



Урок 23. Показательные и логарифмические модели

Показательные и логарифмические модели. Правила, способы проверки и восемь пошаговых разборов.

01. Почему показательные и логарифмические уравнения сводятся к алгебре

При $a > 0$ и $a \neq 1$ функция a^x принимает каждое положительное значение ровно один раз. Поэтому из $a^u = a^v$ следует $u = v$. Это верно и при основании между нулём и единицей: убывание меняет направление неравенства, но не нарушает равносильности равенств.

Замена переменной и обратный переход

В выражении $4^x - 5 \cdot 2^x + 4$ заметим $4^x = (2^x)^2$. Замена $t = 2^x$ превращает выражение в квадратный трёхчлен. Обязательно сразу записать $t > 0$. Решение уравнения относительно t - промежуточный результат. Каждое допустимое значение t нужно вернуть в равенство $2^x = t$ и найти x . Нулевой и отрицательный корни уравнения для t не соответствуют ни одному действительному x .

ОДЗ относится к исходной записи

Для суммы $\log_a u + \log_a v$ нужны два условия: $u > 0$ и $v > 0$. После объединения получается $\log_a(uv)$, но одного условия $uv > 0$ недостаточно: произведение положительно и при двух отрицательных множителях, когда исходные логарифмы не существуют. Поэтому ограничения записывают до преобразований и сохраняют до конца.

В уравнении $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ ОДЗ даёт $x > 1$. После объединения получаем $x^2 - 1 = 8$, то есть кандидаты -3 и 3 . Первый не входит в ОДЗ, остаётся 3 .

Как сравнить логарифмический корень с границами

При основании больше единицы можно сравнивать степени вместо десятичных приближений. Например, $\log_2 3 > 3/2$, потому что $3 > 2^{3/2} = \sqrt{8}$, а $3^2 > 8$. Точная оценка особенно полезна, когда корень близок к границе заданного отрезка.

02. Сначала распознаём модель, потом считаем

Показательные и логарифмические уравнения могут выглядеть по-разному, но большинство доступных моделей сводится к нескольким действиям. Для показательной части это приведение к одному основанию, вынесение общей степени или замена $t = a^x$. Для логарифмической - запись области допустимых значений, объединение логарифмов и переход к равенству аргументов или к определению логарифма.

Полное решение начинается с выбора модели. Если обе части уже являются степенями одного положительного основания, не нужно вводить замену. Если встречаются a^{2x} и a^x ,

уравнение является квадратным относительно a^x . Если несколько слагаемых отличаются только постоянным множителем степени, удобнее вынести наименьшую степень за скобки.

В логарифмическом уравнении ограничения появляются до преобразований. Аргумент каждого логарифма должен быть положителен, основание - положительно и не равно единице. Даже если после преобразования получится красивый корень, он принимается только после проверки всех исходных аргументов.

Критерий короткого метода прост: каждое преобразование должно уменьшать сложность. Если после шага стало больше оснований, функций или ограничений, вернитесь назад. Хорошее решение задания 13 обычно состоит из одной основной идеи и нескольких прозрачных алгебраических действий.

Показательное или логарифмическое уравнение распознают по месту переменной. Если переменная находится в показателе степени, модель показательная; если под знаком логарифма или в его аргументе - логарифмическая. Одно уравнение может сочетать обе конструкции, но начинать всё равно нужно с области допустимых значений и поиска обратных операций. Полезно спросить: можно ли привести степени к одному основанию, вынести общий степенной множитель, выполнить замену или применить определение логарифма. Этот перечень задаёт порядок поиска, а не случайный перебор формул.

До вычислений оцените возможное число корней. Функция a^x при допустимом основании положительна и строго монотонна; поэтому уравнение $a^x = b$ при $b > 0$ имеет ровно один корень. Логарифмическая функция также монотонна на положительной полуоси. Если после равносильных преобразований получилось несколько кандидатов, нелинейность появилась в аргументе или использовалась замена. Такая оценка помогает заметить лишние корни.

Диагностическая пара помогает различать операции: в $2^x + 2^x$ одинаковые слагаемые дают $2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$, а в $2^x \cdot 2^x$ показатели складываются и получается 2^{2x} . Внешне записи близки, но методы различны. Перед преобразованием назовите действие верхнего уровня - сумма, произведение, частное или равенство. Именно оно определяет допустимое правило.

