиг: доказательство через координаты

Пусть $(u; f(u))$ принадлежит исходному графику. Для $g(x) = f(x - a) + b$ положим $x = u + a$. Тогда $g(u + a) = f(u) + b$. Точка переходит в $(u + a; f(u) + b)$: сдвиг на a вправо и b вверх, если числа положительны.

Соответствие обратимо, поэтому ветви не теряются. При отрицательных a или b направления меняются.

Пример. График $y = (x - 3)^2 + 2$ получается из $y = x^2$ сдвигом на 3 вправо и 2 вверх. Вершина $(3; 2)$. Знак внутри скобок объясняется уравнением $x - a = u$, а не правилом для запоминания.



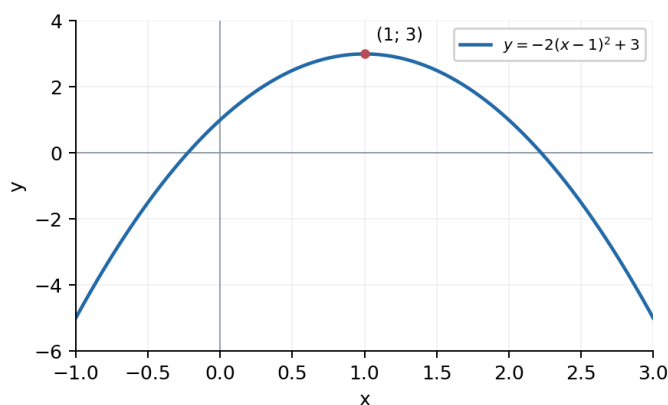
Задание 7. Сдвиг на 3 вправо и 2 вверх.

07. Растяжение и отражение

В $g(x) = cf(x)$ ордината каждой точки умножается на c , абсцисса сохраняется. При $c < 0$ график отражается относительно оси абсцисс. При $c = 0$ остаётся нулевая функция на исходной области определения.

В $g(x) = f(kx)$ при $k \neq 0$ старая абсцисса u переходит в $\frac{u}{k}$. При $|k| > 1$ график сжимается по горизонтали, при $0 < |k| < 1$ растягивается, при $k < 0$ дополнительно отражается относительно оси ординат.

Пример. $y = -2(x - 1)^2 + 3$ имеет вершину $(1; 3)$, ветви направлены вниз, $E(f) = (-\infty; 3]$. Сначала удобно выделить вершину, затем преобразовывать опорную параболу.

Отражение и вертикальное растяжение; вершина $(1; 3)$.

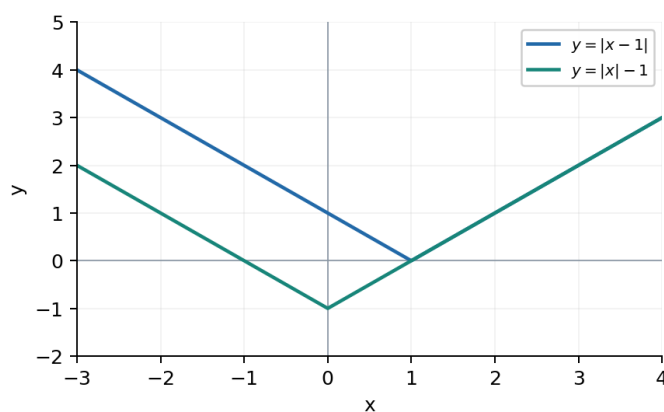
08. Два разных модуля

Модуль снаружи сохраняет части графика выше оси абсцисс и отражает нижние части вверх:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Для $y = |x^2 - 4|$ нули остаются -2 и 2 , средняя дуга отражается; образ $[0; +\infty)$.

Модуль аргумента устроен иначе: $g(x) = f(|x|)$ сохраняет правую часть исходного графика и отражает её относительно оси ординат. Левая исходная часть больше не используется. Например, $f(x) = x - 1$ даёт $g(x) = |x| - 1$, а $|f(x)| = |x - 1|$ - угол с вершиной $(1; 0)$. Эти графики разные.



Модуль значения и модуль аргумента дают разные графики.