Короткий контроль: назовите применённое свойство вслух и укажите, почему оно равносильно на текущей области. Эта привычка отделяет математическое преобразование от внешне похожей, но неверной манипуляции.

распознать $\rightarrow$ упростить $\rightarrow$ решить $\rightarrow$ проверить

Ключевые правила

- Назовите тип уравнения до вычислений.
- Не вводите замену, если достаточно приравнять показатели.
- ОДЗ логарифмов записывается до применения их свойств.
- Проверяйте корни в исходном уравнении.

03. Одинаковое основание и равенство показателей

Функция $y = a^x$ при $a > 0$, $a \neq 1$ принимает каждое положительное значение ровно один раз. Поэтому из равенства $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ следует $f(x) = g(x)$. Основание может быть больше или меньше единицы: для уравнения направление неравенства не важно, важна взаимная однозначность.

Числа нужно представлять как степени подходящего основания. Например, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $\frac{1}{16} = 2^{-4}$. Основания 4 и 8 удобно заменить степенями двойки: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$. После этого показатели умножаются, а не складываются.

Если показатель содержит квадрат, после приравнивания показателей возникает обычное квадратное уравнение. Его корни затем подставляются в исходное равенство. У показательной функции нет ограничения на сам показатель, поэтому корни алгебраического уравнения обычно допустимы.

Проверка выполняется сравнением степеней. Если найдено $x = 5$ в уравнении $4^{x+1} = 8^{x-1}$, обе части становятся 2^{12} . Такая проверка короче вычисления больших чисел.

Приведение к одному основанию должно быть точным. Числа 4, 8, 16 удобно записывать как степени 2, а 9, 27, 81 - как степени 3. После этого при $a > 0$, $a \neq 1$ равенство $a^u = a^v$ равносильно $u = v$. Основание может быть меньше единицы - для уравнения направление сравнения не имеет значения, в отличие от неравенства. Нельзя приравнять показатели, если основания лишь похожи или зависят от переменной без проверки условий.

При дробном основании полезно перейти к основанию больше единицы: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Это часто превращает отрицательный показатель в обычное линейное уравнение. Иногда после приведения обе части полностью совпадают; тогда уравнение верно для всех действительных значений, а не имеет единственный числовой ответ.

Если одно основание является степенью другого, сравните показатели только после полного преобразования обеих частей. В $8^{x-1} = 4^{x+2}$ получают $2^{3x-3} = 2^{2x+4}$ и линейное уравнение $3x - 3 = 2x + 4$. Проверка состоит в подстановке найденного x в показатели до вычисления больших степеней.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad a > 0, a \neq 1$$

$$4^{x+1} = 8^{x-1} \Leftrightarrow 2^{2x+2} = 2^{3x-3}$$

Ключевые правила

- При одинаковом основании приравниваются показатели.
- Отрицательный показатель означает обратную степень.
- Проверку проводите в степенной форме, не вычисляя большие числа.

Разбор 1. Приведение к основанию 2

УСЛОВИЕ

Решите $4^{x+1} = 8^{x-1}$.

1. Представим основания: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$.
2. Получаем $2^{2x+2} = 2^{3x-3}$.
3. Приравниваем показатели: $2x + 2 = 3x - 3$.
4. Отсюда $x = 5$.
5. Проверка: обе части равны 2^{12} .

ОТВЕТ.

5

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $9^{x-1} = 27^{x-2}$.

$$9 = 3^2, 27 = 3^3.$$

$$2x - 2 = 3x - 6.$$

$$x = 4.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

4

04. Общий множитель и степенная арифметика

В сумме $a^x + a^{x+1}$ степени отличаются множителем a . Запись $a^{x+1} = a \cdot a^x$ позволяет вынести a^x за скобки. Например, $2^x + 2^{x+1} = 2^x(1 + 2) = 3 \cdot 2^x$.

Выносить нужно наименьшую общую степень. В выражении $5^{x+1} - 5^x$ общий множитель равен 5^x , поэтому получаем $5^x(5 - 1)$. После этого остаётся простейшее показательное уравнение.

Степень с положительным основанием всегда положительна. Это позволяет иногда сократить уравнение на a^x без потери корней. В отличие от неизвестного алгебраического множителя, a^x никогда не равен нулю.

Типичная ошибка - сложить степени: $a^x + a^{x+1}$ не равно a^{2x+1} . Правило сложения показателей работает при умножении степеней, а не при сложении слагаемых.

При сложении степеней показатели не складываются. Сначала ищут общий множитель: $a^{x+p} = a^x a^p$. Тогда $a^{x+p} + a^{x+q}$ превращается в $a^x (a^p + a^q)$. Вынесенная степень положительна, поэтому деление на неё безопасно. Если после вынесения справа получается неположительное число, уравнение не имеет корней, потому что $a^x > 0$.

Общий множитель выбирают с минимальным показателем, чтобы внутри скобок не возникали лишние отрицательные степени. Цель преобразования - оставить одну степенную величину и числовой коэффициент. После решения результат проверяют прямой подстановкой в исходную сумму, а не только в сокращённую строку.

Полезный признак общего множителя: показатели отличаются на постоянное число. Тогда $a^{x+k} = a^k a^x$. Если справа после вынесения получается $a^x = C$, сначала проверьте $C > 0$. При $C = 0$ или $C < 0$ корней нет, и логарифмировать такое число нельзя. Эта проверка устраняет лишние вычисления и явно использует область значений показательной функции.

$$a^x + a^{x+1} = a^x(1 + a)$$

$$a^{x+p} \cdot a^{x+q} = a^{2x+p+q}$$

Ключевые правила

- $a^{x+k} = a^k \cdot a^x$.
- Положительную степень a^x можно использовать как ненулевой общий множитель.
- Не складывайте показатели при сложении степеней.

Разбор 2. Общий степенной множитель

УСЛОВИЕ

Решите $2^x + 2^{x+1} = 24$.

1. $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$.
2. Выносим 2^x : $2^x(1 + 2) = 24$.
3. $3 \cdot 2^x = 24$, поэтому $2^x = 8$.
4. $8 = 2^3$, значит $x = 3$.
5. Проверка: $8 + 16 = 24$.

ОТВЕТ.

3

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $3^{x+1} + 3^x = 108$.

$$3^x(3 + 1) = 108.$$

$$3^x = 27.$$

$$x = 3.$$

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

3

05. Замена t равняется a в степени x

Если уравнение содержит a^{2x} и a^x , вводят $t = a^x$. Тогда $a^{2x} = (a^x)^2 = t^2$. Показательное уравнение превращается в квадратное, но у новой переменной есть важное ограничение $t > 0$.

После решения квадратного уравнения отрицательные и нулевые значения t отбрасываются. Каждый положительный корень даёт отдельное уравнение $a^x = t$. Если t является степенью основания, ответ получается без логарифма; иначе корректно оставить $x = \log_a t$.

Замена должна охватывать всё выражение. Например, для 9^x при основании 3 удобно записать $9^x = (3^x)^2$ и положить $t = 3^x$. Если взять $t = 9^x$, слагаемое 3^x превратится в корень и модель усложнится.

Проверка включает два уровня: значения t должны решать квадратное уравнение, а найденные значения x - исходное показательное. Ограничение $t > 0$ записывается рядом с заменой, а не вспоминается после получения ответа.

Замена $t = a^x$ работает, когда встречаются степени a^{2x} , a^x и числа. После замены обязательно пишут $t > 0$: показательная функция не принимает нулевых и отрицательных значений. Решив квадратное уравнение, сначала отбрасывают недопустимые t , затем возвращаются к $a^x = t$. Если t не является удобной степенью основания, точный корень записывают как $x = \log_a t$.

В симметричном выражении $a^x + a^{-x}$ полагают $t = a^x > 0$, тогда $a^{-x} = \frac{1}{t}$. После умножения на t получается квадратное уравнение. Его корни часто взаимно обратны, что соответствует симметрии x и $-x$. Умножение равносильно, потому что t заведомо не равно нулю.