09. Чётность и периодичность

Для чётности или нечётности сначала требуется симметричная область: вместе с x должен допускаться $-x$. Затем проверяют $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$. У $x^4 + 2x^2$ функция чётная; у $x^3 - x$ нечётная. Функция $x + 1$ не относится ни к одному типу.

Положительное T - период, если сдвиг на T сохраняет область и значения: $f(x + T) = f(x)$. Для $\sin(2x)$ наименьший положительный период π , для $\sin x$ - 2π . Повторяющийся фрагмент рисунка без доказательства не устанавливает периодичность.

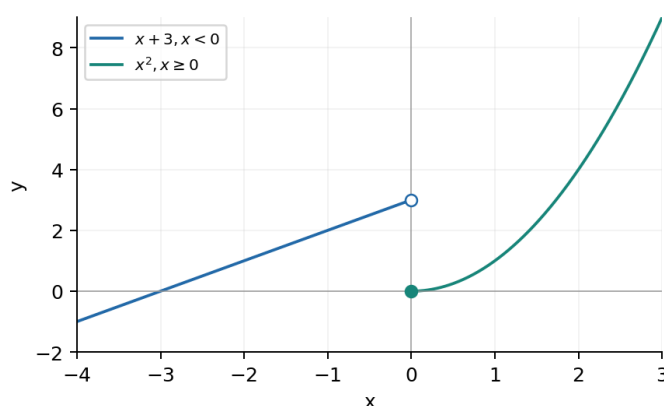
Чётность позволяет строить половину графика, но не заменяет проверку конкретной формулы и её области.

10. Кусочные функции и границы

Сначала выбирают ветвь по аргументу, затем подставляют его в соответствующую формулу. В условии $x < 0$ точка 0 исключена, в $x \geq 0$ включена.

Пример. $f(x) = x + 3$ при $x < 0$ и $f(x) = x^2$ при $x \geq 0$. Здесь $f(-2) = 1$, $f(0) = 0$, а левое предельное значение равно 3. График содержит выколотую точку $(0; 3)$ и закрашенную $(0; 0)$; непрерывности в нуле нет.

Если ветви должны соединиться непрерывно, сравнивают левый предел, правый предел и само значение. Для $f(x) = x + c$ при $x < 1$ и $f(x) = x^2$ при $x \geq 1$ непрерывность требует $1 + c = 1$, то есть $c = 0$.



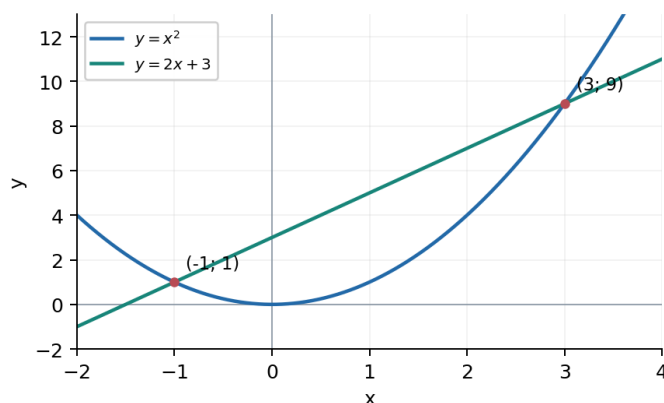
Задание 10. В нуле включена точка $(0; 0)$, исключена $(0; 3)$.

11. Пересечение графиков и неравенства

Решения $f(x) = g(x)$ — различные абсциссы общих точек. Уравнение нужно рассматривать на пересечении областей обеих функций. Неравенство $f(x) > g(x)$ означает, что первый график выше второго.

Пример. $x^2 = 2x + 3$ равносильно $(x - 3)(x + 1) = 0$: абсциссы -1 и 3 , точки $(-1; 1)$ и $(3; 9)$. Между ними парабола ниже прямой: $x^2 < 2x + 3$ при $-1 < x < 3$.

Рисунок помогает выбрать промежутки. Точные границы и полноту ответа обеспечивает разложение многочлена и проверка знака. Масштаб рисунка не даёт права округлять корни.