После квадратной замены число алгебраических корней не равно автоматически числу ответов. Уравнение для t может иметь два положительных корня, один положительный и один отрицательный, двойной положительный корень или ни одного положительного. Каждый допустимый t порождает ровно один действительный x , потому что a^x строго монотонна. Эту связь полезно записать словами перед обратной заменой.

$$t = a^x > 0, \quad a^{2x} = t^2$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ или } t = 4$$

Ключевые правила

- При замене $t = a^x$ всегда $t > 0$.
- Выбирайте основание так, чтобы старшая степень стала t^2 .
- После решения относительно t обязательно вернитесь к x .

Разбор 3. Квадратная замена

УСЛОВИЕ

Решите $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.

1. Положим $t = 3^x > 0$, тогда $9^x = t^2$.
2. Получаем $t^2 - 10t + 9 = 0$.
3. $(t - 1)(t - 9) = 0$, поэтому $t = 1$ или $t = 9$; оба значения положительны.
4. $3^x = 1$ даёт $x = 0$, а $3^x = 9$ даёт $x = 2$.
5. Подстановка подтверждает оба корня.

ОТВЕТ.

0; 2

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

$t = 2^x > 0$.

$t^2 - 5t + 4 = 0$, поэтому $t = 1$ или $t = 4$.

$x = 0$ или $x = 2$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

0; 2

06. Определение логарифма и область допустимых значений

Логарифм $\log_a b$ - показатель степени, в которую нужно возвести a , чтобы получить b . Поэтому $\log_a b = c$ равносильно $a^c = b$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$. Эта связь решает простейшие логарифмические уравнения без дополнительных формул.

Аргумент логарифма строго положителен. Условие $x - 3 > 0$ означает $x > 3$, а не $x \neq 3$. Если логарифмов несколько, нужно пересечь все ограничения. Например, для $\log_2(x - 2) + \log_2 x$ получаем одновременно $x - 2 > 0$ и $x > 0$, то есть $x > 2$.

Основание логарифма в задачах обычно постоянно. Если оно содержит переменную, появляются дополнительные ограничения, но такие модели не являются обязательным ядром этого урока. Здесь внимание сосредоточено на аргументах и корректном применении свойств.

ОДЗ не заменяет проверку. После преобразований может появиться кандидат, который формально удовлетворяет алгебраическому уравнению, но делает один из исходных аргументов неположительным. Его нужно явно исключить.

Определение $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ содержит ограничения $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. В школьной задаче основание обычно уже корректно, а условие $b > 0$ превращается в ОДЗ. Его записывают до возведения основания в степень, чтобы затем проверить найденный корень. Например, в $\log_3(x - 1) = 2$ равенство $x - 1 = 9$ даёт $x = 10$, и он удовлетворяет $x > 1$.

Логарифм - показатель степени, поэтому ответ проверяют обратным возведением. Для основания между нулём и единицей отрицательный логарифм естественен: $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$,

потому что $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$. Знак результата нельзя определять по привычкам для основания больше единицы.

ОДЗ сложного аргумента решают как отдельное неравенство. Для $\log_2(x^2 - 4)$ условие $x^2 - 4 > 0$ даёт $x < -2$ или $x > 2$. Запись $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ теряет отрицательную ветвь. Если аргумент является дробью, его положительность решают методом интервалов, а нули знаменателя исключают.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Ключевые правила

- Аргумент каждого логарифма должен быть строго положителен.
- ОДЗ нескольких логарифмов пересекается.
- Определение логарифма связывает равенство с показательной формой.

Разбор 4. Определение логарифма

УСЛОВИЕ

Решите $\log_3(x - 1) = 2$.

1. ОДЗ: $x - 1 > 0$, то есть $x > 1$.
2. По определению логарифма $x - 1 = 3^2$.
3. $x - 1 = 9$, поэтому $x = 10$.
4. Корень принадлежит ОДЗ.
5. Проверка: $\log_3 9 = 2$.

ОТВЕТ.

10

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\log_2(x + 3) = 4$.

ОДЗ: $x > -3$.

$$x + 3 = 2^4 = 16.$$

$x = 13$, условие выполнено.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

13

07. Равенство логарифмов с одинаковым основанием

Логарифмическая функция с допустимым основанием взаимно однозначна. Поэтому $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно $f(x) = g(x)$ при условии, что оба аргумента положительны. Сначала записывается ОДЗ, затем равенство аргументов.