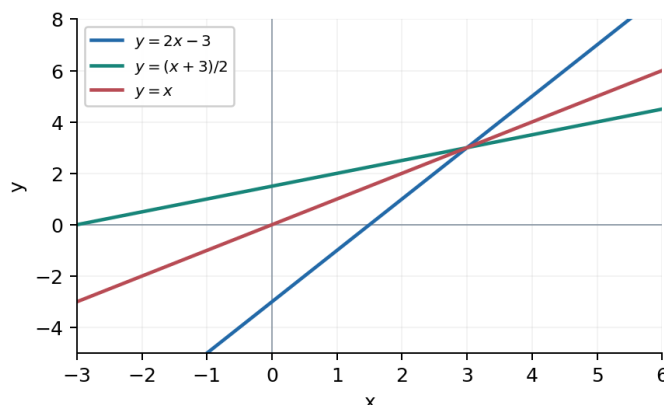
Задание 31. Пересечения $(-1; 1)$ и $(3; 9)$.

12. Обратная функция и композиция

Обратная функция существует на образе, если каждое значение исходной функции получается ровно при одном аргументе. У x^2 на всей прямой такого свойства нет; на $[0; +\infty)$ обратная равна $\sqrt{x}$.

Из $y = 2x - 3$ получаем $x = \frac{y + 3}{2}$, поэтому $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$. Перестановка координат отражает график относительно $y = x$.

В композиции $f(g(x))$ нужны два условия: $x \in D(g)$ и $g(x) \in D(f)$. Например, $\sqrt{x^2 - 1}$ определена при $|x| \geq 1$. Для числа решений сначала находят допустимые промежуточные значения, затем считают их прообразы. Одно промежуточное значение может давать несколько x .

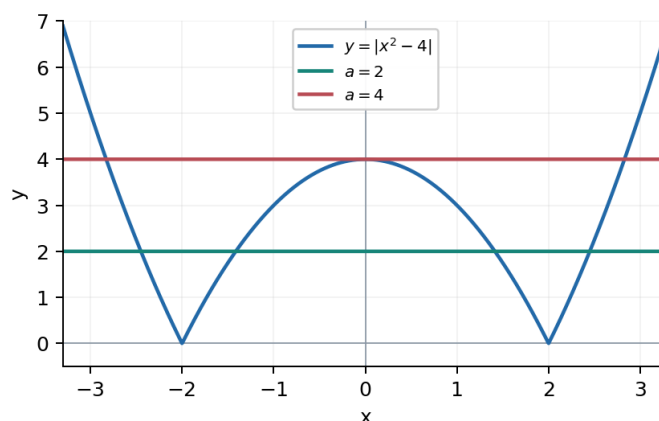
Задание 27. Графики отражены относительно $y = x$.

13. Параметр как горизонтальный уровень

Уравнение $f(x) = a$ пересекает неподвижный график горизонталью $y = a$. Число пересечений меняется при прохождении экстремумов, исключённых значений и границ ветвей.

Разобраный пример. $|x^2 - 4| = a$. При $a < 0$ решений нет. При $a = 0$ два корня ± 2 . При $0 < a < 4$ равенства $x^2 = 4 + a$ и $x^2 = 4 - a$ дают четыре различных корня. При $a = 4$ второе даёт один корень 0, первое - два, всего три. При $a > 4$ остаются два корня.

Важно отдельно проверять критические уровни: ответ на границе нельзя переносить из соседнего открытого промежутка. Сложные задачи 33-40 развивают этот способ, включая наклонную прямую и композиции.



Четыре пересечения при $a=2$; три при критическом уровне $a=4$.

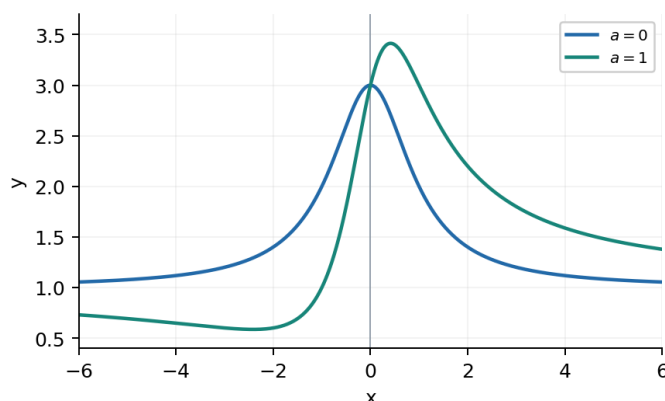
14. Область значений рациональной функции

Иногда удобнее решать $y = f(x)$ относительно x . Значение y входит в образ ровно тогда, когда уравнение имеет допустимый действительный корень.