Даже если после приравнивания аргументов получается единственный корень, его нужно сопоставить с ОДЗ. Например, из $\log_3(x + 2) = \log_3(2x - 1)$ следует $x = 3$. Он допустим, потому что $x + 2 > 0$ и $2x - 1 > 0$.

Основание меньше единицы не мешает приравнивать аргументы в уравнении. Монотонность станет важна в неравенствах, а для равенства достаточно взаимной однозначности.

Нельзя сокращать знак логарифма, если основания различны. Сначала основания приводят к одному или используют переход к определению. Механическое приравнивание аргументов при разных основаниях неверно.

При равенстве логарифмов с одинаковым допустимым основанием можно приравнять аргументы, но ОДЗ не исчезает. Оно может отсеять решение линейного или квадратного уравнения. Нельзя применять правило к разным основаниям: сначала их приводят к одному или выбирают другую модель.

Если приравнивание аргументов даёт тождество, множество решений определяется только ОДЗ. Например, $\log_2(x - 1) = \log_2(x - 1)$ верно для всех $x > 1$, но не для всех действительных. Если получается противоречие, корней нет независимо от ОДЗ.

При одинаковых основаниях функция логарифма инъективна: двум равным значениям соответствуют равные аргументы. Но это утверждение действует только внутри области определения. Поэтому строка приравнивания аргументов должна сопровождаться ОДЗ или ссылкой на него. В проверке исходные логарифмы вычислять необязательно - достаточно подтвердить положительность и равенство аргументов.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \{f(x) = g(x), f(x) > 0, g(x) > 0\}.$$

Ключевые правила

- Одинаковые логарифмы равны тогда и только тогда, когда равны допустимые аргументы.
- ОДЗ записывается до приравнивания аргументов.
- Разные основания нельзя просто удалить.

08. Сумма и разность логарифмов

Сумма логарифмов одного основания превращается в логарифм произведения: $\log_a u + \log_a v = \log_a(uv)$. Разность превращается в логарифм отношения: $\log_a u - \log_a v = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$. Свойства применяются только после записи условий $u > 0$ и $v > 0$.

После объединения часто возникает квадратное или рациональное уравнение. Из $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$ получаем $\log_2(x(x - 2)) = 3$, затем $x(x - 2) = 8$. Квадратное уравнение даёт два кандидата, но ОДЗ $x > 2$ оставляет только один.

В разности логарифмов знаменатель отношения автоматически положителен на ОДЗ, но это не означает, что ограничение можно не записывать. Исходный знаменатель является аргументом логарифма и обязан быть положительным, а не просто ненулевым.

Коэффициент перед логарифмом можно перенести в показатель аргумента: $k \log_a u = \log_a u^k$. Для чётной степени область определения исходного логарифма всё равно требует $u > 0$; запись $\log_a(u^2)$ без этого условия могла бы искусственно расширить область.

Свойства $\log_a u + \log_a v = \log_a(uv)$ и $\log_a u - \log_a v = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$ применимы только при положительных u и v . Положительность произведения недостаточна: оба исходных логарифма должны существовать отдельно. После объединения уравнение часто становится квадратным. Все кандидаты возвращают в первоначальное ОДЗ.

Коэффициент перед логарифмом можно перенести в степень аргумента только с сохранением области. Запись $2 \log_a x = \log_a x^2$ верна при $x > 0$, тогда как $\log_a(x^2)$ определён при $x \neq 0$. Поэтому обратная замена этих выражений без ОДЗ меняет множество решений.

После объединения логарифмов удобно оценить знак и размер аргумента. Если $\log_2 U = 3$, то $U = 8 > 1$; если $\log_{\frac{1}{2}} U = 2$, то $U = \frac{1}{4} < 1$. Такая оценка обнаруживает случайный знак показателя или неверное основание ещё до решения полученного алгебраического уравнения.

$$\log_a u + \log_a v = \log_a(uv)$$

$$\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}$$

Ключевые правила

- Свойства логарифмов не отменяют исходную ОДЗ.
- Сумма превращается в произведение, разность - в отношение.
- После алгебраического решения каждый кандидат сверяется с исходными аргументами.