Пример. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}$. Получаем $(y - 1)x^2 + y - 3 = 0$. При $y \neq 1$ значение $x^2 = \frac{3 - y}{y - 1}$ должно быть неотрицательным: $1 < y \leq 3$. При $y = 1$ уравнение вырождается в $-2 = 0$ и корней нет.

Для $\frac{x^2 + 2ax + 3}{x^2 + 1}$ используют дискриминант, но коэффициент $y - 1$ может исчезнуть.

Случай $y = 1$ проверяют как линейное уравнение отдельно. Именно пропуск вырожденного случая часто даёт ошибочную замкнутую границу.



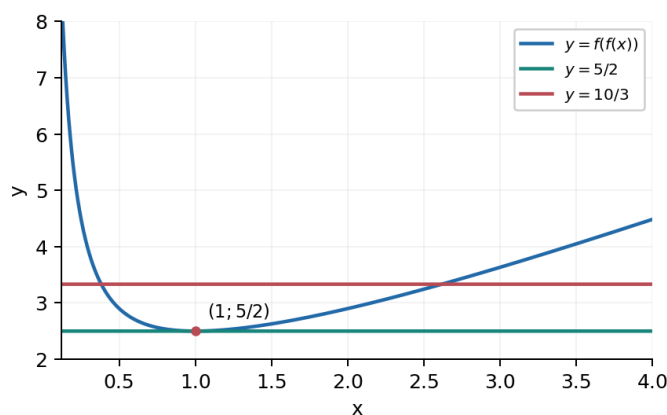
Задание 36. При $a=0$ нижняя граница 1 не достигается; при $a \neq 0$ обе границы достигаются.

15. Полный разбор композиции без производной

Пусть $f(x) = x + \frac{1}{x}$ при $x > 0$. Тогда $f(x) - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, образ $[2; +\infty)$. При $t > 2$ уравнение $x^2 - tx + 1 = 0$ имеет два положительных корня: дискриминант положителен, сумма положительна, произведение 1.

Внешняя функция на $[2; +\infty)$ строго возрастает: при $v > u \geq 2$ разность $(v - u) \left(1 - \frac{1}{uv}\right)$ положительна. Следовательно, $f(f(x)) \geq \frac{5}{2}$.

Уравнение $f(f(x)) = a$ имеет ноль решений ниже $\frac{5}{2}$, одно на границе и два выше неё. Мы не использовали производную: её изучаем в следующем уроке. Главное - исследовать внешний график только на образе внутренней функции.



Задание 38. Минимальный уровень $5/2$ достигается только при $x=1$.

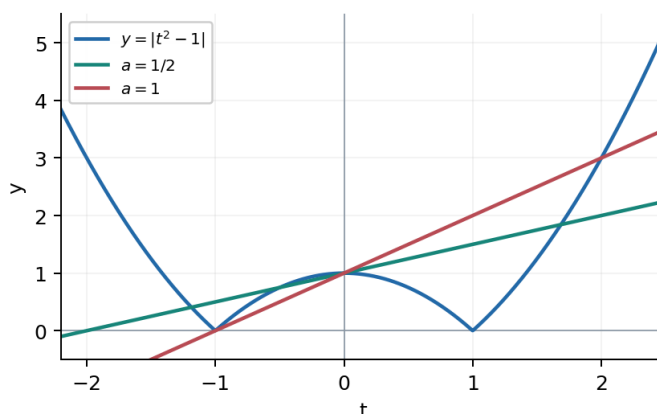
16. Наклонная прямая и совпадающие корни

Если параметр стоит при аргументе, горизонтального уровня недостаточно: прямая $y = at + b$ меняет наклон. Точные критические значения определяются не рисунком, а условиями попадания корня в ветвь и совпадениями на её границе.