Разбор 5. Сумма логарифмов и ОДЗ

УСЛОВИЕ

Решите $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

1. ОДЗ: $x > 0$ и $x - 2 > 0$, значит $x > 2$.
2. Объединяем: $\log_2(x(x - 2)) = 3$.
3. $x(x - 2) = 2^3 = 8$, то есть $x^2 - 2x - 8 = 0$.
4. Кандидаты $x = 4$ и $x = -2$.
5. По ОДЗ остаётся только $x = 4$; проверка: $\log_2 4 + \log_2 2 = 3$.

ОТВЕТ.

4

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 2$.

ОДЗ: $x > 2$.

$x(x - 2) = 9$.

$x^2 - 2x - 9 = 0$, допустимый корень $x = 1 + \sqrt{10}$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$1 + \sqrt{10}$

Разбор 6. Разность логарифмов

УСЛОВИЕ

Решите $\log_3(x - 1) - \log_3(x - 4) = 1$.

1. ОДЗ: $x - 1 > 0$ и $x - 4 > 0$, поэтому $x > 4$.

2. Объединяем: $\log_3 \frac{x-1}{x-4} = 1$.
3. $\frac{x-1}{x-4} = 3$.
4. $x - 1 = 3x - 12$, откуда $2x = 11$ и $x = \frac{11}{2}$.
5. $\frac{11}{2} > 4$, поэтому корень допустим.

ОТВЕТ.

$$\frac{11}{2}$$

Близкий аналог для самостоятельной работы

Решите $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 1$.

ОДЗ: $x > 1$.

$$\frac{x+1}{x-1} = 2.$$

$x + 1 = 2x - 2$, поэтому $x = 3$.

ОТВЕТ К АНАЛОГУ.

$$3$$

09. Композиции степени и логарифма

Степень и логарифм с одним основанием являются взаимно обратными действиями. При $x > 0$ выполняется $a^{\log_a x} = x$. Для любого действительного x выполняется $\log_a(a^x) = x$. Различие в ограничении связано с тем, что аргумент логарифма должен быть положительным.

Если внутри композиции стоит выражение, его ограничения сохраняются. В $a^{\log_a(x-2)}$ необходимо $x - 2 > 0$, после чего выражение равно $x - 2$. В $\log_a(a^{2x-1})$ аргумент автоматически положителен для любого x .

Композиция часто выглядит сложнее, чем есть. Вместо перехода к десятичным приближениям сначала проверьте совпадение оснований. Если основания различны, обратность напрямую не применяется.

Проверка композиции - восстановление исходного действия: $a^{\log_a b} = b$ означает, что логарифм выбрал именно тот показатель, который возвращает b .

Композиции $a^{\log_a x} = x$ и $\log_a(a^x) = x$ имеют разные ограничения. В первой логарифм требует $x > 0$. Во второй аргумент a^x положителен при любом действительном x . В сложной задаче сначала отметьте внутреннюю операцию: если внутри стоит логарифм, его ОДЗ записывается до сокращения взаимно обратных функций.

При разных основаниях формула перехода полезна, но её применяют, когда более простые способы не работают. Например, $2^x = 3$ естественно даёт $x = \log_2 3$. Десятичное приближение не требуется, если условие не просит оценку. Точная запись сохраняет смысл и позволяет выполнить обратную проверку.

В композиции с несколькими слоями операции снимают снаружи внутрь. Например, из $3^{\log_3(x-2)} = 7$ сначала используют взаимную обратность степени и логарифма, получая $x - 2 = 7$, но лишь на ОДЗ $x > 2$. Если снаружи стоит дополнительный коэффициент или сумма, сначала изолируют композицию, а уже затем сокращают функции.

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0$$

$$\log_a(a^x) = x$$

Ключевые правила

- $a^{\log_a x} = x$ только при $x > 0$.
- $\log_a(a^x) = x$ для любого действительного x .
- Обратность применяется только при одинаковом основании.

10. Полная запись решения и критерии самопроверки

Для показательного уравнения полная запись обычно начинается сразу с равносильного преобразования, потому что область определения степени с положительным основанием не ограничивает x . Если вводится замена, рядом записывается её ограничение $t > 0$, затем решается алгебраическое уравнение и выполняется возврат.

Для логарифмического уравнения первой строкой становится ОДЗ. После решения кандидаты перечисляются отдельно, а затем проверяются по ограничениям. Формулировка «не подходит по ОДЗ» должна относиться к конкретному корню и конкретному аргументу.

Ответ не должен содержать промежуточную переменную. Если найдено $t = 1$ и $t = 9$, в ответ переходят значения x , полученные из $3^x = 1$ и $3^x = 9$. Если положительное значение t не является целой степенью, логарифмическая запись ответа допустима и точна.

Самопроверка: все ли преобразования равносильны; записаны ли ограничения; отброшены ли недопустимые значения замены; возвращена ли исходная переменная; удовлетворяют ли корни исходному уравнению. Пять коротких вопросов заменяют случайную повторную арифметику.

Полное решение заканчивают четырьмя проверками: преобразования равносильны на ОДЗ; значения промежуточной переменной допустимы; найденные x принадлежат исходной области; ответ содержит все корни. Если использовалось возведение в квадрат или умножение на выражение с переменной, нужна непосредственная подстановка.

Для самодиагностики разделяйте ошибки: модель, область, алгебра, обратная замена, проверка. Такая классификация показывает, какую часть алгоритма тренировать. Переписывание всего решения без нахождения первого неверного перехода редко устраняет причину ошибки.

Оформление ответа зависит от множества решений. Для двух корней их перечисляют через точку с запятой; для отсутствия корней пишут «корней нет»; для тождества указывают все значения из ОДЗ. Нельзя оставлять ответ в виде неразобранного квадратного уравнения для t : задача спрашивает значения исходной переменной.

ОДЗ $\rightarrow$ преобразование $\rightarrow$ кандидаты $\rightarrow$ проверка $\rightarrow$ ответ

Ключевые правила

- В логарифмической модели ОДЗ всегда видна в решении.
- В показательной замене явно записывается $t > 0$.
- Ответ содержит значения исходной переменной и точные формы чисел.

11. Типичные ошибки и способы самопроверки

- Приравнивать показатели у степеней с разными, не приведёнными основаниями.
- Складывать показатели при сложении степеней.
- Забывать ограничение $t > 0$ после замены $t = a^x$.
- Оставлять в ответе значение промежуточной переменной t .
- Не записывать ОДЗ логарифмических аргументов.
- Считать, что аргумент логарифма может быть равен нулю.
- Применять сумму логарифмов к аргументам, один из которых недопустим.
- Приравнивать аргументы логарифмов с разными основаниями.
- Не проверять алгебраические кандидаты в исходной ОДЗ.

12. Дополнительные разборы

Разбор 7. Показательное уравнение с единым основанием

УСЛОВИЕ

Найдите корень уравнения.

$$3^{x-8} = \frac{1}{81}$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. Представляем правую часть как степень того же основания и приравниваем показатели.

ДО РЕШЕНИЯ. $81 = 3^4$, поэтому обратное число имеет показатель -4 .

1. **Переписываем правую часть**

$$\frac{1}{81} = 3^{-4}$$

$$81 = 3^4.$$

2. **Приравниваем показатели**

$$x - 8 = -4$$

Функция 3^t строго возрастает: равным значениям соответствуют равные показатели.

3. **Находим корень**

$$x = 4$$

Прибавляем 8 к обеим частям.

Проверка. $3^{4-8} = 3^{-4} = \frac{1}{81}$.

Типичная ошибка. Записать $1/81 = 3^4$, потеряв минус у показателя.

ОТВЕТ. 4

Разбор 8. Логарифмическое уравнение с обязательной ОДЗ

УСЛОВИЕ

Найдите корень уравнения.

$$\log_5(20 - x) = 2$$

КОРОТКОЕ ПРАВИЛО. При $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ равенство $\log_a b = c$ равносильно $b = a^c$.

ДО РЕШЕНИЯ. ОДЗ: $20 - x > 0$, то есть $x < 20$.

1. **Записываем ОДЗ**

$$x < 20$$

Аргумент логарифма должен быть положительным.

2. **Переходим к степени**

$$20 - x = 5^2 = 25$$

Используем определение логарифма.

3. **Решаем**

$$x = -5$$

Переносим 20 и меняем знак.

4. **Проверяем ОДЗ**

$$-5 < 20$$

Найденный корень допустим.

Проверка. $\log_5 (25)=2$.

Типичная ошибка. Получить $x=5$ из механического деления 20 на основание.

ОТВЕТ. —5