Разобраный пример. Для $|t^2 - 1| = at + 1$ при $|t| \leq 1$ получаем $t(t + a) = 0$. Корень 0 есть всегда, корень $-a$ допустим при $|a| \leq 1$ и совпадает с нулём при $a = 0$.

На внешних ветвях $t^2 - at - 2 = 0$. Один корень положительный, второй отрицательный. Подстановка границ 1 и -1 даёт $-a - 1$ и $a - 1$. Положительный корень достигает правой ветви при $a \geq -1$, отрицательный - левой при $a \leq 1$. При $a = \pm 1$ корень на границе посчитан в двух ветвях, но в окончательном ответе учитывается один раз.

Итого два корня при $|a| > 1$, три при $a = -1, 0, 1$, четыре при $0 < |a| < 1$. Критические значения связаны с конкретными событиями: выходом из ветви и слиянием. Если заменить t на $|x - 2|$, каждый положительный корень даст два x , а нулевой - один. Именно такой подсчёт прообразов нужен в задании 35.



Задание 39. При $a = 1/2$ четыре пересечения; при $a = 1$ один корень совпадает на границе ветвей.

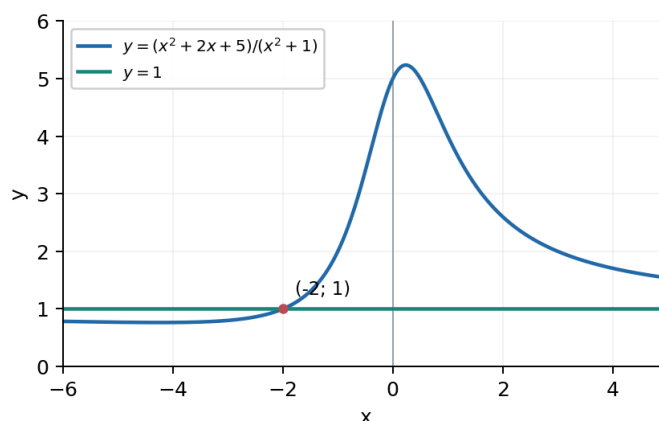
17. Вырожденное уравнение и единственный корень

Разобраный пример. При каких a равенство $\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1} = a$ имеет один действительный корень? Знаменатель всегда положителен. Умножение на него равносильно и даёт $(1 - a)x^2 + 2x + 5 - a = 0$.

При $a = 1$ квадратный коэффициент исчезает. Остаётся $2x + 4 = 0$, значит ровно один корень -2 . Этот случай нельзя исследовать критерием дискриминанта квадратного уравнения.

При $a \neq 1$ уравнение действительно квадратное. Единственный корень возникает при $D = 4 - 4(1 - a)(5 - a) = 0$. Получаем $a = 3 \pm \sqrt{5}$. Оба значения отличны от 1 и потому допустимы для этой ветви.

Полный ответ: $a \in \{1; 3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}\}$. В задачах с параметром первым проверяют значения, при которых степень уравнения понижается; затем исследуют остальные случаи.



Задание 34. Уровень $a=1$ имеет один прообраз $x=-2$; критические уровни $3 \pm \sqrt{5}$.

18. Типичные ошибки и порядок самостоятельной работы

Не восстанавливайте выколотые точки после сокращения. Не включайте недостижимый предел в область значений. Не путайте $|f(x)|$ и $f(|x|)$. Не считайте один корень дважды, если он принадлежит границе двух ветвей.

Проверка решения. Запишите область; назовите опорный график; объясните преобразования координат; найдите точные особые точки; докажете число пересечений на каждом промежутке; отдельно проверьте границы и совпадения.

Практика: 1-16 - свойства и графики; 17-20 - повторение; 21-32 - связка методов и исключённые точки; 33-40 - полный разбор параметров. Ответ к задаче на число корней должен содержать все диапазоны параметра и обоснование полноты.

Задание 16 основано на варианте задания 11 официальной демоверсии ФИПИ ЕГЭ-2026. Остальные задания - авторские учебные материалы курса.